П. Н. Вабищевич, О единственности решения обратной задачи определения правой части эллиптического уравнения, *Дифференц. уравнения*, 1982, том 18, номер 8, 1450–1453

АВГУСТ 1982 г., ТОМ XVIII, № 8

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.956

П. Н. ВАБИЩЕВИЧ

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРАВОЙ ЧАСТИ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

В работе рассматриваются обратные задачи определения правой части эллиптических уравнений по дополнительной информации на границе области, где заданы само значение функции, удовлетворяющей эллиптическому уравнению с неизвестной правой частью, а также ее нормальная (конормальная в общем случае) производная. К таковым относится внешняя обратная задача теории потенциала, в которой необходимо найти плотность заданного тела по его известному внешнему потенциалу. В общем случае решение последней задачи неединственно. Простейший пример — шар с плотностью, зависящей только от расстояния до центра шара. Если масса шара равна нулю, то он создает нулевой внешний потенциал и, следовательно, решение обратной задачи определения плотности шара неединственно.

Единственность внешней обратной задачи метагармонического потенциала рассматривалась А. И. Прилепко [1, 2]. Им, в частности, доказано, что если плотность не зависит от одной координаты, то решение единственно. В [3] устанавливается более общий класс единственности решения этих задач, а именно множество функций, включающих в себя две неизвестные функции, каждая из которых не зависит от одной переменной. Отметим также работы [4, 5], где доказывается существование решения и описываются плотности, создающие нулевой внешний потенциал.

Здесь обсуждаются вопросы единственности решения подобных задач для более общих эллиптических уравнений, чем это сделано в [1—3]. Рассматриваются правые части, которые не зависят от одной координаты, а также те, которые зависят от двух неизвестных функций. Устанавливается единственность обратных задач для эллиптических операторов вида $L=\Delta-c(x)$, $L=\operatorname{div}p(x)\operatorname{grad}$. Результаты настоящей работы можно распространить и на случай более общих эллиптических операторов.

1. Постановка задачи. Введем некоторые обозначения. Пусть D — ограниченная область пространства E_n $(n\geqslant 2)$, принадлежащая $A^{(1,0)}$. Границу области D обозначим через ∂D, $x=(x_1, \dots, x_n)$ — точка пространства E_n. В D функция u удовлетворяет уравнению

$$Lu=-\mu(x),\quad x\in D. \tag{1}$$

Здесь L — некоторый эллиптический оператор, явный вид которого приводится ниже. На границе ∂D заданы сама функция u и ее конормальная производная

$$u=\varphi_1(x),\quad \frac{\partial u}{\partial \nu}=\varphi_2(x),\quad x\in\partial D. \tag{2}$$

Обратная задача состоит в определении правой части $\mu(x)$ уравнения (1) по условиям (2) на границе области. Будем рассматривать $\mu(x)$ следующего вида:

$$\mu(x)=f_1(x)+\eta(x)f_2(x). \tag{3}$$

Здесь $f_i(x)=f_i(x_2, \dots, x_n)$ $(i=1, 2)$ — неизвестные функции, не зависящие от координаты x_1, которые нужно найти. Функция $\eta(x)$ предполагается заданной.

2. Единственность решения задачи (1)—(3) с $L=\Delta-c(x)$. Рассмотрим задачу (1)—(3) с оператором

$$L=\Delta-c(x). \tag{4}$$

Заметим прежде всего, что соответствующие результаты о единственности обратной задачи (1)—(3) для $c(x)\equiv 0(\equiv\lambda^2,\ \lambda=\text{const}>0)$ можно найти в [1—3]. Пусть вначале $\eta(x)=0$, т. е. $\mu(x)$ не зависит от координаты x_1.

Теорема 1. *Если* $\eta(x)=0$, $\dfrac{\partial c(x)}{\partial x_1}>0$ (*или* <0), $x\in D$, *то решение задачи (1)—(4) единственно.*

Теорема 1 устанавливает единственность решения обратной задачи при условии, что $c(x)$ — монотонная дифференцируемая функция в области D.

Доказательство. При $\eta(x)=0$ функция u удовлетворяет уравнению составного типа

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(\Delta u - c(x)u) = 0, \ x \in D. \tag{5}$$

Для доказательства единственности задачи (1)—(4) достаточно показать, что уравнение (5) с однородными граничными условиями

$$u = 0, \ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \ x \in \partial D \tag{6}$$

не имеет нетривиальных решений.

Домножим (5) на u и проинтегрируем его по D:

$$\int_D u \frac{\partial}{\partial x_1}(\Delta u - c(x)u)\,dx = 0, \tag{7}$$

где $dx = dx_1 \cdots dx_n$ — элемент объема, имеем

$$u \frac{\partial}{\partial x_1}\Delta u = \operatorname{div}\left(u \operatorname{grad}\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) - \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{(\operatorname{grad} u)^2}{2}.$$

Используя формулу Гаусса—Остроградского и учитывая граничные условия (6), получим, что первый интеграл в (7) будет равен нулю. Далее

$$u\frac{\partial}{\partial x_1}(c(x)u) = \frac{u^2}{2}\frac{\partial c(x)}{\partial x_1} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_1}(c(x)u^2). \tag{8}$$

Подстановка (8) в (7) дает $\int_D \frac{\partial c(x)}{\partial x_1} u^2 dx = 0$. По условию теоремы $\frac{\partial c(x)}{\partial x_1}$ — знакопостоянная функция и, следовательно, в D $u(x) = 0$. Поэтому решение задачи (1)—(4) единственно. Теорема доказана.

Заметим, что этот результат справедлив для $c(x)$ любого знака. Пусть теперь $\eta(x)=x_1$, т. е. $\mu(x)$ зависит от двух неизвестных функций $f_i(x)$ $(i=1, 2)$.

Теорема 2. *Если* $\eta(x) = x_1$, $c(x) \geqslant 0$, $\frac{\partial^2 c(x)}{\partial x_1^2} \leqslant 0$, $x \in D$, *то решение задачи (1)—(4) единственно.*

Доказательство. В этом случае $\frac{\partial^2 \mu(x)}{\partial x_1^2} = 0$ и u удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}(\Delta u - c(x)u) = 0, \ x \in D. \tag{9}$$

Домножим (9) на u и, интегрируя по D, перебросим одну производную по x_1. Используя теорему Гаусса—Остроградского, получим

$$\int_D \frac{\partial u}{\partial x_1}\left(\Delta\frac{\partial u}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_1}(c(x)u)\right)dx = 0, \tag{10}$$

где $\int_D \frac{\partial u}{\partial x_1}\Delta\frac{\partial u}{\partial x_1}\,dx = -\int_D\left(\operatorname{grad}\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 dx$, так как на границе ∂D $\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0$.

Уравнение (10) приводится к виду

$-\int_D\left(\operatorname{grad}\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 dx - \int_D c(x)\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 dx + \frac{1}{2}\int_D \frac{\partial^2 c(x)}{\partial x_1^2}u^2 dx = 0$. Из последнего равенства и условий теоремы вытекает, что $u = 0$, $x \in D$. Это и доказывает теорему.

Рассматривая условие $\frac{\partial^2\mu(x)}{\partial x_1^2} = 0$ как частный случай $\frac{\partial^2\mu(x)}{\partial x_1^2} = 0$, получим следующий результат о единственности решения задачи с правой частью, не зависящей от одной переменной.

Следствие 1. *Если* $\eta(x) = x_1$, $f_2(x) = 0$ *(или, что то же самое,* $\eta(x) = 0$*) и* $c(x) \geqslant 0$, $\frac{\partial^2 c(x)}{\partial x_1^2} \leqslant 0$, $x \in D$, *то решение задачи (1)—(4) единственно.*

Это дополняет теорему 1, устанавливая единственность для положительных и вогнутых по той переменной, от которой не зависит правая часть, функций $c(x)$.

Единственность для более общих функций $\eta(x)$ устанавливается следующим утверждением.

Теорема 3. *Если* $a(x)>0$ (<0), $\Delta a-2ca\leqslant 0$ $(\geqslant 0)$, $\frac{\partial}{\partial x_1}\left(a\frac{\partial c(x)}{\partial x_1}\right)\leqslant 0$ $(\geqslant 0)$, $a(x)=\left(\frac{\partial\eta(x)}{\partial x_1}\right)^{-1}$, $x\in D$, *то решение задачи (1)—(4) единственно.*

Доказательство. В этом случае соответствующее уравнение составного типа для u выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}a\frac{\partial}{\partial x_1}(\Delta u-c(x)u)=0,\ x\in D. \tag{11}$$

Как и при доказательстве теоремы 2, домножим (11) на u и проинтегрируем по D, получим формулу, аналогичную (10),

$$\int\limits_D\frac{\partial u}{\partial x_1}a\left(\Delta\frac{\partial u}{\partial x_1}-\frac{\partial}{\partial x_1}(c(x)u)\right)dx=0. \tag{12}$$

Первая часть (12) приводится к виду

$$\int\limits_D\frac{\partial u}{\partial x_1}a\Delta\frac{\partial u}{\partial x_1}\,dx=-\int\limits_D a\left(\operatorname{grad}\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2dx+\int\limits_D\frac{\Delta a}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2dx. \tag{13}$$

Вторая часть выражения (12) преобразуется обычным образом. Учитывая (13), получим

$$-\int\limits_D a\left(\operatorname{grad}\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2dx+\int\limits_D\left(\frac{\Delta a}{2}-ac\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2dx+$$
$$+\int\limits_D\frac{\partial}{\partial x_1}\left(a\frac{\partial c(x)}{\partial x_1}\right)\frac{u^2}{2}dx=0. \tag{14}$$

При выполнении условий теоремы из (14) вытекает $u=0$, $x\in D$, а вместе с этим и доказываемое утверждение.

Теорему 3 аналогично теореме 2 можно использовать для доказательства единственности задач с правой частью, не зависящей от x_1. Так, например, если положить $a=x_1$, то из теоремы 3 вытекает .

Следствие 2. *Если* $x_1>0$ (<0), $c(x)\geqslant 0$ $(\leqslant 0)$, $\frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_1\frac{\partial c(x)}{\partial x_1}\right)\leqslant 0$ $(\geqslant 0)$, $x\in D$, *то решение задачи (1)—(4) с* $\frac{\partial\mu(x)}{\partial x_1}=0$ *единственно.*

3. Уравнение $\operatorname{div}p(x)\operatorname{grad}u=-\mu(x)$. Рассмотрим сейчас другой интересный пример задачи (1)—(3). Пусть

$$Lu=\operatorname{div}p(x)\operatorname{grad}u, \tag{15}$$

где $p(x)$ положительна в области D. Как и раньше, остановимся вначале на случае плотности $\mu(x)$, не зависящей от координаты x_1.

Теорема 4. *Если* $\eta(x)=0$ *и* $\frac{\partial p(x)}{\partial x_1}$ *— знакопостоянная функция в области* D, *то решение задачи (1)—(3), (15) единственно.*

Таким образом, на $p(x)$ накладываются те же условия, что и на $c(x)$ в теореме 1.

Доказательство. Обычным образом получаем

$$\int\limits_D u\frac{\partial}{\partial x_1}\operatorname{div}p(x)\operatorname{grad}u\,dx=0. \tag{16}$$

Нетрудно убедиться, что

$$u\frac{\partial}{\partial x_1}\operatorname{div}p(x)\operatorname{grad}u=\frac{\partial}{\partial x_1}(u\operatorname{div}p(x)\operatorname{grad}u)-$$
$$-\operatorname{div}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}p(x)\operatorname{grad}u\right)+\frac{\partial}{\partial x_1}\left(p(x)\frac{(\operatorname{grad}u)^2}{2}\right)-\frac{\partial p(x)}{\partial x_1}\frac{(\operatorname{grad}u)^2}{2}. \tag{17}$$

При интегрировании (17) первые три слагаемых в правой части дадут нуль в силу однородных граничных условий (6) и теоремы Гаусса—Остроградского. Таким образом, из (16) получим $\int\limits_D\frac{\partial p(x)}{\partial x_1}\frac{(\operatorname{grad}u)^2}{2}dx=0$. Так как $\frac{\partial p(x)}{\partial x_1}>0$ (или <0) в D, то $\operatorname{grad}u=$

$= 0$, $x \in D$. Но на границе ∂D $u = 0$, и поэтому во всей области $Du = 0$. Теорема доказана.

Если $\frac{\partial^2 \mu(x)}{\partial x_1^2} = 0$, то справедлив следующий результат, аналогичный теореме 2.

Теорема 5. *Если* $\eta(x) = x_1$, $\frac{\partial^2 p(x)}{\partial x_1^2} \leqslant 0$, $x \in D$, *то решение задачи (1)—(3), (15) единственно.*

Заметим, что с самого начала (см. (15)) предполагается, что $p(x) > 0$, $x \in D$. Доказательство теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 2, поэтому мы не будем на нем останавливаться. Из теоремы 5 вытекает

Следствие 3. *Если* $\frac{\partial \mu(x)}{\partial x_1} = 0$, $\frac{\partial^2 p(x)}{\partial x_1^2} \leqslant 0$, $x \in D$, *то решение задачи (1)—(3), (15) единственно.*

Можно рассмотреть операторы более общего вида, чем (4) и (15), например, $L = \mathrm{div}\, p(x) \mathrm{grad} - c(x)$. При этом для единственности решения обратной задачи (1)—(3) с таким оператором L на $c(x)$ накладываются ограничения теорем 1, 2, а на $p(x)$ теорем 4, 5. Таким образом, метод доказательства единственности решения задачи (1)—(3), основанный на сведении этой задачи к задаче для уравнения составного типа, не исчерпывается установленными результатами.

Следует заметить, что ограничения на $\eta(x)$, $c(x)$, $p(x)$ связаны скорее всего не с существом задачи, а с методом доказательства. При использовании других способов доказательства единственности эти ограничения могут быть сняты, хотя бы частично. Подобная ситуация уже возникла в теории метагармонического потенциала [1—3], где некоторые результаты о единственности внешней обратной задачи дополняют друг друга при использовании различных методов доказательства.

Литература

1. Прилепко А. И.— Докл. АН СССР, 1966, т. 167, № 4.
2. Прилепко А. И.— Дифференц. уравнения, 1967, т. 3, № 1.
3. Вабищевич П. Н.— Докл. АН СССР, 1979, т. 245, № 5.
4. Чередниченко В. Г.— Докл. АН СССР, 1978, т. 240, № 5.
5. Чередниченко В. Г.— Дифференц. уравнения, 1979, т. 15, № 2.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию 8 февраля 1979 г.

УДК 517.937

И. В. ГАЙШУН, Л. Б. КНЯЖИЩЕ

УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ АВТОНОМНЫХ ВПОЛНЕ ИНТЕГРИРУЕМЫХ УРАВНЕНИЙ

Общие теоремы метода функций Ляпунова в [1] распространены на пфаффовы системы. В [2] получены условия асимптотической устойчивости таких систем, использующие знакопостоянные функции Ляпунова.

В настоящей работе устанавливаются теоремы об устойчивости и асимптотической устойчивости решений вполне интегрируемых уравнений, которые можно рассматривать как распространение теорем из [3] на уравнения с многомерным временем. Следует, однако, отметить, что при доказательстве этих теорем используются рассуждения, несколько отличные от [3].

1. Пусть E и F — конечномерные вещественные нормированные пространства, $L(E; F)$ — нормированное пространство линейных ограниченных отображений E в F, f — непрерывная функция, определенная на F, со значениями в $L(E; F)$. Рассмотрим вполне интегрируемое дифференциальное уравнение

$$y' = f(y), \; f(0) = 0, \tag{1}$$

где штрих означает производную Фреше.

Возьмем в E замкнутый выступающий конус $\mathcal{K}$. Обозначим через $\mathfrak{F}$ фильтр в $\mathcal{K}$, базис которого образуют множества $(E \setminus b_a) \cap \mathcal{K}$, $a \geqslant 0$, где b_a—шар в E радиуса a с центром в нуле, σ_a—граница b_a.

Пусть всякое решение $x \to D(x, y_0)$ $(D(0, y_0) = y_0)$ уравнения (1) определено для всех $x \in E$. Множество $\omega(y_0) = \bigcap_{X \in \mathfrak{F}} \overline{D(X, y_0)}$ $\left(\alpha(y_0) = \bigcap_{X \in \mathfrak{F}} \overline{D(-X, y_0)}\right)$ назовем ω-предельным (α-предельным) множеством точки y_0 (черта означает замыкание).