С.Ашур, Р.Н.Шарипов

КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ АДАМАРА

Гиперсингулярные интегралы широко используются в механике (см., например, [I]). Построена теория таких интегралов [2], появились работы по методам вычисления [3, 4]. Но многие вопросы приближенных методов остаются еще открытыми. Данная работа в какой-то мере восполняет указанный пробел.

§ I. Основные свойства интегралов Адамара

Для функции $f \in C^{p-1}[0,1]$, $p \geq 2$ – целое, введем

Определение I. Функция f интегрируема в смысле конечной части по Адамару с весом $(x-t)^{-p}$ в точке $t \in (0,1)$, если существует

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\left\{\left(\int_0^{t-\varepsilon}+\int_{t+\varepsilon}^{1}\right)\frac{f(x)}{(x-t)^p}dx-\sum_{j=0}^{p-2}\frac{f^{(j)}(t)}{j!}\;\frac{\varepsilon^{j-p+1}[1+(-1)^{p-j}]}{p-j-1}\right\}.$$

Этот предел называют конечной частью интеграла функции f с весом $(x-t)^{-p}$ в точке $t \in (0,1)$ или, кратко, сингулярным интегралом Адамара. Обозначим его

$$S(p,f,t)=\int_0^1\frac{f(x)}{(x-t)^p}dx \quad , \quad t\in(0,1) . \tag{I}$$

Если интеграл (I) существует для всех $t \in (0,1)$, то говорят, что f интегрируема по Адамару на $(0,1)$. Заметим, что при $p = 1$ мы получаем сингулярный интеграл в смысле главного значения по Коши. Аналогично вводится определение интеграла Адамара при $t = 0$ или $t = 1$. Остановимся на свойствах интеграла (I).

Предложение I. Пусть $f \in C^p[0,1]$ и в точке $t \in (0,1)$ существует интеграл $S(p+1,f,t)$. Тогда

$$p\int_0^1\frac{f(x)}{(x-t)^{p+1}}dx=\int_0^1\frac{f'(x)}{(x-t)^p}dx+f(0)(-t)^{-p}-f(1)(1-t)^{-p}.$$

Доказательство. При $\varepsilon\to+0$ имеем

$$p\left[\left(\int_0^{t-\varepsilon}+\int_{t+\varepsilon}^1\right)\frac{f(x)}{(x-t)^{p+1}}dx\right]=\left(\int_0^{t-\varepsilon}+\int_{t+\varepsilon}^1\right)\frac{f'(x)}{(x-t)^p}dx+$$

$$+\left[f(0)(-t)^{-p}-f(1)(1-t)^{-p}\right]-\left[f(t-\varepsilon)(-\varepsilon)^{-p}-f(t+\varepsilon)\varepsilon^{-p}\right].$$

Применяя формулу Тейлора, получаем для $t<\sigma_1<t+\varepsilon, t-\varepsilon<\sigma_2<t$:

$$f(t+\varepsilon)\varepsilon^{-p}-f(t-\varepsilon)(-\varepsilon)^{-p}=\sum_{j=0}^{p-1}\frac{f^{(j)}(t)}{j!}\varepsilon^{j-p}\left[1+(-1)^{j+1-p}\right]+\frac{f^{(p)}(\sigma_1)-f^{(p)}(\sigma_2)}{p!}.$$

Таким образом,

$$p\left[\left(\int_0^{t-\varepsilon}+\int_{t+\varepsilon}^1\right)\frac{f(x)}{(x-t)^{p+1}}dx-\sum_{j=0}^{p-1}\frac{f^{(j)}(t)}{j!}\;\frac{\varepsilon^{j-p}\left[1+(-1)^{p+1-j}\right]}{p-j}\right]=\left(\int_0^{t-\varepsilon}+\int_{t+\varepsilon}^1\right)\frac{f'(x)}{(x-t)^p}dx+$$

$$+f(0)(-t)^{-p}-f(1)(1-t)^{-p}-\sum_{j=0}^{p-2}\frac{f^{(j+1)}(t)}{j!}\;\frac{\varepsilon^{j-p+1}\left[1+(-1)^{p-j}\right]}{p-j-1}+\frac{f^{(p)}(\sigma_1)-f^{(p)}(\sigma_2)}{p!},$$

что доказывает утверждение.

<u>Предложение 2 ([5])</u>. Если $f\in C^1H[0,1]$, то для всех $t\in(0,1)$

$$\frac{d}{dt}\int_0^1\frac{f(x)}{x-t}dx=\frac{f(0)}{-t}-\frac{f(1)}{1-t}+\int_0^1\frac{f'(x)}{x-t}dx.$$

<u>Предложение 3</u>. Если $f\in C^pH[0,1]$, то для всех $t\in(0,1)$

$$\frac{d}{dt}\int_0^1\frac{f(x)}{(x-t)^p}dx=p\int_0^1\frac{f(x)}{(x-t)^{p+1}}dx.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем произвольное $t\in(0,1)$ и $(p-1)$ раз последовательно применим предложение I:

$$\int_0^1\frac{f(x)}{(x-t)^p}dx=\frac{1}{(p-1)!}\int_0^1\frac{f^{(p-1)}(x)}{x-t}dx+\sum_{i=2}^{p}\frac{(i-2)!}{(p-1)!}\left[\frac{f^{(p-i)}(0)}{(-t)^{i-1}}-\frac{f^{(p-i)}(1)}{(1-t)^{i-1}}\right].$$

Но $f^{(p-1)} \in C^1 H[0,1]$, поэтому из предложения 2 следует

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 \frac{f(x)}{(x-t)^p}\,dx = p\int_0^1 \frac{f(x)}{(x-t)^{p+1}}\,dx \ .$$

Пусть теперь f - 2π - периодическая непрерывно дифференцируемая функция.

Определение 2. Конечной частью интеграла функции f называется

$$G(f;s) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} f(\sigma)\operatorname{cosec}^2\frac{\sigma-s}{2}\,d\sigma = \tag{2}$$

$$= \frac{1}{4\pi}\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int_0^{s-\varepsilon} + \int_{s+\varepsilon}^{2\pi}\right) f(\sigma)\operatorname{cosec}^2\frac{\sigma-s}{2}\,d\sigma \ .$$

Как и выше, устанавливаются равенства для $f \in C^1 H[0,2\pi]$:

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} f(\sigma)\operatorname{cosec}^2\frac{\sigma-s}{2}\,d\sigma = \frac{d}{ds}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}\,d\sigma\right],$$

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} f(\sigma)\operatorname{cosec}^2\frac{\sigma-s}{2}\,d\sigma = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}\,d\sigma \ . \tag{3}$$

Заметим, что формулу (3) можно положить в основу определения интегралов Адамара степени больше двух.

Предложение 4. При любых натуральных n имеют место соотношения

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \sin(n\sigma)\operatorname{cosec}^2\frac{\sigma-s}{2}\,d\sigma = -n\sin(ns) \ ,$$

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \cos(n\sigma)\operatorname{cosec}^2\frac{\sigma-s}{2}\,d\sigma = -n\cos(ns) \ .$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Его можно найти в [6] либо воспользоваться (3) и соответствующими равенствами для сингулярного интеграла с ядром Гильберта.

§ 2. Способы построения квадратурных формул

Как известно, общий способ построения квадратурных формул заключается в замене интегрируемой функции каким-либо аппроксимантом, интеграл от которого берется явно. Поэтому свойства квадратурной формулы определяются в первую очередь выбором аппроксимации. Но важную роль играет и метод явного интегрирования аппроксимирующего агрегата. Для сингулярных интегралов последнее обстоятельство имеет особое значение. Остановимся на этом подробнее.

Обозначим

$$A_n = A_n(f\,;x)=\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(f)\,\psi_i(x)$$

какой-либо аппроксимант для функции f на отрезке [0, I], определяемый функционалами φ_i, $i\in 1:n$ и базисными функциями ψ_i, $i\in 1:n$. Например, если положить $\varphi_i(f)=f(x_i)$, где $0\le x_1<x_2<\ldots<x_n\le 1$ – заданная сетка узлов на [0,I], и $\psi_i(x_j)=\{1, i=j;\ 0, i\ne j\}$, то мы получим интерполянт f.

Квадратурная формула для интеграла (I) может быть построена так:

$$S(p,f,t)\approx S(p,A_n,t)=\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(f)\,S(p,\psi_i,t) \quad , \tag{4}$$

предполагая, что интегралы $S(p,\psi_i,t)$ вычисляются точно. Таким образом, удобство использования и эффективность формулы (4) во многом будут определяться способом подсчета $S(p,\psi_i,t)$. Для этого можно предложить следующие методы:

а) непосредственное интегрирование $S(p,\psi_i,t)$;

б) выделение особенности

$$S(p,\psi_i,t)=\int_0^1\frac{\psi_i(x)-\psi_i(t)}{(x-t)^p}\,dx+\psi_i(t)\int_0^1\frac{dx}{(x-t)^p}\ ;$$

в) замена переменной

$$S(p,\psi_i,t)=\int_0^1\frac{\psi_i(x-t+t)}{(x-t)^p}\,dx\ ;$$

г) интегрирование по частям (используя предложение I)

$$S(p,\varphi_i,t)=\frac{1}{p-1}\left[\int_0^1\frac{\varphi_i'(x)}{(x-t)^{p-1}}\,dx+\varphi_i(0)(-t)^{-p}-\varphi_i(1)(1-t)^{-p}\right];$$

д) дифференцирование (следуя предложению 3)

$$S(p,\varphi_i,t)=\frac{1}{p-1}\,S(p-1,\varphi_i,t)\ .$$

Естественно, все это распространяется и на интеграл (2). Ниже мы проиллюстрируем некоторые из этих методов, используя полиномиальные B-сплайны и тригонометрическую интерполяцию.

§ 3. Квадратурные формулы на основе B-сплайнов

Выберем сетку узлов вида

$x_{-n}<\ldots<x_{-1}<0=x_0<x_1<\ldots<x_N=1<x_{N+1}<\ldots<x_{N+n}$.

Полиномиальный B-сплайн степени n дефекта I по узлам $x_i,\ldots,x_{i+n+1}$ имеет представление [7]

$$\bar{B}_n^i(x)=(-1)^{n+1}(n+1)\sum_{j=i}^{n+1+i}(x-x_j)_+^n\,/\,\omega'_{n+1,i}(x_j)=$$
$$=(n+1)\sum_{j=i}^{n+1+i}(x_j-x)_+^n\,/\,\omega'_{n+1,i}(x_j)\ ,\quad i\in -n:N-1\ ,$$

где

$$\omega_{n+1,i}(t)=\prod_{j=i}^{n+1+i}(t-x_j)\ .$$

Носителем его является отрезок $[x_i\,,x_{i+n+1}]$. Кроме того, любой полиномиальный сплайн $Q(x)$ степени n дефекта I на сетке $x_0<x_1<\ldots<x_N$ представим в виде $Q(x)=\sum_{i=-n}^{N-1}b_i\bar{B}_n^i(x)$, где b_i – постоянные коэффициенты.

При практических вычислениях обычно выгоднее использовать нормализованные B-сплайны

$$B_n^i(x)=\frac{x_{i+n+1}-x_i}{n+1}\,\bar{B}_n^i(x)\ ,$$

для которых имеет место рекуррентное соотношение

$$B_n^i(x)=\frac{x-x_i}{x_{i+n}-x_i}B_{n-1}^i(x)+\frac{x_{i+n+1}-x}{x_{i+n+1}-x_{i+1}}B_{n-1}^{i+1}(x)\,,\quad n\in 1,2,\ldots, \tag{5}$$

$$B_0^i(x)=\left\{1,\ x\in[x_i,x_{i+1});\ 0,\ x\bar{\in}[x_i,x_{i+1})\right\}.$$

При построении сплайн-квадратур для интеграла (I) на базе B-сплайнов необходимо вычислять $S(\rho,\bar{B}_n^i,t)$ при $n\geqslant\rho$. Для этого можно воспользоваться любым из способов § 2.

Следуя способу в), получаем:

$$S(\rho,\bar{B}_n^i,t)=(n+1)\sum_{j=max(0,i)}^{n+1+i}\frac{1}{\omega'_{n+1,i}(x_j)}\int_0^{x_j}\frac{(x_j-x)^n}{(x-t)^\rho}dx\ ; \tag{6}$$

$$\int_0^{x_j}\frac{(x_j-x)^n}{(x-t)^\rho}dx=\int_0^{x_j}\frac{(x_j-t+t-x)^n}{(x-t)^\rho}dx=$$

$$=(-1)^\rho\sum_{\ell=0}^{n}(x_j-t)^\ell C_n^\ell\int_0^{x_j}(t-x)^{n-\ell-\rho}dx=(-1)^{\rho+1}C_n^{n-\rho+1}(x_j-t)^{n-\rho+1}\ln\left|\frac{t-x_j}{t}\right|+$$

$$+(-1)^{\rho+1}(x_j-t)^{n-\rho+1}\sum_{\ell=0,\,\ell\neq n-\rho+1}^{n}C_n^\ell\frac{(-1)^{n-\ell-\rho+1}}{n-\ell-\rho+1}+$$

$$+(-1)^\rho\sum_{\ell=0,\,\ell\neq n-\rho+1}^{n}(x_j-t)^\ell\,t^{n-\ell-\rho+1}\frac{C_n^\ell}{n-\ell-\rho+1}.$$

Другое выражение для весов выводится из соотношения (5):

$$S(\rho,B_n^i,t)=\frac{1}{x_{i+n}-x_i}S(\rho-1,B_{n-1}^i,t)-\frac{1}{x_{i+n+1}-x_{i+1}}S(\rho-1,B_{n-1}^{i+1},t)+$$

$$+\frac{t-x_i}{x_{i+n}-x_i}S(\rho,B_{n-1}^i,t)+\frac{x_{i+n+1}-t}{x_{i+n+1}-x_{i+1}}S(\rho,B_{n-1}^{i+1},t).$$

Для применения этого правила значения $S(j,B_j^i,t)$ и $S(1,B_j^i,t)$ можно вычислить по формуле (6) либо воспользоваться способом б) из § 2:

$$S(1,\bar{B}_j^i,t)=(j+1)\sum_{\ell=max(0,i)}^{j+1+i}\frac{1}{\omega'_{j+1,i}(x_\ell)}\int_0^{x_\ell}\frac{(x_\ell-x)^j}{x-t}dx\ ,$$

$$\int_0^{x_\ell} \frac{(x_\ell-x)^j}{x-t}\,dx = \int_0^{x_\ell} \frac{(x_\ell-x)^j-(x_\ell-t)^j}{x-t}\,dx + (x_\ell-t)^j \ln\left|\frac{x_\ell-t}{t}\right| =$$

$$= -\sum_{i=0}^{j-1} (x_\ell-t)^{j-i-1} \int_0^{x_\ell} (x_\ell-x)^i dx + (x_\ell-t)^j \ln\left|\frac{x_\ell-t}{t}\right| =$$

$$= -\sum_{i=1}^{j} (x_\ell-t)^{j-i} x_\ell^i \,\frac{1}{i} + (x_\ell-t)^j \ln\left|\frac{x_\ell-t}{t}\right| .$$

§ 4. Квадратурные формулы на основе тригонометрической интерполяции

В [8] указан общий способ построения квадратурных формул для сингулярных интегралов Гильберта. Здесь мы рассмотрим лишь случай тригонометрической интерполяции, хорошо иллюстрирующий применяемую методику. В основу построений положим предложение 4, поэтому для сингулярного интеграла (2) квадратурные формулы можно строить на базе формул для интеграла Гильберта.

Обозначим $P_n(f;s)$ тригонометрический полином степени $n = \left[\frac{N}{2}\right]$ для функции f по узлам $s_j = (2\pi j + \omega)/N,\ j \in 1:N$; ω – произвольная постоянная. Для него справедливо представление

$$P_n(f;s) = \frac{2}{N} \sum_{j=1}^{N} f(s_j)\, \Delta_n(s-s_j)\ ,\quad n = \left[\frac{N}{2}\right] ,$$

в котором $\Delta_n(\cdot)$ – обыкновенное ядро Дирихле при $N = 2n+1$ и модифицированное ядро Дирихле при $N = 2n$ порядка n . Тогда квадратурная формула для интеграла (2) будет иметь следующий вид:

$$G(f;s) \approx G(P_n f;s) = \frac{2}{N} \sum_{j=1}^{N} f(s_j)\, \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \Delta_n(\sigma-\sigma_j) \operatorname{cosec}^2\left(\frac{\sigma-s}{2}\right) d\sigma .$$

Веса этой формулы можно вычислить, следуя предложению 2. Но мы воспользуемся здесь соотношением (3). Имеем

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \Delta_n(\sigma-\sigma_j) \operatorname{cosec}^2\left(\frac{\sigma-s}{2}\right) d\sigma = \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Delta_n(\sigma-\sigma_j)\, \operatorname{ctg} \frac{\sigma-s}{2}\, d\sigma\right) =$$

$$
=\begin{cases} \dfrac{d}{ds}\left[\dfrac{\sin(n+1)\dfrac{s_j-s}{2}\,\sin n\dfrac{s_j-s}{2}}{\sin\dfrac{s_j-s}{2}}\right], & N=2n+1;\\[2ex] \dfrac{d}{ds}\left[\sin^2 n\dfrac{s-s_j}{2}\,ctg\,\dfrac{s_j-s}{2}\right], & N=2n; \end{cases} =
$$

$$
=\begin{cases} \dfrac{1-(2n+1)\sin\dfrac{2n+1}{2}(s_j-s)\sin\dfrac{s_j-s}{2}-\cos\dfrac{2n+1}{2}(s_j-s)\cos\dfrac{s_j-s}{2}}{4\sin^2\dfrac{s_j-s}{2}}, & N=2n+1,\\[2ex] \dfrac{n}{2}\sin n(s-s_j)\,ctg\,\dfrac{s_j-s}{2}+\sin^2 n\dfrac{s_j-s}{2}\,cosec^2\,\dfrac{s_j-s}{2}, & N=2n. \end{cases}
$$

В узлах сетки полученная квадратурная формула намного упрощается. Например, при $N=2n+1$ она принимает вид

$$
G(P_n f;\, s_j)=\frac{1}{4(2n+1)}\sum_{i=1}^{2n+1} f(s_i)\,\alpha_{ji},
$$

$$
\alpha_{ji}=\begin{cases} \sec^2\dfrac{s_j-s_i}{4}, & j-i \ \text{– четно},\\[2ex] cosec^2\,\dfrac{s_j-s_i}{4}, & j-i \ \text{– нечетно}. \end{cases}
$$

Заключение

В предыдущих параграфах указаны основные способы построения квадратурных формул для интегралов (I) и (2). Естественно, встает вопрос о сходимости формул. Ответ на него для формул вида (4) легко получить, воспользовавшись оценками для интегралов Адамара из работы [4] и известными погрешностями аппроксимации плотности интеграла и ее производных.

Литература

I. Бисплингхофф Р. Л., Эшли Х., Халфман Р. Л. Аэроупругость. – М.: Иностр. лит., 1958. – 799 с.

2. Самко С. Г. Гиперсингулярные интегралы и их приложения. – Ростов-на-Дону: Изд-во Ростов. ун-та, 1984. – 208 с.

3. Бабаев Р. М. Методы приближенного вычисления гипер-

сингулярных интегралов и интегралов в смысле Адамара: Дисс. ... канд. физ.-мат.наук. - Баку, 1984. - 140 с.

4. Габдулхаев Б. Г., Шарипов Р. Н. Оптимизация квадратурных формул для сингулярных интегралов Коши и Адамара // Конструктивная теория функций и функц. анализ. Казань, 1987. - Вып.6. - С.3 - 48.

5. Крикунов Ю. М. Дифференцирование особых интегралов с ядром Коши и одно граничное свойство голоморфных функций// Краевые задачи теорий ф.к.п. Казань, 1962. - С.17 - 24.

6. Волохин В. А. Один класс сопряженных функций относительно особого интеграла в смысле Адамара // Краевые задачи и их приложения. Чебоксары, 1986. - С.30 - 32.

7. Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л. Методы сплайн-функций. - М.: Наука, 1980. - 352 с.

8. Габдулхаев Б. Г. Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. - Казань: КГУ, 1980. - 232 с.

А.М.Бикчентаев

НЕРАВЕНСТВО ТРЕУГОЛЬНИКА ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ПРОСТРАНСТВ ИЗМЕРИМЫХ ОПЕРАТОРОВ

Интенсивное развитие теории некоммутативного интегрирования и ее многочисленные плодотворные приложения привели к необходимости исследования различных классов линейных метрических пространств, ассоциированных со следом или весом - наиболее общим аналогом интеграла на алгебре Неймана. Из них в числе важнейших F-нормированные идеальные пространства (F-НИП) измеримых операторов - некоммутативные аналоги классических функциональных F-НИП.

Поскольку в алгебре Неймана $\mathcal{M}$ операторное неравенство $|\mathcal{A}+\mathcal{B}|\leq|\mathcal{A}|+|\mathcal{B}|(\mathcal{A},\mathcal{B}\in\mathcal{M})$, вообще говоря, неверно, одним из существенных моментов в некоммутативной теории является проверка занимающего принципиальное место в аксиоматике F-НИП "неравенства треугольника" для функционала - претендента на роль F-нормы (см., например, [7, 14, 5, 8, 1, 2]).