Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

M. M. Khachev, The Dirichlet problem for the Gellerstedt equation in an infinite rectangular domain,
Differ. Uravn., 1999, Volume 35, Number 8, 1122–1126

https://www.mathnet.ru/eng/de9980

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
https://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 18.97.9.175
December 9, 2025, 17:19:27

1999. Т.35, №8. С. 1122 — 1126

УДК 517.956.6

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЛЕРСТЕДТА В БЕСКОНЕЧНОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

М. М. Хачев

Рассмотрим уравнение Геллерстедта

$$T(u) \equiv \operatorname{sgn} y \cdot |y|^m u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad m > 0, \tag{1}$$

в бесконечной прямоугольной области $D = \{(x,y):\ 0 < x < 1,\ -\alpha < y < +\infty;\ \alpha = ((2+m)/2)^{2/(2+m)}\}$, где эллиптическая часть D^+ области D представляет собой полуполосу, а гиперболическая часть D^- области D — прямоугольник, обладающий тем свойством, что характеристики уравнения (1)

$$AB_0: \quad x - (2/(2+m))(-y)^{(m+2)/2} = 0, \quad BA_0: \quad x + (2/(2+m))(-y)^{(m+2)/2} = 1$$

проходят через его вершины. Решением уравнения (1) в области D назовем функцию $u(x,y)$, если:

1) $u(x,y) \in C(\overline{D}) \bigcap C^2(D^+ \bigcup D^- \setminus (AB_0 \bigcup BA_0))$;

2) $u_y(x,y) = O(1)$ при $y \to +\infty$, $0 \le x \le 1$;

3) $\tau^+(x) = \lim\limits_{y\to+0} u(x,y) = \tau^-(x) = \lim\limits_{y\to-0} u(x,y) \equiv \tau(x)$, $0 \le x \le 1$, $\nu^+(x) = \lim\limits_{y\to+0} u_y(x,y) = \nu^-(x) = \lim\limits_{y\to-0} u_y(x,y) \equiv \nu(x)$, $0 < x < 1$;

4) интегралы $\int\limits_0^1 u(x,0)u_y(x,0)\,dx$, $\int\limits_{D^+} (y^m u_x^2 + u_y^2)\,dx\,dy$, $\int\limits_{D^-} (u_y^2 - (-y)^m u_x^2)\,dx\,dy$ существуют;

5) к интегралу $\int\limits_D uTu\,dx\,dy$ можно применить формулу Грина в том смысле, что контурный интеграл, входящий в формулу Грина, существует как предел интегралов, взятых по кривым, стремящимся изнутри к контуру области D.

Задача Дирихле. В области D найти решение $u(x,y)$ уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям:

$$u(0,y) = \varphi(y), \quad u(1,y) = \psi(y), \quad -\alpha \le y < +\infty, \quad u(x,-\alpha) = f(x), \quad 0 \le x \le 1,$$

$$\lim_{y\to+\infty} u(x,y) = 0 \quad \text{равномерно относительно} \quad x \in [0,1], \tag{2}$$

где функции $\varphi(y)$, $\psi(y)$ и $f(x)$ удовлетворяют следующим требованиям: $\varphi(y), \psi(y) \in C[-\alpha,+\infty)$; $f(x) \in C[0,1]$;

$$\varphi(y) = \begin{cases} \varphi_1(y), & 0 < y < +\infty, \\ \psi_1(y), & -\alpha < y < 0, \\ \varphi_1(0) = \psi_1(0), & y = 0, \end{cases} \qquad \psi(y) = \begin{cases} \varphi_2(y), & 0 < y < +\infty, \\ \psi_2(y), & -\alpha < y < 0, \\ \varphi_2(0) = \psi_2(0), & y = 0, \end{cases}$$

$$\lim_{y\to+\infty} \varphi_i(y) = 0, \quad i = 1,2, \quad f(0) = \psi_1(-\alpha), \quad f(1) = \psi_2(-\alpha).$$

Теорема 1. *Пусть $u(x,y)$ — решение уравнения (1) в области D, причем*

$$u(0,y) = u(1,y) = 0, \quad -\alpha \le y < +\infty, \quad u(x,-\alpha) = 0, \quad 0 \le x \le 1,$$

$$\lim_{y\to+\infty} u(x,y) = 0 \quad \textit{равномерно относительно} \quad 0 \le x \le 1.$$

Тогда $u(x,y) \equiv 0$ в области D.

Доказательство теоремы основано на следующих леммах 1, 2.

Лемма 1. *Пусть $u(x,y)$ — решение уравнения (1) в области D^+ из класса $C(\overline{D^+})\bigcap \bigcap C^2(D^+)$, удовлетворяющее краевым условиям: $u(0,y)=u(1,y)=0$, $0<y<+\infty$, и (2). Тогда*

$$\int_0^1 \tau(x)\nu(x)\,dx \le 0. \tag{3}$$

Действительно, интегрируя тождество $uT(u) \equiv \dfrac{\partial}{\partial x}(y^m u u_x) + \dfrac{\partial}{\partial y}(u u_y) - y^m u_x^2 - u_y^2 = 0$ по области $D^+_{h\varepsilon} = \{(x,y) : 0<x<1,\ \varepsilon<y<h\}$, где $\varepsilon, h \equiv \mathrm{const} > 0$, после известных преобразований придем к равенству

$$\int_0^1 u(x,h)u_y(x,h)\,dx - \int_0^1 u(x,\varepsilon)u_y(x,\varepsilon)\,dx - \int_{D^+_{h\varepsilon}} (y^m u_x^2 + u_y^2)\,dx\,dy = 0. \tag{4}$$

Переходя в равенстве (4) к пределу сперва при $\varepsilon \to 0$, а затем при $h \to +\infty$, получим

$$\int_0^1 \tau(x)\nu(x)\,dx + \int_{D^+} (y^m u_x^2 + u_y^2)\,dx\,dy = 0, \tag{5}$$

откуда следует справедливость неравенства (3).

Лемма 2. *Пусть $u(x,y)$ — решение уравнения (1) в области D^- из класса $C(\overline{D^-})\bigcap \bigcap C^2(D^-)$, кроме, может быть, характеристик уравнения (1), причем $u(x,y)|_{\partial D^- \setminus (AB)} = 0$. Тогда*

$$\int_0^1 \tau(x)\nu(x)\,dx \ge 0. \tag{6}$$

В самом деле, после интегрирования тождества $uT(u) \equiv \dfrac{\partial}{\partial x}[-(-y)^m u u_x] + \dfrac{\partial}{\partial y}(u u_y) + +(-y)^m u_x^2 - u_y^2 = 0$ по области D^-, что возможно в силу условий леммы, получим

$$\int_0^1 \tau(x)\nu(x)\,dx = \int_{D^-} [u_y^2 - (-y)^m u_x^2]\,dx\,dy. \tag{7}$$

При вычислении интеграла из правой части (7), который обозначим через J, перейдем в плоскость характеристических координат (ξ,η), где $\xi = x - (2/(m+2))(-y)^{(m+2)/2}$, $\eta = x + (2/(2+m))(-y)^{(2+m)/2}$. Тогда

$$J = -2(2-4\beta)^{-2\beta} \int_\Omega (\eta-\xi)^{2\beta} u_\xi u_\eta\,d\xi\,d\eta, \tag{8}$$

где $\beta = m/(2(m+2))$, Ω — образ области D^- при указанном отображении. Уравнение (1) в области Ω принимает вид $u_{\xi\eta} + (\beta/(\eta-\xi))(u_\xi - u_\eta) = 0$. Отсюда имеем равенство $u_\xi u_\eta = u_\eta^2 - ((\eta-\xi)/(2\beta))\,\partial u_\eta^2/\partial\xi$, учитывая которое в (8) и интегрируя по частям по ξ, получим

$$J = \frac{1}{\beta(2-4\beta)^{2\beta}} \int_\Omega (\eta-\xi)^{1+2\beta} u_\eta^2\,d\xi\,d\eta + \frac{1}{\beta(2-4\beta)^{2\beta}} \int_{\partial\Omega} (\eta-\xi)^{1+2\beta} u_\eta^2 \cos(n,\xi)\,ds \ge 0, \tag{9}$$

где n — внешняя нормаль к границе $\partial\Omega$ области Ω. Из (7) и (9) следует справедливость утверждения леммы.

Таким образом, на основании лемм 1, 2 заключаем, что $\int_0^1 \tau(x)\nu(x)\,dx = 0$. Но тогда из (5) получаем, что $u \equiv 0$ в D^+, откуда, перейдя при помощи задач Коши, Дарбу и Гурса в D^-, установим, что $u(x,y) \equiv 0$ везде в $D = D^+ \bigcup D^-$.

Задача Неймана. В области D^+ найти решение $u(x,y) \in C(\overline{D^+}) \bigcap C^2(D^+)$ уравнения (1), удовлетворяющее следующим условиям:

$$u(0,y) = \varphi_1(y), \quad \varphi_1(0) = 0, \quad 0 \le y < +\infty, \tag{10}$$

$$u(1,y) = \varphi_2(y), \quad \varphi_2(0) = 0, \quad 0 \le y < +\infty, \tag{11}$$

$$\lim_{y \to +0} u_y(x,y) = \nu^+(x), \quad 0 < x < 1, \tag{12}$$

и (2), где $\nu^+(x) \in C(0,1)$, а при $x \to 0;1$ может обращаться в бесконечность порядка меньше $(1-2\beta)$.

Решение задачи (1), (2), (10) — (12) найдем как сумму $u = u_1 + u_2$ решений двух вспомогательных краевых задач:

$$T(u_k) \equiv y^m u_{kxx} + u_{kyy} = 0, \tag{1_k}$$

когда

$$u_k(0,y) = (2-k)\varphi_1(y), \quad 0 \le y < +\infty, \tag{10_k}$$

$$u_k(1,y) = (2-k)\varphi_2(y), \quad 0 \le y < +\infty, \tag{11_k}$$

$$\lim_{y \to +0} u_{ky}(x,y) = (k-1)\nu^+(x), \quad 0 < x < 1, \tag{12_k}$$

и (2_k). Решение $u_1(x,y)$ задачи (1_1), (2_1), (10_1) — (12_1) будем искать в виде

$$u_1(x,y) = \sqrt{y} \int_0^{+\infty} R(x,\lambda) J_{-\overline{m}}(\overline{y})\, d\lambda, \tag{13}$$

где $J_\alpha(t)$ — функция Бесселя [1] первого рода, $R(x,\lambda)$ — неизвестная функция, а также введены обозначения $\overline{y} = 2\lambda(2+m)^{-1}s^{(2+m)/2}$, $\overline{m} = 1/(2+m)$, которые будем использовать ниже. В силу свойств функций Бесселя $J_\alpha(t)$ легко показать, что выражение (13) удовлетворяет условиям (12_1), (2_1). Подставляя (13) в (1_1), (10_1) и (11_1), относительно функции $R(x,\lambda)$ получим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$R''(x,\lambda) - \lambda^2 R(x,\lambda) = 0 \tag{14}$$

с начальными условиями

$$R(0,\lambda) = 2\lambda\overline{m} \int_0^{+\infty} y^{(2m+1)/2} \varphi_1(y) J_{-\overline{m}}(\overline{y})\, dy, \quad R(1,\lambda) = 2\lambda\overline{m} \int_0^{+\infty} y^{(2m+1)/2} \varphi_2(y) J_{-\overline{m}}(\overline{y})\, dy. \tag{15}$$

Известными методами [2, с. 78] нетрудно получить решение задачи (14), (15) в следующем виде:

$$R(x,\lambda) = 2\lambda\overline{m}(\operatorname{sh}\lambda)^{-1}\Big[\operatorname{sh}(\lambda(1-x)) \int_0^{+\infty} y^{(2m+1)/2} \varphi_1(y) J_{-\overline{m}}(\overline{y})\, dy +$$

$$+ \operatorname{sh}\lambda x \int_0^{+\infty} y^{(2m+1)/2} \varphi_2(y) J_{-\overline{m}}(\overline{y})\, dy\Big]. \tag{16}$$

Из (13) и (16) имеем решение задачи (1_1), (2_1), (10_1) — (12_1)

$$u_1(x,y) = 2\sqrt{y}\,\overline{m}\Big[\int_0^{+\infty} t^{(2m+1)/2} \varphi_1(t)\, dt \int_0^{+\infty} \lambda(\operatorname{sh}\lambda)^{-1} \operatorname{sh}(\lambda(1-x)) J_{-\overline{m}}(\overline{t}) J_{-\overline{m}}(\overline{y})\, d\lambda +$$

$$+ \int_0^{+\infty} t^{(2m+1)/2} \varphi_2(t)\, dt \int_0^{+\infty} \lambda(\operatorname{sh}\lambda)^{-1} \operatorname{sh}(\lambda x) J_{-\overline{m}}(\overline{t}) J_{-\overline{m}}(\overline{y})\, d\lambda\Big]. \tag{17}$$

Решение $u_2(x,y)$ задачи (1_2), (2_2), (10_2) — (12_2) будем искать в виде

$$u_2(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n\sqrt{y}K_{\overline{m}}(2n\overline{m}\pi y^{(2+m)/2})\sin(n\pi x), \tag{18}$$

где c_n — произвольные постоянные, $n=1,2,\ldots$, а $K_\alpha(t)$ — функция Макдональда [1].

Учитывая свойства функций Макдональда $K_\alpha(t)$, нетрудно показать, что выражение (18) удовлетворяет условиям (10_2), (11_2) и (2_2). В силу краевого условия (12_2) получим

$$\nu^+(x)=-\frac{4}{\pi}(\pi n\overline{m})^{-\overline{m}}\sin(\overline{m}\pi)\Gamma(1+\overline{m})\sum_{n=1}^{\infty} c_n\sin(\pi nx),$$

где

$$c_n=-4\pi^{-1}(n\overline{m}\pi)^{-\overline{m}}\sin(\overline{m}\pi)\Gamma(1+\overline{m})\int_0^1 \nu^+(t)\sin(\pi nt)\,dt.$$

Тогда

$$u_2(x,y)=\gamma\sqrt{y}\int_0^1 \nu^+(t)\Big(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\overline{m}}\sin(\pi nx)\sin(\pi nt)\Big)K_{\overline{m}}(2n\overline{m}\pi y^{(2+m)/2})\sin(n\pi x)\,dt, \tag{19}$$

где $\gamma=-4\pi^{-1}(\overline{m}\pi)^{-\overline{m}}\Gamma(1+\overline{m})\sin(\overline{m}\pi)$.

Таким образом, решение задачи Неймана в эллиптической области D^+ имеет вид

$$u(x,y)=u_1(x,y)+u_2(x,y), \tag{20}$$

где $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$ определены формулами (17) и (19) соответственно.

Переходя к пределу при $y\to+0$ в равенстве (20), получим основное соотношение между $\tau^+(x)$ и $\nu^+(x)$, принесенное из области эллиптичности D^+ уравнения (1) на линию вырождения $y=0$ $(0<x<1)$:

$$\tau^+(x)=-\gamma_1\int_0^1 \nu^+(t)M(x,t)\,dt+u_1(x,0), \tag{21}$$

где $M(x,t)=|x-t|^{-2\beta}-(x+t)^{-2\beta}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}[(2n-x+t)^{-2\beta}+(2n+x-t)^{-2\beta}-(2n-x-t)^{-2\beta}-$ $-(2n+x+t)^{-2\beta}]$, $\gamma_1=(2-4\beta)^{2\beta}\Gamma^2(\beta)/(4\pi\Gamma(2\beta))$, $u_1(x,0)=\gamma_2\int\limits_0^{+\infty} t^{(2m+1)/2}\varphi_1(t)\,dt\times$ $\times\int\limits_0^{+\infty}\lambda^{1-\overline{m}}(\operatorname{sh}\lambda)^{-1}\operatorname{sh}((1-x)\lambda)J_{-\overline{m}}(\overline{t})\,d\lambda+\gamma_2\int\limits_0^{+\infty} t^{(2m+1)/2}\varphi_2(t)\,dt\int\limits_0^{+\infty}\lambda^{1-\overline{m}}(\operatorname{sh}\lambda)^{-1}\operatorname{sh}(x\lambda)J_{-\overline{m}}(\overline{t})\,dt$, $\gamma_2=2\pi^{-1}\overline{m}^{1-\overline{m}}\Gamma(\overline{m})\sin(\overline{m}\pi)$.

Для того чтобы получить основное функциональное соотношение между $\tau^-(x)$ и $\nu^-(x)$, принесенное из области гиперболичности D^- уравнения (1) на линию вырождения $y=0$ $(0<x<1)$, поступаем следующим образом: 1) обозначаем через D_i^- $(i=\overline{1,4})$ криволинейные треугольники, на которые разбивают область D^- характеристики уравнения (1); 2) решаем соответствующие задачи Коши в областях D_i^- $(i=\overline{1,4})$; 3) склеиваем решения и их производные вдоль характеристических сегментов, в результате получаем систему из четырех уравнений с четырьмя неизвестными; 4) решая эту систему, получаем основное функциональное соотношение между $\tau^-(x)$ и $\nu^-(x)$.

Указанное соотношение имеет вид [3]

$$\tau^-(x)=\gamma_3\int_0^x (x-t)^{-2\beta}\nu^-(t)\,dt+\int_0^1 \Psi(x,t)\nu^-(t)\,dt, \tag{22}$$

где $\Psi(x,t)$ — непрерывная и ограниченная в квадрате $0 \le x,\ t \le 1$ функция, $\gamma_3 = -(4\beta)^{1-2\beta}\Gamma(1/2-\beta)\cos(\pi\beta)/(2\pi\Gamma^2(1-\beta))$.

Таким образом, вопрос существования решения задачи Дирихле для уравнения (1) в области D эквивалентен вопросу о разрешимости уравнений (21) и (22).

Удовлетворяя условиям склеивания и применяя затем формулу обращения интегрального уравнения Абеля, находим

$$\nu(x) - \lambda \int_0^1 \left(\frac{t}{x}\right)^{1-2\beta} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{t+x-2xt}\right)\nu(t)\,dt = f_1(x), \tag{23}$$

где

$$f_1(x) = \lambda \int_0^1 (t/x)^{1-2\beta} H(x,t)\nu(t)\,dt + \delta_1 \int_0^{+\infty} t^{4\beta/(1-2\beta)}\varphi_1(t)H_1(x,t)\,dt -$$

$$- \delta_1 \int_0^{+\infty} t^{4\beta/(1-2\beta)}\varphi_2(t)H_2(x,t)\,dt - \delta_2 \int_0^1 K(x,t)\nu(t)\,dt,$$

$$H(x,t) = \frac{1}{t+x-2xt} - \frac{1}{t+x} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{2n+1}{t}\right)^{1-2\beta}\left(\frac{1}{2n+t-x} - \frac{1}{2n+t+x}\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{2n-1}{t}\right)^{1-2\beta}\left(\frac{1}{2n-t+x} - \frac{1}{2n-t-x}\right)\right],$$

$$\lambda = (1/\pi)\operatorname{tg}(\pi/4 + \pi\beta/2), \quad \delta_1 = \delta\sin(2\pi\beta)/(\pi\gamma_3(1-\sin(\pi\beta))),$$

$$\delta_2 = \sin(2\pi\beta)/(\pi\gamma_3(1-\sin(\pi\beta))), \quad \delta = 2\pi^{-3/2}(1-2\beta)^{2\beta}\cos(\pi\beta)\Gamma(1+\beta)\Gamma(1/2-\beta),$$

$$H_1(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\int_0^x \frac{(1-2\beta)^2 s^{2/(1-2\beta)} - (1-2\beta)(2n+t)^2}{(x-t)^{1-2\beta}[(2n+t)^2 + (1-2\beta)^2 s^{2/(1-2\beta)}]^{2+\beta}}\,dt - \right.$$

$$\left. - \int_0^x \frac{(1-2\beta)^2 s^{2/(1-2\beta)} - (1+2\beta)(2n-t)^2}{(x-t)^{1-2\beta}[(2n-t)^2 + (1-2\beta)^2 s^{2/(1-2\beta)}]^{2+\beta}}\,dt\right\},$$

$$H_2(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{x^{2\beta-1}(2n+1)}{[(2n+1)^2 + (1-2\beta)^2 s^{2/(1-2\beta)}]^{1+\beta}} - \frac{x^{2\beta-1}(2n-1)}{[(2n+1)^2 + (1-2\beta)^2 s^{2/(1-2\beta)}]^{1+\beta}} - \right.$$

$$- \int_0^x \frac{(1-2\beta)^2 s^{2/(1-2\beta)} - (1-2\beta)(2n+1-t)^2}{(x-t)^{1-2\beta}[(2n+1-t)^2 + (1-2\beta)^2 s^{2/(1-2\beta)}]^{2+\beta}}\,dt -$$

$$\left. - \int_0^x \frac{(1-2\beta)^2 s^{2/(1-2\beta)} - (1+2\beta)(2n-1+t)^2}{(x-t)^{1-2\beta}[(2n-1+t)^2 + (1-2\beta)^2 s^{2/(1-2\beta)}]^{2+\beta}}\,dt\right\},$$

$$K(x,t) = \int_0^x (x-t)^{2\beta-1}\Psi'_x(x,t)\,dt.$$

Используя известные преобразования [4], уравнение (23) можно привести к интегральному уравнению Фредгольма второго рода, разрешимость которого следует из единственности решения задачи Дирихле. Зная $\nu(x)$, определим $u(x,y)$ соответственно в областях D^+ и D^-.

Литература

1. *Лебедев Н. Н.* Специальные функции и их приложения. М., 1963.
2. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. М., 1974. Т. 2.
3. *Хачев М. М.* Задача Дирихле для одного класса уравнений смешанного типа в прямоугольной и цилиндрической областях: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Нальчик, 1976.
4. *Смирнов М. М.* Уравнения смешанного типа. М., 1970.

Институт прикладной математики и автоматизации РАН, г. Нальчик

Поступила в редакцию 5 апреля 1999 г.