V. I. Chernousov, L. M. Timoshenko, On the group of R-equivalence classes of semisimple groups over arithmetic fields,
Algebra i Analiz, 1999, Volume 11, Issue 6, 191–221

Алгебра и анализ
Том 11 (1999), вып. 6

О ГРУППЕ КЛАССОВ R-ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ПОЛУПРОСТЫХ ГРУПП НАД АРИФМЕТИЧЕСКИМИ ПОЛЯМИ

© В. И. Черноусов, Л. М. Тимошенко

В работе исследуется группа классов R-эквивалентности полупростых групп, определенных над полями алгебраических чисел и p-адическими полями. В первой части доказывается ее тривиальность для всех изотропных групп типа E_6 и анизотропных триалитарных групп типа ${}^{3,6}D_4$ над полями алгебраических чисел. Во второй половине устанавливается свойство рациональности многообразия произвольной полупростой группы над p-адическим полем, не содержащей простых компонент типов A_n, ${}^2D_n$.

§1. Введение

Пусть G — полупростая алгебраическая группа, определенная либо над неархимедовым локально-компактным полем характеристики нуль, т. е. над конечным расширением поля p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$, либо над полем алгебраических чисел F. В качестве одного из применений своего норменного принципа [1] Ф. Жилль в работах [2, 3] получил следующее изящное описание группы классов R-эквивалентности $G(F)/R$ (см. §2). Рассмотрим односвязное накрытие группы G

$$1 \longrightarrow \mu \longrightarrow \widetilde{G} \longrightarrow G \longrightarrow 1 \tag{1.1}$$

и вялую резольвенту модуля μ

$$1 \longrightarrow \mu \longrightarrow E \longrightarrow P \longrightarrow 1. \tag{1.2}$$

Тогда, если F — локальное поле, то

$$G(F)/R \simeq \mathrm{H}^1(F, E). \tag{1.3}$$

Если же F — поле алгебраических чисел, то последовательности (1.1), (1.2) индуцируют точную последовательность

$$\widetilde{G}(F)/R \longrightarrow G(F)/R \longrightarrow \mathrm{H}^1(F, E) \longrightarrow 1. \tag{1.4}$$

Ключевые слова: полупростая алгебраическая группа, R-эквивалентность, рациональное многообразие.

Из последовательности (1.4) следует, что, для того чтобы в случае поля алгебраических чисел F получить столь же красивую и законченную формулу для описания группы $G(F)/R$, необходимо установить, что для произвольной абсолютно простой односвязной F-группы $\widetilde{H}$ выполняется равенство $\widetilde{H}(F)/R = 1$.

Если группа $\widetilde{H}$ изотропна над F, то, согласно гипотезе Кнезера—Титса, группа F-точек $\widetilde{H}(F)$ совпадает со своей подгруппой, порожденной унипотентными элементами, в частности, $\widetilde{H}(F)/R = 1$. В настоящее время известно [4], что гипотеза Кнезера—Титса справедлива для всех $\widetilde{H}$, за исключением, возможно, групп F-ранга 1 типа E_6. В §2 показывается, что для оставшихся групп равенство $\widetilde{H}(F)/R = 1$ моментально следует из результатов работы [5] и точной последовательности (1.4).

Рассмотрим сейчас анизотропный случай. Если $\widetilde{H}$ имеет тип A_n, то равенство $\widetilde{H}(F)/R = 1$ опять является тривиальным следствием результатов работы [5] (внешний тип) и теоремы Воскресенского (внутренний тип; см. дополнение в [6]).

Для анизотропных групп всех остальных типов гипотеза Маргулиса—Платонова [4] утверждает, что группа F-точек $\widetilde{H}(F)$ является проективно простой, т. е. не содержит нецентральных нормальных делителей, и, следовательно, всегда справедливо равенство $\widetilde{H}(F)/R = 1$.

В настоящее время гипотеза Маргулиса—Платонова доказана для всех групп, за исключением групп типов ${}^2A_n$, ${}^{3,6}D_4$, E_6 [4, 7–9]. В первой половине работы мы устанавливаем тривиальность группы классов R-эквивалентности для группы $\widetilde{H}$ типа ${}^{3,6}D_4$.

Таким образом, суммируя, получаем, что для произвольной полупростой алгебраической группы G, определенной над полем алгебраических чисел F, естественное отображение $G(F)/R \to \mathrm{H}^1(F, E)$ является изоморфизмом, если для произвольной односвязной F-анизотропной группы $\widetilde{H}$ типа E_6 справедливо равенство $\widetilde{H}(F)/R = 1$.

Из формулы (1.3) следует, что в случае локального поля F строение группы $G(F)/R$ зависит только от строения дискретного модуля μ. Следовательно, любые две полупростые алгебраические группы над F, у которых ядра соответствующих односвязных накрытий совпадают, имеют одну и ту же группу классов R-эквивалентности; в частности, $G(F)/R = 1$, если все абсолютно простые компоненты группы G определены над F и имеют внутренний тип.

Если дополнительно предположить, что G не содержит простых компонент типа A_n, то несложно показать, что группа классов R-эквивалентности универсально тривиальна, т. е. $G(K)/R = 1$ для произвольного расширения K/F. Во второй части статьи этот факт объясняется тем, что многообразие группы G рационально над F. В этой части наши рассуждения основаны главным образом на идеях и методах статьи [10]. Отметим, что, согласно результату Меркурьева [11], свойство универсальной R-тривиальности не переносится на группы, содержащие простые компоненты типа A_n.

Заметим также, что в общем случае до сих пор не известно, вытекает ли из универсальной тривиальности группы классов R-эквивалентности свойство F-рациональности или хотя бы свойство быть прямым сомножителем стабильно

F-рациональной группы. Как показано в [12], это всегда так для алгебраических торов.

В работе используются следующие обозначения и соглашения.

Если G — полупростая алгебраическая группа над полем F, то через $\widetilde{G}$ всюду обозначается соответствующая односвязная накрывающая, а через μ — ее фундаментальная группа. Централизатор $C_G(S)$ максимального F-разложимого тора S называется анизотропным ядром группы G, а его коммутант $C_G(S)^{(1)} = [C_G(S), C_G(S)]$ — полупростым анизотропным ядром.

$G_{m,F}$ обозначает 1-мерный F-разложимый тор.

Через μ_n обозначается модуль корней из 1 степени n, а через ξ_n — первообразный корень из 1 степени n.

Для конечного сепарабельного расширения L/F символ $\mathrm{R}_{L/F}$ означает функтор Вейля ограничения поля.

$\mathrm{Br}(F)$ — группа Брауэра поля F. Под алгеброй над F мы понимаем простую ассоциативную конечномерную центральную над F алгебру. Если A — алгебра над F, то через A^{op} обозначается противоположная алгебра, а через $\mathrm{SL}(1, A)$ — множество элементов в A^* с приведенной нормой 1. Группа $\mathrm{SL}(1, A)$ является группой F-точек соответствующей односвязной абсолютно простой алгебраической F-группы $\mathrm{SL}(1, A)$.

$\mathbb{A}^n_F$ — n-мерное аффинное пространство над полем F. Связная F-определенная алгебраическая группа называется F-рациональной, если многообразие G рационально над F, т.е. G бирационально-изоморфно над F аффинному пространству $\mathbb{A}^n_F$. Мы называем группу G стабильно F-рациональной, если многообразие $G \times \mathbb{A}^n_F$ рационально над F для некоторого целого положительного числа n. Две алгебраические группы G_1, G_2 над F будем называть стабильно бирационально-изоморфными и обозначать $G_1 \approx G_2$, если многообразия $G_1 \times \mathbb{A}^n_F$ и $G_2 \times \mathbb{A}^m_F$ бирационально-изоморфны над F для некоторых целых положительных чисел n, m.

Говоря о точке „общего" положения алгебраического многообразия X, мы подразумеваем точку некоторого непустого открытого по Зарисскому подмножества $U \subset X$, которое всегда легко уточнить из рассуждения.

В статье предполагается, что читатель знаком с классификацией абсолютно простых алгебраических групп в терминах индексов Титса [13].

Ради краткости неархимедово локально-компактное поле характеристики 0 будем называть локальным полем. Если F — поле алгебраических чисел, то V^F_∞ или просто V_∞ означает множество всех архимедовых нормирований.

Первый автор благодарит Sonderforschungsbereich 343 и INTAS, Project 93-2618 Ext, за поддержку, а Университет Билефельда за гостеприимство.

§2. Изотропные группы типа E_6

Пусть X — алгебраическое многообразие, определенное над полем F. Напомним определение *R-эквивалентности*, введенное Маниным в [14]. Две точки $x, y \in X(F)$ называются строго R-эквивалентными, если существует рациональное отображение $\phi : \mathbb{A}^1_F \to X$ над F, определенное в точках 0, 1, и такое, что

$\phi(0) = x$, $\phi(1) = y$. Точки $x, y \in X(F)$ называются R-эквивалентными, если существует конечная последовательность $x = x_1, x_2, \ldots, x_n = y$ точек в $X(F)$ такая, что все соседние точки x_i, x_{i+1} строго R-эквивалентны.

Очевидно, что отношение R-эквивалентности является отношением эквивалентности, и поэтому множество $X(F)$ разбивается на непересекающиеся классы R-эквивалентных точек. Множество классов R-эквивалентности обычно обозначается через $X(F)/R$.

Если G — F-определенная связная алгебраическая группа, то элемент $g \in G(F)$ называется R-тривиальным, если он R-эквивалентен 1. Множество всех R-тривиальных элементов будем обозначать через $RG(F)$.

Лемма 2.1. *$RG(F)$ является нормальной подгруппой в $G(F)$.*

Доказательство очевидно. •

Групповая структура в $G(F)$ индуцирует групповую структуру на множестве классов R-эквивалентности $G(F)/R$. Множество классов $G(F)/R$ вместе с естественной групповой операцией называется группой классов R-эквивалентности.

Лемма 2.2. *Имеет место естественный изоморфизм*

$$G(F)/RG(F) \simeq G(F)/R.$$

Доказательство вытекает из определений. •

Произвольный F-определенный гомоморфизм $\phi : G \to H$ индуцирует гомоморфизм $G(F) \to H(F)$, переводящий $RG(F)$ в $RH(F)$. Поэтому определен гомоморфизм групп $\phi/R : G(F)/R \to H(F)/R$.

Лемма 2.3. 1) *Если G_1, G_2 — F-определенные связные алгебраические группы, то*

$$(G_1 \times G_2)(F)/R \simeq G_1(F)/R \times G_2(F)/R.$$

2) *Если L/F — конечное сепарабельное расширение и G — L-определенная связная алгебраическая группа, то*

$$\mathrm{R}_{L/F}(G)(F)/R \simeq G(L)/R.$$

Доказательство вытекает непосредственно из определений. •

Предложение 2.4 [12, предложение 11]. *Пусть F — бесконечное поле и G — F-определенная связная алгебраическая группа. Тогда для произвольного непустого открытого F-определенного множества $U \subset G$ естественное отображение*

$$U(F)/R \longrightarrow G(F)/R$$

является биекцией.

Следствие 2.5. *Если группа G рациональна над F, то $G(F)/R = 1$.*

Следствие 2.6. *Если группы G_1, G_2 бирационально-изоморфны над F, то существует биекция*

$$G_1(F)/R \simeq G_2(F)/R.$$

В частности, $G_1(F)/R = 1$ тогда и только тогда, когда $G_2(F)/R = 1$.

Следствие 2.7. *Если группы G_1, G_2 стабильно бирационально-изоморфны над F, то существует биекция*

$$G_1(F)/R \simeq G_2(F)/R.$$

Приведенные выше утверждения позволяют редуцировать описание группы классов R-эквивалентности произвольных связных редуктивных групп к анизотропным редуктивным группам. А именно, пусть G — F-определенная связная редуктивная группа. Обозначим через S максимальный F-разложимый тор в G. Из разложения Брюа—Титса следует, что имеется бирациональный F-изоморфизм

$$G \simeq U \times C_G(S) \times U,$$

где U — унипотентный радикал минимальной параболической F-подгруппы P, содержащей тор S. Поскольку многообразие U рационально над F, то из следствий 2.5, 2.6 и леммы 2.3 следует, что

$$G(F)/R \simeq C_G(S)(F)/R.$$

В свою очередь расслоение $C_G(S) \to C_G(S)/S$ локально-тривиально, так как S — F-разложимый тор, и поэтому

$$G \approx C_G(S) \approx C_G(S)/S,$$

так что в силу следствия 2.7 получаем

$$G(F)/R \simeq [C_G(S)/S](F)/R. \tag{2.1}$$

Для абсолютно простых односвязных групп типа A_n описание группы классов R-эквивалентности приводится в следующих двух теоремах.

Теорема 2.8 (см. дополнение в кн. [6]). *Пусть A — алгебра над произвольным полем F. Тогда $R\,\mathrm{SL}(1, A) = [A^*, A^*]$ и, следовательно,*

$$\mathrm{SL}(1, A)/R \simeq \mathrm{SL}(1, A)/[A^*, A^*].$$

Отметим, что фактор-группа $\mathrm{SL}(1, A)/[A^*, A^*]$ известна как приведенная группа Уайтхеда и обозначается через $\mathrm{SK}_1(A)$. Хорошо известно, что над локальными и глобальными полями $\mathrm{SK}_1(A) = 1$, и поэтому из теоремы 2.8 непосредственно вытекает

Следствие 2.9. *Если G — односвязная внутренняя форма типа A_n, определенная либо над локальным, либо над глобальным полем F, то $G(F)/R = 1$.*

Перейдем к вычислению группы классов R-эквивалентности внешних форм типа A_n. Пусть L/F — квадратичное сепарабельное расширение и A — алгебра над L с инволюцией σ второго рода. Обозначим через Σ' множество элементов в A, приведенная норма которых лежит в F, а через Σ — подгруппу в Σ', порожденную σ-инвариантными элементами в A.

Теорема 2.10 [5]. *Пусть $G = \mathrm{SU}(A,\sigma)$. Тогда*

$$G(F)/R \simeq \Sigma'/\Sigma.$$

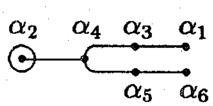
Фактор-группа Σ'/Σ известна как приведенная унитарная группа Уайтхеда и обозначается через $\mathrm{SUK}_1(A,\sigma)$. Хорошо известно, что группа $\mathrm{SUK}_1(A,\sigma)$ тривиальна над локальными и глобальными полями, а также над произвольным полем, если индекс алгебры A свободен от квадратов. Поэтому из теоремы 2.10 вытекает

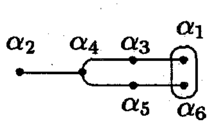
Следствие 2.11. 1) *Если F — либо локальное, либо глобальное поле, то* $\mathrm{SU}(A,\sigma)/R = 1$.

2) *Если F — произвольное поле и индекс алгебры A свободен от квадратов, то* $\mathrm{SU}(A,\sigma)/R = 1$.

Теорема 2.12. *Пусть F — поле алгебраических чисел и G — односвязная (абсолютно) простая F-определенная алгебраическая группа типа E_6 и F-ранга 1. Тогда $G(F)/R = 1$.*

Доказательство. Согласно классификации Титса [13], для F-индекса Титса группы G имеются две возможности:

а) 

б) 

Обозначим через S максимальный F-разложимый тор в G, и пусть T — произвольный F-определенный тор, содержащий S. Положим $\Sigma = \Sigma(G,T)$ — система корней группы G относительно тора T и $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_6\} \subset \Sigma$ — произвольный базис. Далее, в статье мы будем использовать без пояснений стандартные обозначения $x_\alpha(u)$, $h_\alpha(t)$, w_α, где $\alpha \in \Sigma$, а u, t — параметры, из кн. [15], а также соотношения между ними, указанные на с. 32. Если $X \subseteq \Sigma$, то через G_X будем обозначать подгруппу, порожденную корневыми подгруппами $x_{\pm\alpha}(u)$ для всех корней $\alpha \in X$.

Рассмотрим вначале случай диаграммы а). Из (2.1) следует, что достаточно доказать, что

$$[C_G(S)/S](F)/R = 1$$

или же, что эквивалентно, $H(F)/R = 1$, где

$$H = C_G(S)^{(1)}/C_G(S)^{(1)} \cap S.$$

Из диаграммы а) следует, что группа $\widetilde{H} = C_G(S)^{(1)}$ односвязна, имеет тип ${}^2A_5$ и порождается корневыми подгруппами $x_{\pm\alpha_1}(\ ), x_{\pm\alpha_3}(\ ), \ldots, x_{\pm\alpha_6}(\ )$. Согласно [13], тор S является связной компонентой решения системы

$$\begin{cases} \alpha_1(t) = 1, \\ \alpha_3(t) = 1, \\ \quad\vdots \\ \alpha_6(t) = 1, \end{cases}$$

где $t \in T$. Несложные вычисления показывают, что

$$S = \langle h_{\alpha_1}(t)h_{\alpha_3}(t^2)h_{\alpha_4}(t^3)h_{\alpha_5}(t^2)h_{\alpha_6}(t)h_{\alpha_2}(t^2) \mid t \in \overline{F}^*\rangle,$$

откуда $C_G(S)^{(1)} \cap S = \mu_2$.

Итак, нами установлено, что группа H входит в точную последовательность

$$1 \longrightarrow \mu \longrightarrow \widetilde{H} \longrightarrow H \longrightarrow 1,$$

где $\mu = \mu_2$. Напомним [12], что *вялой резольвентой* модуля μ называется последовательность (1.2), в которой P — пермутационный F-тор, а E — F-тор, решетка кохарактеров $E_* = \mathrm{Hom}(G_m, E)$ которого является ковялой, т.е. $\mathrm{H}^1(\Gamma, E_*) = 1$ для произвольной открытой подгруппы $\Gamma \leq \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$.

В нашем случае $\mu = \mu_2$, так что вялая резольвента имеет вид

$$1 \longrightarrow \mu \longrightarrow G_{m,F} \xrightarrow{\phi} G_{m,F} \longrightarrow 1,$$

где ϕ — возведение в квадрат. Отсюда следует, что $E \simeq G_{m,F}$, и, следовательно, согласно (1.4) и с учетом следствия 2.11, окончательно получаем

$$H(F)/R = \mathrm{H}^1(F, E) = \mathrm{H}^1(F, G_{m,F}) = 1.$$

Рассмотрим теперь диаграмму б). В отличие от предыдущего случая центр Z анизотропного ядра $C_G(S)$ не совпадает с S, ибо имеет размерность два.

Опишем вначале строение тора Z. Ясно, что для Z имеются лишь две возможности: либо $Z = \mathrm{R}_{L/F}(G_{m,L})$, где L/F — квадратичное расширение, над которым группа G имеет внутренний тип, либо $Z = G_{m,F} \times \mathrm{R}^{(1)}_{L/F}(G_{m,L})$. В первом случае модуль $Z_2 \leq Z$ элементов порядка 2 имеет вид $Z_2 = \mathrm{R}_{L/F}(\mu_2)$, а во втором случае — $Z_2 = \mu_2 \times \mu_2$.

Из диаграммы б) следует, что Z является связной компонентой решения следующей системы:

$$\begin{cases} \alpha_2(t) = 1, \\ \quad\vdots \\ \alpha_5(t) = 1, \end{cases}$$

где $t \in T$. Решая эту систему, получаем

$$Z = \langle h_{\alpha_2}(t)h_{\alpha_4}(t^2)h_{\alpha_3}(u)h_{\alpha_1}(u^2/t^2)h_{\alpha_5}(t^3/u)h_{\alpha_6}(t^4/u^2) \mid t, u \in \overline{F}^*\rangle,$$

откуда

$$Z_2 = \langle h_{\alpha_2}(-1)h_{\alpha_5}(-1),\ h_{\alpha_2}(-1)h_{\alpha_3}(-1)\rangle,$$

и, следовательно, $Z_2 \simeq \mathrm{R}_{L/F}(\mu_2)$, ибо группа Галуа действует нетривиально на вершины графа Дынкина, соответствующие корням α_3 и α_5.

Таким образом, мы доказали, что $Z = \mathrm{R}_{L/F}(G_{m,L})$ и, в частности, $\mathrm{H}^1(K, Z) = 1$ для любого расширения K/F. Для завершения вычисления группы $G(F)/R$ нам понадобятся следующие два утверждения.

Лемма 2.13. *Пусть F — произвольное поле и G_1 — связная алгебраическая группа над F. Если G_2 — связная F-подгруппа группы G_1 такая, что для любого расширения K/F ядро естественного морфизма $\mathrm{H}^1(K, G_2) \to \mathrm{H}^1(K, G_1)$ тривиально, то многообразие G_1 бирационально-изоморфно над F произведению $G_2 \times (G_1/G_2)$.*

Доказательство леммы непосредственно следует из сюръективности морфизма $G_1(E) \to (G_1/G_2)(E)$, где E — поле, порожденное координатами общей точки ω над F многообразия G_1/G_2. •

Предложение 2.14. *Пусть G — присоединенная группа типа ${}^{1,2}D_4$, определенная над глобальным полем F. Тогда $G(F)/R = 1$.*

Доказательство непосредственно вытекает из последовательности Жилля (1.4). А именно, известно [4], что группа F-точек односвязной накрывающей $\widetilde{G}$ проективно проста и, следовательно, $\widetilde{G}(F)/R = 1$. Кроме того, центр группы $\widetilde{G}$ равен либо $\mu_2 \times \mu_2$ (внутренний тип), либо $\mathrm{R}_{L/F}(\mu_2)$ (внешний тип), и легко проверить, что в обоих случаях тор E из вялой резольвенты для центра группы $\widetilde{G}$ имеет тривиальные 1-мерные когомологии Галуа. •

Теперь легко завершить доказательство теоремы 2.12. Действительно, в силу леммы 2.13 имеем

$$C_G(S) \simeq Z \times C_G(S)/Z,$$

откуда

$$C_G(S)/R \simeq [C_G(S)/Z](F)/R.$$

Но $C_G(S)/Z$ — присоединенная группа типа ${}^2D_4$, ибо

$$C_G(S)/Z \simeq C_G(S)^{(1)}/C_G(S) \cap Z,$$

и $|C_G(S) \cap Z| = 4$. Следовательно, согласно предложению 2.14, имеем

$$[C_G(S)/Z](F)/R = 1.$$

Теорема 2.12 доказана полностью. •

Замечание 2.15. В [10] доказано, что многообразие произвольной простой группы G типа E_6, определенной над произвольным полем F и F-ранга ≥ 2, рационально над F; в частности $G(F)/R = 1$.

Замечание 2.16. В препринте [16, теорема 4.12] Нгуэн Танг вычислил группу классов R-эквивалентности редуктивной алгебраической группы G, определенной над локальным или глобальным полем F, без использования (как он утверждает) результатов Жилля [1–3] и, в частности, также доказал тривиальность $G(F)/R$ для изотропной группы G типа E_6. К сожалению, в препринте имеет место грубая ошибка. В начале §4 Нгуэн Танг отождествил две R-структуры на группе $\mathrm{H}^1(F, \mu)$, где μ — ядро соответствующего односвязного накрытия $\widetilde{G} \to G$, одна из которых естественная, а другая индуцируется морфизмом $G(F) \to \mathrm{H}^1(F, \mu)$. В этом месте он не вполне ясно представлял себе, что в случае произвольного поля F эти две структуры различны и что указанные выше основные результаты Ф. Жилля утверждают в точности то, что они совпадают в случае глобального и локального полей. Если предположить верность этого ключевого факта, то доказывать нечего, и все другие результаты [16], относящиеся к свойству R-эквивалентности, являются его тривиальными следствиями.

В заключение параграфа докажем два утверждения, которые понадобятся во второй половине статьи.

Пусть A — алгебра над произвольным полем F простой степени p и пусть G — полупростая алгебраическая F-группа, односвязная накрывающая $\widetilde{G}$ которой имеет вид

$$\widetilde{G} = \mathrm{SL}(1, A_1) \times \cdots \times \mathrm{SL}(1, A_s),$$

где $A_1, \ldots, A_s$ — алгебры над F, совпадающие либо с A, либо с A^{op}. Положим $\mu = \operatorname{Ker}\phi$, где $\phi : \widetilde{G} \to G$ — односвязное накрытие, и пусть $\widetilde{H} = \mathrm{SL}(1, A_1) \times 1 \times \cdots \times 1$ и $H = \phi(\widetilde{H})$.

Предложение 2.17. *Многообразие группы G бирационально-изоморфно над F произведению $H \times G/H$; в частности G рационально над F, если $p = 2, 3$.*

Доказательство. Если число сомножителей s группы $\widetilde{G}$ равно 1, то утверждение очевидно, ибо H совпадает с G. В случае произвольного s рассмотрим ограничение

$$\phi|_{\widetilde{H}} : \widetilde{H} \longrightarrow G.$$

Поскольку p — простое число, то либо центр $Z_1 = \mu_p$ группы $\widetilde{H}$ лежит в μ, либо $\phi|_{\widetilde{H}}$ — инъективный морфизм.

В первом случае группа H выделяется в G прямым сомножителем, и доказывать нечего. Пусть $Z_1 \cap \mu = 1$. В силу леммы 2.13 достаточно проверить, что для любого расширения K/F справедливо равенство

$$\mathrm{Ker}[\tau : \mathrm{H}^1(K, H) \longrightarrow \mathrm{H}^1(K, G)] = 1.$$

Рассмотрим произвольный элемент $\lambda \in \mathrm{Ker}\,\tau$. Так как ограничение $\phi|_{\widetilde{H}}$ инъективно, то найдется единственный $\lambda' \in \mathrm{H}^1(K, \widetilde{H})$ такой, что $\lambda = \theta(\lambda')$, где θ — естественная биекция

$$\theta : \mathrm{H}^1(K, \widetilde{H}) \longrightarrow \mathrm{H}^1(K, H).$$

По построению элемент $\theta(\lambda')$ тривиален в $\mathrm{H}^1(K, G)$. Поэтому

$$\lambda' \in \mathrm{Im}[\mathrm{H}^1(K, \mu) \longrightarrow \mathrm{H}^1(K, \mathbf{SL}(1, A_1) \times \cdots \times \mathbf{SL}(1, A_s))]. \tag{2.2}$$

Представим μ в виде прямого произведения подмодулей $\mu = \nu_1 \times \cdots \times \nu_t$, каждый из которых изоморфен μ_p. Без ограничения общности можно считать, что сомножители ν_i порождаются элементами вида

$$a_i = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{n_i - 1}, \xi_p^{m_{n_i,i}}, \ldots, \xi_p^{m_{s,i}}),$$

где $m_{n_i,i}, \ldots, m_{s,i}$ — некоторые целые положительные числа, причем $m_{n_i,i} \not\equiv 0 \pmod p$ для всех $i = 1, \ldots, t$ и выполняются неравенства

$$n_1 = 1 < n_2 < \ldots < n_t. \tag{2.3}$$

Отождествим $\mathrm{H}^1(K, \mathbf{SL}(1, A_i))$, $\mathrm{H}^1(K, \nu_i)$ соответственно с $K^*/\mathrm{Nrd}(A_K)$, $K^*/(K^*)^p$, где $A_K = A \otimes_F K$. Тогда, с одной стороны,

$$\lambda' = (a \cdot \mathrm{Nrd}(A_K), 1, \ldots, 1)$$

для некоторого $a \in K^*$, а с другой стороны, условие (2.2) означает, что найдутся элементы $b_1, \ldots, b_t \in K^*$ такие, что

$$\lambda' = \prod_{i=1}^{t} (1, \ldots, 1, b_i^{m_{n_i,i}} \mathrm{Nrd}(A_K), \ldots, b_i^{m_{s,i}} \mathrm{Nrd}(A_K)). \tag{2.4}$$

Переходя при необходимости к другому разложению группы μ в виде прямого произведения модулей μ_p, дополнительно можно предполагать, что у элемента a_1 все компоненты с номерами $n_2, \ldots, n_t$ тривиальны. Тогда из условия (2.4) с учетом (2.3) выводим, что

$$1 \cdot \mathrm{Nrd}(A_K) = b_2^{m_{n_2,2}} \cdot \mathrm{Nrd}(A_K),$$
$$1 \cdot \mathrm{Nrd}(A_K) = b_2^{m_{n_3,2}} b_3^{m_{n_3,3}} \cdot \mathrm{Nrd}(A_K),$$
$$\vdots$$
$$1 \cdot \mathrm{Nrd}(A_K) = b_2^{m_{n_t,2}} \dots b_t^{m_{n_t,t}} \cdot \mathrm{Nrd}(A_K).$$

Из этих равенств следует, что $b_2, ..., b_t \in \mathrm{Nrd}(A_K)$, ибо по предположению $m_{n_2,2} \dots m_{n_t,t} \not\equiv 0 \pmod p$. Поэтому условие (2.4) переписывается в виде

$$(a\,\mathrm{Nrd}(A_K), 1, \dots, 1) = (b_1^{m_{n_1,1}}\,\mathrm{Nrd}(A_K), \dots, b_1^{m_{s,1}}\,\mathrm{Nrd}(A_K)).$$

Так как $Z_1 \cap \mu = 1$, то по крайней мере один из показателей степеней $m_{2,1}, \dots, m_{s,1}$ не делится на p, откуда $b_1 \in \mathrm{Nrd}(A_K)$, и тем самым $a \in \mathrm{Nrd}(A_K)$, т.е. $\lambda' = \lambda = 1$.

Очевидное индуктивное рассуждение показывает, что многообразие группы G бирационально-изоморфно над F произведению многообразий простых F-групп, каждая из которых изоморфна над F либо $\mathbf{SL}(1, A)$, $\mathbf{SL}(1, A^{\mathrm{op}})$, либо $\mathbf{PSL}(1, A)$, $\mathbf{PSL}(1, A^{\mathrm{op}})$. Отсюда следует, что при дополнительном условии $p = 2, 3$ многообразие G рационально над F, ибо, с одной стороны, по теореме Шевалле–Гротендика [17, 18] поле рациональных функций на произвольной связной группе G сводится к полю функций общего тора группы G, а с другой стороны, по теореме Воскресенского [6] все торы размерности не выше 2 рациональны над своими полями определения. Предложение 2.17 доказано. •

Пусть D — тело кватернионов над F, h — косоэрмитова форма над D относительно стандартной инволюции и $\widetilde{G} = \mathrm{SU}(D, h) \times \dots \times \mathrm{SU}(D, h)$. Рассмотрим произвольную F-определенную подгруппу $\mu \leq \widetilde{G}$ и канонический гомоморфизм $\phi : \widetilde{G} \to G = \widetilde{G}/\mu$. Наконец, пусть

$$\widetilde{H} = \mathrm{SU}(D, h) \times 1 \times \dots \times 1$$

и $H = \phi(\widetilde{H})$.

Предложение 2.18. *Многообразие группы G бирационально-изоморфно над F произведению $H \times G/H$.*

Доказательство осуществляется аналогично предыдущему. •

§3. Группы типа ${}^{3,6}D_4$

Теорема 3.1. *Пусть F — поле алгебраических чисел и G — односвязная (абсолютно) простая алгебраическая группа над F типа ${}^{3,6}D_4$. Тогда $G(F)/R = 1$.*

Доказательство. Многообразие любой изотропной группы типа ${}^{3,6}D_4$, определенной над произвольным полем F характеристики, не равной 2, рационально над F [10, предложение 12], и, в частности, ее группа классов R-эквивалентности всегда тривиальна. Поэтому без ограничения общности всюду ниже мы можем предполагать, что G — F-анизотропная группа.

Пусть L/F — минимальное расширение Галуа, над которым G становится группой внутреннего типа, и пусть $\Gamma = \mathrm{Gal}(L/F)$. Напомним, что если G — группа типа ${}^3D_4$, то $[L:F] = 3$ и $\Gamma = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$; в противном случае $[L:F] = 6$ и $\Gamma \simeq S_3$. Несложное рассуждение с использованием принципа Хассе для когомологий Галуа показывает, что существует квадратичное расширение K/F, квазирасщепляющее группу G, причем поле K всегда можно выбрать таким образом, чтобы $K \not\subseteq L$ (см., например, доказательство предложения 6.15 в [4]).

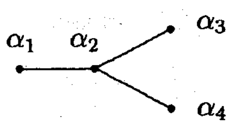
Введем также следующие обозначения: τ — нетривиальный автоморфизм K/F; $\sigma \in \Gamma$ — произвольный элемент порядка 3. Зафиксируем произвольное подполе $P \subseteq L$ степени 3 над F. Ясно, что если $[L:F] = 3$, то P совпадает с L. Если же $[L:F] = 6$, то пусть λ — нетривиальный автоморфизм L/P. Очевидно, что в этом случае $\lambda\sigma\lambda^{-1} = \sigma^2$.

Так как поля K и L линейно разделены над F, то автоморфизмы $\sigma, \lambda \in \mathrm{Gal}(L/F)$ и $\tau \in \mathrm{Gal}(K/F)$ естественным образом продолжаются до автоморфизмов расширения E/F, где $E = K \cdot L$. Чтобы не усложнять обозначений, мы будем обозначать эти продолжения теми же буквами σ, λ, τ.

По построению группа G обладает K-определенной подгруппой Бореля B. В силу F-анизотропности группы G пересечение $T = B \cap \tau(B)$ является F-определенным максимальным тором в G разложимым над E. Пусть $\Sigma = \Sigma(T, G)$ — система корней группы G относительно тора T и пусть $\Pi \subset \Sigma$ — базис, соответствующий подгруппе B.

В основе доказательства теоремы будет лежать критерий F-определенности элемента $g \in G(E)$ в „общем“ положении. Для его формулировки нам понадобится следующая параметризация E-точек группы Шевалле $G(E)$.

Пусть $W = W(T, G)$ — группа Вейля. Хорошо известно, что отражения w_α относительно простых корней $\alpha \in \Pi$ порождают всю группу W. Рассмотрим элемент $w_0 \in W$, имеющий максимальную длину относительно множества образующих $S = \langle w_\alpha \mid \alpha \in \Pi\rangle$. Известно [19, гл. 6, §1, п. 6], что такой элемент единствен и характеризуется тем свойством, что переводит положительные корни в отрицательные, причем длина его приведенного разложения $w_0 = w_{\alpha_1} \dots w_{\alpha_{i_r}}$ $(\alpha_{i_j} \in \Pi)$ совпадает с числом положительных корней. Занумеруем элементы базиса $\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ таким образом, чтобы граф Дынкина имел вид



(3.1)

Лемма 3.2. *В приведенных выше обозначениях имеет место разложение*

$$w_0 = (w_{\alpha_2} w_{\alpha_1} w_{\alpha_3} w_{\alpha_4})(w_{\alpha_2} w_{\alpha_1} w_{\alpha_3} w_{\alpha_4})(w_{\alpha_2} w_{\alpha_1} w_{\alpha_3} w_{\alpha_4}). \tag{3.2}$$

Доказательство. Простые вычисления показывают, что элемент ν группы Вейля W, стоящий в правой части равенства (3.2), переводит корни α_i в $-\alpha_i$,

$i = 1, \ldots, 4$. Тогда очевидно $\nu(\Sigma^+) = \Sigma^-$, где Σ^+ (соответственно Σ^-) — положительные (соответственно отрицательные) корни относительно Π, и тем самым в силу единственности ν обязан совпадать с w_0. •

Введем следующие обозначения: $\beta_1 = \alpha_2, \beta_2 = \alpha_1, \beta_3 = \alpha_3, \beta_4 = \alpha_4$ и далее рекуррентно положим $\beta_{i+4} = \beta_i$. Приведенному разложению (3.2) соответствует морфизм произведения $\phi : \mathbb{A}^{24} \times (G_{m,E})^4 \to G$, переводящий

$$(u_1, \ldots, u_{12}, v_1, \ldots, v_{12}, t_1, \ldots, t_4) \longrightarrow \prod_{i=1}^{4} h_{\alpha_i}(t_i) \prod_{i=1}^{12} x_{-\beta_i}(u_i) x_{\beta_i}(v_i). \tag{3.3}$$

Предложение 3.3. *Морфизм ϕ является бирациональным E-изоморфизмом.*

Доказательство. См. [4, гл. 9, §4, лемма 20]. •

Опишем теперь действие группы $\mathrm{Gal}(E/F)$ на элементы $G(E)$. Предварительно напомним, как устроены квазиразложимые группы типа ${}^{3,6}D_4$ над произвольным полем K. Пусть G_0 — K-разложимая группа типа D_4, T_0 — максимальный K-разложимый тор в G_0 и $\langle x_\alpha(u) \rangle$, $\alpha \in \Sigma$, — соответствующие корневые подгруппы в G_0. Рассмотрим группу алгебраических автоморфизмов $\mathrm{Aut}\, G_0$ и канонический гомоморфизм $\chi : \mathrm{Aut}\, G_0 \to \mathrm{Aut}\, \Delta$, где Δ — граф Дынкина (3.1).

Согласно [15, §10, с. 147], любой автоморфизм $\eta \in \mathrm{Aut}\, \Delta$, т.е. любая перестановка вершин $\{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4\}$ графа Δ, поднимается до автоморфизма η_{G_0} группы G_0 такого, что

$$\eta_{G_0}(x_{\pm\alpha_i}(u)) = x_{\pm\eta(\alpha_i)}(u), \ i = 1, \ldots, 4. \tag{3.4}$$

Отсюда следует, что гомоморфизм χ сюръективен и что χ обладает сечением, ибо группа $\mathrm{Aut}\, G_0$ является полупрямым произведением подгруппы внутренних автоморфизмов $\overline{G_0}$ и подгруппы, порожденной автоморфизмами (3.4) (которая по очевидным причинам изоморфна $\mathrm{Aut}\, \Delta$). Чтобы не вводить дополнительных обозначений, мы будем обозначать тем же символом $\mathrm{Aut}\, \Delta$ подгруппу $\langle \eta_{G_0} \mid \eta \in S_3 = \mathrm{Aut}\, \Delta \rangle$.

Хорошо известно, что в этих обозначениях все K-квазиразложимые группы G типа ${}^{3,6}D_4$ получаются при помощи процедуры скручивания группы G_0 коциклами $\xi \in Z^1(K, \mathrm{Aut}\, \Delta)$. Из формулы (3.4) легко выводится, что $\mathrm{Gal}(K_s/K)$, где K_s — сепарабельное замыкание поля K, действует тривиально на элементы группы $\mathrm{Aut}\, \Delta$, так что каждый коцикл ξ есть гомоморфизм

$$\xi : \mathrm{Gal}(K_s/K) \longrightarrow \mathrm{Aut}\, \Delta.$$

Тогда из определения скручивания и из (3.4) непосредственно следует, что любой элемент $\nu \in \mathrm{Gal}(K_s/K)$ действует на корневые подгруппы $\langle x_{\alpha_i}(u) \rangle$ группы G по формуле

$$\nu[x_{\alpha_i}(u)] = x_{\xi(\nu)(\alpha_i)}(\nu(u)),$$

где $u \in K_s$ и $i = 1, \dots, 4$.

Возвращаясь к нашей исходной группе G, которая по построению квазиразложима над K, и к обозначениям, введенным в начале параграфа, получаем, что с точностью до нумерации вершины $\{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4\}$ графа Дынкина (3.1) всегда можно считать, что действие σ, λ на корневые подгруппы задается следующими формулами:

$$\left.\begin{aligned} &\sigma[x_{\pm\alpha_1}(u)] = x_{\pm\alpha_3}[\sigma(u)], && \sigma[x_{\pm\alpha_3}(u)] = x_{\pm\alpha_4}[\sigma(u)],\\ &\sigma[x_{\pm\alpha_4}(u)] = x_{\pm\alpha_1}[\sigma(u)], && \sigma[x_{\pm\alpha_2}(u)] = x_{\pm\alpha_2}[\sigma(u)],\\ &\lambda[x_{\pm\alpha_1}(u)] = x_{\pm\alpha_1}[\lambda(u)], && \lambda[x_{\pm\alpha_2}(u)] = x_{\pm\alpha_2}[\lambda(u)],\\ &\lambda[x_{\pm\alpha_3}(u)] = x_{\pm\alpha_4}[\lambda(u)], && \lambda[x_{\pm\alpha_4}(u)] = x_{\pm\alpha_3}[\lambda(u)]. \end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

Остается еще выяснить действие автоморфизма τ на корневые подгруппы. Так как $T = B \cap \tau(B)$, то подгруппа Бореля $\tau(B)$ соответствует отрицательным корням Σ^-, и, следовательно, τ переводит положительные корни в отрицательные. Последнее означает, что при естественном вложении $\mathrm{Gal}(E/L) \to W(T, G)$ элемент τ переходит в элемент w_0 из леммы 3.2.

Рассмотрим базис Шевалле

$$\{H_{\alpha_i},\ i = 1, \dots, 4,\ X_\alpha,\ \alpha \in \Sigma\}$$

алгебры Ли группы G. Условие $\tau(\alpha) = -\alpha$ влечет $\tau(X_\alpha) = c_\alpha X_{-\alpha}$, где $c_\alpha \in E$ — некоторая константа.

Лемма 3.4. $\tau[x_\alpha(u)] = x_{-\alpha}(c_\alpha \tau(u))$ *для всех* $u \in E$.

Доказательство следует из равенства $x_\alpha(u) = \exp(uX_\alpha)$. •

Константы $c_\alpha, \alpha \in \Sigma$, обладают следующими свойствами.

Лемма 3.5. 1) $c_\alpha \in L$ *для всех* $\alpha \in \Sigma$; *кроме того,* $c_{\alpha_1} \in P$, $c_{\alpha_2} \in F$;
2) $c_{\alpha_3} = \sigma(c_{\alpha_1})$, $c_{\alpha_4} = \sigma^2(c_{\alpha_1})$;
3) $c_{-\alpha} = c_\alpha^{-1}$ *для всех* $\alpha \in \Sigma$.

Доказательство. 1) Группа G_α, порожденная элементами $x_{\pm\alpha}(u)$, очевидно L-определена, односвязна и имеет ранг 1. Поэтому G_α изоморфна над L группе $\mathrm{SL}(1, D_\alpha)$, где D_α — алгебра кватернионов над L. Из разложимости L-группы G_α над E следует, что D_α содержит максимальное подполе E. Пусть $E = L(\sqrt{d})$ и $D_\alpha = (d, d_\alpha)$. Тогда непосредственный счет в алгебре кватернионов D_α показывает, что $c_\alpha \equiv d_\alpha \pmod{\mathrm{N}_{E/L}(E^*)}$, и в частности $c_\alpha \in L^*$.

В силу формул (3.5) группа G_{α_1} (соответственно G_{α_2}) определена над P (соответственно над F) и разложима над квадратичным расширением $P(\sqrt{d})$ (соответственно $K = F(\sqrt{d})$). Поэтому, применяя предыдущее рассуждение к группе G_{α_1} (соответственно G_{α_2}), получаем, что $c_{\alpha_1} \in P$ (соответственно $c_{\alpha_2} \in F$).

2) Из равенств

$$\tau\sigma[x_{\alpha_1}(u)] = \tau[x_{\alpha_3}(\sigma(u))] = x_{-\alpha_3}[c_{\alpha_3}\tau\sigma(u)],$$
$$\sigma\tau[x_{\alpha_1}(u)] = \sigma[x_{-\alpha_1}(c_{\alpha_1}\tau(u))] = x_{-\alpha_3}[\sigma(c_{\alpha_1})\sigma\tau(u)]$$

непосредственно следует, что $c_{\alpha_3} = \sigma(c_{\alpha_1})$, ибо $\tau\sigma = \sigma\tau$. Аналогично устанавливается, что $c_{\alpha_4} = \sigma^2(c_{\alpha_1})$.

3) Равенства

$$X_\alpha = \tau^2(X_\alpha) = \tau(c_\alpha X_{-\alpha}) = c_\alpha c_{-\alpha}(X_\alpha)$$

показывают, что $c_\alpha c_{-\alpha} = 1$. Лемма 3.5 доказана. •

Следствие 3.6. *$G_{\alpha_2} \overset{F}{\simeq} \mathrm{SL}(1, D)$, $G_{\{\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4\}} \overset{F}{\simeq} \mathrm{R}_{P/F}(\mathrm{SL}(1,T))$, где $D = (d, c_{\alpha_2})$ — алгебра кватернионов над F и $T = (d, c_{\alpha_1})$ — алгебра кватернионов над P.*

Доказательство. Утверждение непосредственно следует из формул (3.5) и лемм 3.4, 3.5. •

Лемма 3.7. $\tau(h_{\alpha_i}(t)) = h_{\alpha_i}(\tau(t)^{-1})$, $i = 1, \dots, 4$, $t \in E$.

Доказательство вытекает из того очевидного факта, что одномерные E-разложимые подгруппы $\langle h_{\alpha_i}(t) \mid t \in F_s\rangle$ тора T определены и анизотропны над L, ибо τ действует на решетке характеров тора T как -1. •

Наша следующая цель — установить критерий F-определенности элементов группы $G(E)$. Пусть $g \in G(E)$ — элемент в „общем“ положении. Предложение 3.3 показывает, что g можно записать однозначно в виде

$$g = \prod_{i=1}^{4} h_{\alpha_i}(t_i) \prod_{i=1}^{12} x_{-\beta_i}(u_i) x_{\beta_i}(v_i), \tag{3.6}$$

где $t_i, u_i, v_i \in E$. Напомним, что $\beta_1 = \alpha_2, \beta_2 = \alpha_1, \beta_3 = \alpha_3, \beta_4 = \alpha_4$ и далее $\beta_{i+4} = \beta_i$. Положим

$$g_1 = x_{-\alpha_2}(u_1)x_{\alpha_2}(v_1), \qquad g_2 = \prod_{i=2}^{4} x_{-\beta_i}(u_i)x_{\beta_i}(v_i),$$

$$g_3 = x_{-\alpha_2}(u_5)x_{\alpha_2}(v_5), \qquad g_4 = \prod_{i=6}^{8} x_{-\beta_i}(u_i)x_{\beta_i}(v_i),$$

$$g_5 = x_{-\alpha_2}(u_9)x_{\alpha_2}(v_9), \qquad g_6 = \prod_{i=10}^{12} x_{-\beta_i}(u_i)x_{\beta_i}(v_i),$$

так что

$$g = \prod_{i=1}^{4} h_{\alpha_i}(t_i)\, g_1 \dots g_6. \tag{3.7}$$

По построению имеем $g_1, g_3, g_5 \in G_{\alpha_2}(E)$ и $g_2, g_4, g_6 \in G_{\{\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4\}}(E)$.

Лемма 3.8. *$g \in G(K)$, т.е. $\sigma(g) = g$, $\lambda(g) = g$, тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

1) $h_{\alpha_2}(t_2)$, $g_1, g_3, g_5 \in G_{\alpha_2}(K)$,

2) $h_{\alpha_1}(t_1)\,h_{\alpha_3}(t_3)\,h_{\alpha_4}(t_4)$, $g_2, g_4, g_6 \in G_{\{\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4\}}(K)$.

Доказательство непосредственно следует из (3.5) и из однозначности параметризации (3.3). •

Лемма 3.9. 1) $x_{-\alpha_2}(u)x_{\alpha_2}(v) \in G_{\alpha_2}(K) \iff u, v \in K$;

2) $h_{\alpha_2}(t) \in G_{\alpha_2}(K) \iff t \in K$;

3) $x_{-\alpha_1}(u_1)x_{\alpha_1}(v_1)x_{-\alpha_3}(u_3)x_{\alpha_3}(v_3)x_{-\alpha_4}(u_4)x_{\alpha_4}(v_4) \in G_{\{\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4\}}(K) \iff u_3 = \sigma(u_1), u_4 = \sigma^2(u_1), v_3 = \sigma(v_1), v_4 = \sigma^2(v_1)$, *причем* $u_1, v_1 \in P \cdot K$;

4) $h_{\alpha_1}(t_1)h_{\alpha_3}(t_3)h_{\alpha_4}(t_4) \in G_{\{\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4\}}(K) \iff t_3 = \sigma(t_1), t_4 = \sigma^2(t_1)$ *и* $t_1 \in P \cdot K$.

Доказательство. См. формулы (3.5). •

Перейдем к анализу равенства $g = \tau(g)$. В разложении (3.6) положим $t = \prod_{i=1}^{4} h_{\alpha_i}(t_i)$ и $r_i = x_{-\beta_i}(u_i)x_{\beta_i}(v_i)$, $i = 1, \dots, 12$. В этих обозначениях уравнение $g = \tau(g)$ переписывается в виде

$$t\,r_1 \dots r_{12} = \tau(t)\tau(r_1)\dots\tau(r_{12}). \tag{3.8}$$

Ясно, что $\tau(r_i) \in G_{\beta_i}$, ибо в силу леммы 3.4

$$\begin{aligned}\tau(r_i) &= \tau[x_{-\beta_i}(u_i)x_{\beta_i}(v_i)] = x_{\beta_i}(c_{-\beta_i}\tau(u_i))x_{-\beta_i}(c_{\beta_i}\tau(v_i))\\ &= h_{\beta_i}(1+\tau(u_iv_i))x_{-\beta_i}[c_{\beta_i}\tau(v_i)/(1+\tau(u_iv_i))]x_{\beta_i}[\tau(u_i)/c_{\beta_i}(1+\tau(u_iv_i))].\end{aligned}$$

Напомним, что в группах Шевалле выполняется соотношение

$$h_\beta(t)x_\alpha(u)h_\beta(t)^{-1} = x_\alpha(t^{\langle\alpha,\beta\rangle}u).$$

Используя это соотношение, элемент $\tau(g)$ можно переписать в виде

$$\begin{aligned}\tau(g) = \prod_{i=1}^{4} h_{\alpha_i}(\tau(t_i)^{-1}) \prod_{i=1}^{12} h_{\beta_i}(1+\tau(u_iv_i))&\\ \cdot \prod_{i=1}^{12} x_{-\beta_i}[d_{\beta_i}\tau(v_i)(1+\tau(u_iv_i))]\,x_{\beta_i}[\tau(u_i)/d_{\beta_i}(1+\tau(u_iv_i))],&\end{aligned} \tag{3.9}$$

где d_{β_i} — „константы“ (зависящие от $u_{i+1}, \dots, u_{12}, v_{i+1}, \dots, v_{12}$, но не от u_i, v_i), определяемые следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}d_{\beta_{12}} &= c_{\beta_{12}},\\ d_{\beta_{11}} &= c_{\beta_{11}}(1+\tau(u_{12}v_{12}))^{\langle\beta_{11},\beta_{12}\rangle},\\ d_{\beta_{10}} &= c_{\beta_{10}}(1+\tau(u_{12}v_{12}))^{\langle\beta_{10},\beta_{12}\rangle}(1+\tau(u_{11}v_{11}))^{\langle\beta_{10},\beta_{11}\rangle},\\ &\ \vdots\\ d_{\beta_1} &= c_{\beta_1}(1+\tau(u_{12}v_{12}))^{\langle\beta_1,\beta_{12}\rangle}\dots(1+\tau(u_2v_2))^{\langle\beta_1,\beta_2\rangle}.\end{aligned}\right\} \tag{3.10}$$

Подставляя теперь в уравнение $g = \tau(g)$ выражение (3.9) и используя однозначность параметризации (3.3), сразу же получаем, что равенство $g = \tau(g)$ выполняется тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} u_{12} = d_{\beta_{12}}\tau(v_{12})(1+\tau(u_{12}v_{12})), & v_{12} = \tau(v_{12})/d_{\beta_{12}}(1+\tau(u_{12}v_{12})), \\ & \vdots \\ u_1 = d_{\beta_1}\tau(v_1)(1+\tau(u_1v_1)), & v_1 = \tau(u_1)/d_{\beta_1}(1+\tau(u_1v_1)), \\ \prod_{i=1}^{4} h_{\alpha_i}(t_i\tau(t_i)) = \prod_{i=1}^{12} h_{\beta_i}(1+\tau(u_iv_i)) \end{cases}$$

или же, что эквивалентно,

$$\left.\begin{aligned} u_{12} &= d_{\beta_{12}}\tau(v_{12})(1-d_{\beta_{12}}v_{12}\tau(v_{12}))^{-1}, \\ &\vdots \\ u_1 &= d_{\beta_1}\tau(v_1)(1-d_{\beta_1}v_1\tau(v_1))^{-1}, \end{aligned}\right\} \tag{3.11}$$

$$\prod_{i=1}^{4} h_{\alpha_i}(t_i\tau(t_i)) = \prod_{i=1}^{12} h_{\beta_i}(1-d_{\beta_i}v_i\tau(v_i))^{-1}. \tag{3.12}$$

Таким образом, нами доказана следующая

Теорема 3.10. *Пусть $g \in G(E)$ — элемент „общего" положения и пусть $u_1, \dots, u_{12}, v_1, \dots, v_{12}, t_1, \dots, t_4$ — параметры в разложении g в виде* (3.6). *Тогда имеем*:

1) $g^{1-\tau} \in T(E)$ *тогда и только тогда, когда выполняются соотношения* (3.11). *В этом случае для любого целого числа $i = 1, \dots, 6$ выполняется равенство*

$$(g_i \dots g_6)^{1-\tau} = \prod_j h_{\beta_j}(1-d_{\beta_j}v_j\tau(v_j)),$$

где $g_1, \dots, g_6$ — компоненты элемента g в разложении (3.7), *d_{β_j} — константы, задаваемые формулами* (3.10), *и произведение берется по всем корням β_j, входящих в $g_i, \dots, g_6$.*

2) $g = \tau(g)$ *тогда и только тогда, когда выполняются соотношения* (3.11), (3.12).

Замечание 3.11. Подставляя формулы (3.11) в (3.10), легко убедиться, что

$$d_{\beta_i} = c_{\beta_i}(1-d_{\beta_{12}}v_{12}\tau(v_{12}))^{-\langle\beta_i,\beta_{12}\rangle} \dots (1-d_{\beta_{i+1}}v_{i+1}\tau(v_{i+1}))^{-\langle\beta_i,\beta_{i+1}\rangle}.$$

Вернемся непосредственно к доказательству основной теоремы 3.1. Наша стратегия будет заключаться в том, чтобы для любого элемента $g \in G(F)$ найти R-тривиальные элементы $x_1, \dots, x_l \in G(F)$ такие, что

$$g = x_1 \dots x_l. \tag{3.13}$$

С этой целью предварительно покажем, что достаточно ограничиться рассмотрением элементов g из произвольного открытого в вещественной топологии подмножества $V \subset G(F)$.

Лемма 3.12. *Пусть $G_\infty = \prod_{v \in V_\infty} G(F_v)$ и $U \subset G_\infty$ — произвольное открытое в вещественной топологии множество. Тогда нормальный делитель N в $G(F)$, порожденный элементами $G(F) \cap U$, совпадает с $G(F)$.*

Доказательство. Известно [4], что группа $G(F_v)$, $v \in V_\infty$, не содержит нецентральных нормальных делителей. Поэтому N плотен в G_∞ и, в частности, $NU = G_\infty$. Тогда для любого $g \in G(F)$ существуют $n \in N$ и $u \in U$ такие, что $g = nu$. Но поскольку $u = n^{-1}g \in U \cap G(F) \subseteq N$, то и $g \in N$, что и требовалось доказать. •

В качестве U возьмем следующее множество. Пусть $v \in V_\infty^F$. Если $F_v \simeq \mathbb{C}$, то положим $U_v = G(F_v)$. Если же $F_v \simeq \mathbb{R}$, то обозначим через U_v множество, состоящее из всех элементов $g \in G(F_v)$, которые лежат в образе отображения (3.3), и таких, что соответствующие параметры $v_1, \dots, v_{12}$ удовлетворяют соотношению

$$1 - d_{\beta_i} v_i \tau(v_i) > 0,$$

если $\beta_i = \alpha_2$, и

$$\mathrm{N}_{P \otimes F_v / F_v}(1 - d_{\beta_i} v_i \tau(v_i)) > 0,$$

если $\beta_i = \alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$. Наконец, пусть $U = \prod_{v \in V_\infty} U_v$, и покажем, что произвольный элемент $g \in G(F) \cap U$ допускает разложение (3.13).

Рассмотрим разложение g в виде (3.7). Напомним, что в этом разложении компоненты $g_1, g_3, g_5 \in G_{\alpha_2}(K)$ и $g_2, g_4, g_6 \in G_{\{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4\}}$. Для осуществления перехода от разложения (3.7) к разложению (3.13) мы установим, что умножая g справа на подходящие R-тривиальные элементы $x_1, \dots, x_s$ группы $G(F)$, можно „переставить" сомножители $g_1, \dots, g_6$ таким образом, чтобы собрать отдельно все g_i, лежащие в G_{α_2}, и все g_i, лежащие в $G_{\{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4\}}$. В результате мы получим элемент вида

$$g x_1 \dots x_s = x_{s+1} x_{s+2},$$

где $x_{s+1} \in G_{\alpha_2}$ и $x_{s+2} \in G_{\{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4\}}$. Поскольку произведение $x_{s+1} x_{s+2} \in G(F)$, то из однозначности параметризации (3.3) сразу же следует, что элементы x_{s+1}, x_{s+2} инвариантны относительно σ, λ, τ, т.е. лежат соответственно в $G_{\alpha_2}(F)$, $G_{\{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4\}}(F)$, и остается лишь заметить, что x_{s+1}, x_{s+2} — также R-тривиальные элементы, ибо в силу следствия 3.6 многообразия G_{α_2}, $G_{\{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4\}}$ рациональны над F.

Следующие два утверждения гарантируют возможность „перестановки" компонент g_i и g_{i+1} в разложении (3.7). Пусть $g_1 \in G_{\alpha_2}(K)$ и $g_2 \in G_{\{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4\}}(K)$

— два элемента в „общем“ положении такие, что $g_2^{\tau-1} \in T$ и $(g_1 g_2)^{\tau-1} \in T$. Положим $(g_1 g_2)^{\tau-1} = \prod_{i=1}^4 h_{\alpha_i}(a_i)$. В ходе доказательства теоремы 3.10 было показано, что параметры a_3, a_4 удовлетворяют условию $a_3 = \sigma(a_1), a_4 = \sigma^2(a_1)$, а параметры a_1, a_2 являются соответственно приведенными нормами в алгебрах кватернионов $D_1 = (d, c_{\beta_1})$ над P и $D_2 = (d, c_{\alpha_2} \mathrm{N}_{P/F}(a_1))$ над F.

Лемма 3.13. *Предположим, что для всех нормирований $v \in V_\infty^F$ таких, что $F_v \simeq \mathbb{R}$, элементы a_2 и $\mathrm{N}_{P/F}(a_1) = a_1 a_3 a_4$ положительны. Тогда существует $x \in G(F)$ такой, что $g_1 g_2 x = z_2 z_1$, где $z_2 \in G_{\{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4\}}$, $z_1 \in G_{\alpha_2}$.*

Доказательство. Элемент x будем искать в виде

$$x = g_2^{-1} g_1^{-1} \prod_{i=1}^{4} h_{\alpha_i}(t_i)\, z_2\, z_1, \tag{3.14}$$

где

$$\begin{aligned} z_1 &= x_{-\alpha_2}(u_2) x_{\alpha_2}(v_2), \\ z_2 &= x_{-\alpha_1}(u_1) x_{\alpha_1}(v_1) x_{-\alpha_3}(u_3) x_{\alpha_3}(v_3) x_{-\alpha_4}(u_4) x_{\alpha_4}(v_4) \end{aligned}$$

и $u_1, \dots, u_4, v_1, \dots, v_4, t_1, \dots, t_4$ — некоторые параметры. Наша задача — подобрать эти параметры таким образом, чтобы x был определен над F.

Прежде всего отметим, что поскольку g_1, g_2 определены над K, то в силу леммы 3.9 условие определенности элемента x над K эквивалентно тому, что должны выполняться соотношения

$$\begin{aligned} u_3 = \sigma(u_1),\ u_4 = \sigma^2(u_1),\ v_3 = \sigma(u_1), \\ v_4 = \sigma^2(v_1),\ t_3 = \sigma(t_1),\ t_4 = \sigma^2(t_1) \end{aligned}$$

и $t_2, u_1, v_1 \in K$, $u_2, v_2, t_1 \in P \cdot K$.

Предположим дополнительно, что параметры u_1, u_2 удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} u_2 &= d_{\beta_2} \tau(v_2)[1 - d_{\beta_2} v_2 \tau(v_2)]^{-1}, \\ u_1 &= d_{\beta_1} \tau(v_1)[1 - d_{\beta_1} v_1 \tau(v_1)]^{-1}, \end{aligned}$$

где $d_{\beta_2} = c_{\alpha_2}$, $d_{\beta_1} = c_{\alpha_1}(1 + \tau(u_2 v_2))^{-1} = c_{\alpha_1}(1 - c_{\alpha_2} v_2 \tau(v_2))$, что эквивалентно тому, что $z_1^{\tau-1} \in T$, $(z_2 z_1)^{\tau-1} \in T$ (см. формулы (3.11) и замечание 3.11).

Легко убедиться, что при этих предположениях

$$\begin{aligned} (z_2 z_1)^{\tau-1} = h_{\alpha_2}(1 - d_{\beta_2} v_2 \tau(v_2))\, h_{\alpha_1}(1 - d_{\beta_1} v_1 \tau(v_1)) \\ h_{\alpha_3}[\sigma(1 - d_{\beta_1} v_1 \tau(v_1))]\, h_{\alpha_4}[\sigma^2(1 - d_{\beta_1} v_1 \tau(v_1))], \end{aligned}$$

и, следовательно, элемент x определен над F тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} a_2 = (1 - d_{\beta_2} v_2 \tau(v_2))\, t_2 \tau(t_2), \\ a_1 = (1 - d_{\beta_1} v_1 \tau(v_1))\, t_1 \tau(t_1) \end{cases}$$

или же, что эквивалентно,

$$\begin{cases} a_2 = (1 - c_{\alpha_2} v_2 \tau(v_2))\, t_2 \tau(t_2), \\ a_1 = [1 - c_{\alpha_1} a_2 v_1 \tau(v_1)/t_2 \tau(t_2)]\, t_1 \tau(t_1). \end{cases}$$

Тем самым наша задача свелась к проверке условий $a_2 \in \operatorname{Nrd} D_3$ и $a_1 \in \operatorname{Nrd} D_4$, где D_3, D_4 — алгебры кватернионов над F и P вида $D_3 = (d, c_{\alpha_2})$, $D_4 = (d, c_{\alpha_1} a_2)$.

Первое условие выполняется автоматически, ибо по предположению a_2 всюду положителен. Очевидна также справедливость второго условия, ибо, с одной стороны, $a_1 \in \operatorname{Nrd} D_1$, а с другой — алгебры кватернионов D_1, D_4 локально совпадают над F_v для всех $v \in V_\infty^F$. Лемма 3.13 доказана. •

Обратно, пусть $g_1 \in G_{\alpha_2}(K)$ и $g_2 \in G_{\{\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4\}}(K)$ — два элемента в „общем“ положении такие, что $g_1^{\tau-1} \in T$ и $(g_2 g_1)^{\tau-1} \in T$. Как и выше, положим $(g_2 g_1)^{\tau-1} = \prod_{i=1}^4 h_{\alpha_i}(a_i)$.

Лемма 3.14. *Предположим, что для всех нормирований $v \in V_\infty^F$ таких, что $F_v \simeq \mathbb{R}$, элементы a_2 и $\mathrm{N}_{P/F}(a_1) = a_1 a_3 a_4$ положительны. Тогда существует элемент $x \in G(F)$ такой, что $g_2 g_1 x = z_1 z_2$, где $z_2 \in G_{\{\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4\}}$, $z_1 \in G_{\alpha_2}$.*

Доказательство осуществляется аналогично предыдущему и поэтому будет опущено. •

Следующее утверждение завершает доказательство основной теоремы 3.1.

Предложение 3.15. *Элементы x из предыдущих двух лемм являются R-тривиальными в группе $G(F)$.*

Доказательство. Два случая равносильны, и поэтому исследуем, например, случай элемента x из леммы 3.13. Согласно (3.14), x записывается в виде

$$x = g_2^{-1} g_1^{-1}\, t\, g_4\, g_3,$$

где $g_1, g_3 \in G_{\alpha_2}(K)$, $g_2, g_4 \in G_{\{\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4\}}(K)$, $t \in T(K)$, причем $g_3^{\tau-1} \in T$ и соответствующий параметр a в равенстве $g_3^{\tau-1} = h_{\alpha_2}(a)$, рассматриваемый как элемент поля F_v, положителен для всех $v \in V_\infty^F$ таких, что $F_v \simeq \mathbb{R}$.

Введем в рассмотрение множество

$$Y = \{(s_1, s_2, s_4) \in G_{\alpha_2}(K) \times G_{\{\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4\}}(K) \times G_{\{\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4\}}(K) \mid s_2^{-1} s_1^{-1} s_4\, g_3 \in G(F)\}$$

и морфизм

$$\lambda : Y \longrightarrow G(F), \ (s_1, s_2, s_4) \longrightarrow s_2^{-1} s_1^{-1} s_4 g_3.$$

Ясно, что образ $\operatorname{Im} \lambda$ содержит 1 и x, так что достаточно установить, что

i) элементы множества Y являются F-точками некоторого алгебраического аффинного F-многообразия X;

ii) X бирационально отображается на открытое в топологии Зарисского F-подмножество некоторой F-определенной алгебраической группы H, группа классов R-эквивалентности которой тривиальна.

Пусть

$$s_1 = h_{\alpha_2}(t_1)x_{-\alpha_2}(u_1)x_{\alpha_2}(v_1),$$
$$s_2 = h_{\alpha_1}(t_2)h_{\alpha_3}(t_3)h_{\alpha_4}(t_4)x_{-\alpha_1}(u_2)x_{\alpha_1}(v_2)x_{-\alpha_3}(u_3)x_{\alpha_3}(v_3)x_{-\alpha_4}(u_4)x_{\alpha_4}(v_4),$$
$$s_4 = h_{\alpha_1}(t_5)h_{\alpha_3}(t_6)h_{\alpha_4}(t_7)x_{-\alpha_1}(u_5)x_{\alpha_1}(v_5)x_{-\alpha_3}(u_6)x_{\alpha_3}(v_6)x_{-\alpha_4}(u_7)x_{\alpha_4}(v_7).$$

Так как по условию $s_1 \in G_{\alpha_2}(K)$, $s_2, s_4 \in G_{\{\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4\}}(K)$, то леммы 3.8, 3.9 показывают, что параметры

$$u_1, v_1 \in K, \ \ t_2, t_5, u_2, v_2, u_5, v_5 \in P \cdot K,$$

а параметры $t_3, t_4, t_6, t_7, u_3, u_4, u_6, u_7, v_3, v_4, v_6, v_7$ однозначно выражаются через $t_2, t_5, u_2, u_5, v_2, v_5$.

Далее, мы уже знаем, что условие $s_2^{-1}s_1^{-1}s_4g_3 \in G(F)$ эквивалентно тому, что $(s_1s_2)^{\tau-1} \in T$, $(s_4g_3)^{\tau-1} \in T$, и выполняется равенство $(s_1s_2)^{\tau-1} = (s_4g_3)^{\tau-1}$. Тогда, согласно формулам (3.11), теореме 3.10, п. 1), замечанию 3.11, параметры u_1, u_2, u_5 однозначно выражаются через v_1, v_2, v_5, а оставшиеся параметры $t_1, t_2, t_5, v_1, v_2, v_5$ удовлетворяют системе уравнений

$$\left.\begin{aligned} t_2\tau(t_2)(1 - c_{\alpha_1}v_2\tau(v_2)) &= t_5\tau(t_5)(1 - d_{\beta_1}v_5\tau(v_5)),\\ t_1\tau(t_1)(1 - d_{\beta_2}v_1\tau(v_1)) &= a, \end{aligned}\right\} \tag{3.15}$$

где

$$\begin{aligned} d_{\beta_1} &= c_{\alpha_1}a^{-\langle\alpha_1,\alpha_2\rangle} = c_{\alpha_1}a,\\ d_{\beta_2} &= c_{\alpha_2}\,\mathrm{N}_{P/F}[t_2\tau(t_2)(1 - c_{\alpha_1}v_2\tau(v_2))]^{-\langle\alpha_2,\alpha_1\rangle}\\ &= c_{\alpha_2}\,\mathrm{N}_{P/F}[t_2\tau(t_2)(1 - c_{\alpha_1}v_2\tau(v_2))]. \end{aligned}$$

Очевидно, что второе уравнение системы (3.15) при помощи бирегулярной замены переменных можно переписать в виде

$$t_1\tau(t_1) - av_1\tau(v_1) = d_{\beta_2},$$

и, таким образом, система (3.15) эквивалентна системе

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{Nrd}_{T_1}(w_2) &= \mathrm{Nrd}_{T_2}(w_5),\\ \mathrm{Nrd}_{T_3}(w_1) &= c_{\alpha_2}\,\mathrm{N}_{P/F}[\mathrm{Nrd}_{T_1}(w_2)], \end{aligned}\right\} \tag{3.16}$$

где T_1, T_2 и T_3 — алгебры кватернионов соответственно над P и F вида

$$T_1 = (d, c_{\alpha_1}), \ T_2 = (d, c_{\alpha_1}a), \ T_3 = (d, a),$$

и $w_2 \in T_1$, $w_5 \in T_2$, $w_1 \in T_3$.

Заметим, что по предположению элемент a положителен во всех вещественных пополнениях F_v; следовательно, алгебра кватернионов T_3 расщепляется над всеми F_v, $v \in V_\infty^F$. Последнее влечет, что c_{α_2} является приведенной нормой в T_3, и поэтому система (3.16) эквивалентна системе

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{Nrd}_{T_1}(w_2) &= \mathrm{Nrd}_{T_2}(w_5), \\ \mathrm{Nrd}_{T_3}(w_1) &= \mathrm{N}_{P/F}[\mathrm{Nrd}_{T_1}(w_2)], \end{aligned}\right\} \tag{3.17}$$

множество решений которой образует F-подгруппу H редуктивной группы $\mathrm{R}_{P/F}(T_1^*) \times \mathrm{R}_{P/F}(T_2^*) \times T_3^*$.

Лемма 3.16. $H(F)/R = 1$.

Доказательство. Очевидно, что группа H — редуктивна. Ее полупростая часть $H^{(1)}$ совпадает с группой $\mathrm{R}_{P/F}(\mathbf{SL}(1,T_1)) \times \mathrm{R}_{P/F}(\mathbf{SL}(1,T_2)) \times \mathbf{SL}(1,T_3)$, а центральный тор изоморфен над F тору

$$Z \simeq \{(p, p, \mathrm{N}_{P/F}(p)) \in \mathrm{R}_{P/F}(G_{m,P}) \times \mathrm{R}_{P/F}(G_{m,P}) \times G_{m,F} \mid p \in \mathrm{R}_{P/F}(G_{m,P})\},$$

и, в частности, Z имеет тривиальные 1-мерные когомологии Галуа.

Из леммы 2.13 тогда следует, что

$$H(F)/R = [H/Z](F)/R = [H^{(1)}/H^{(1)} \cap Z](F)/R,$$

и поэтому, согласно последовательности Жилля (1.4), группа $H(F)/R$ входит в точную последовательность

$$H^{(1)}(F)/R = 1 \longrightarrow H(F)/R \longrightarrow \mathrm{H}^1(F, E) \longrightarrow 1,$$

где E — соответствующий тор из вялой резольвенты модуля $H^{(1)} \cap Z$. Осталось заметить, что $\mathrm{H}^1(F, E) = 1$, ибо $H^{(1)} \cap Z = \mu_2$. Лемма 3.16, а вместе с ней и предложение 3.15 доказаны. •

§4. Полупростые p-адические группы внутреннего типа

В этом параграфе через F обозначается локальное поле, характеристика поля вычетов $\overline{F}$ которого не равна 2. Пусть $\widetilde{G}_1, \ldots, \widetilde{G}_s$ — абсолютно простые односвязные алгебраические группы, определенные над F и имеющие внутренний тип. Положим $\widetilde{G} = \widetilde{G}_1 \times \cdots \times \widetilde{G}_s$. Основным результатом этого параграфа является следующее утверждение.

Теорема 4.1. *Если группа $\widetilde{G}$ не содержит компонентов типов ${}^1A_n$, то для произвольной F-определенной центральной подгруппы $\mu \leq \widetilde{G}$ фактор-многообразие $G = \widetilde{G}/\mu$ рационально над F.*

В действительности мы докажем слегка более общее утверждение. А именно, в обозначениях выше предположим, что все простые компоненты группы $\widetilde{G}$ являются группами типов B_n $(n \geqslant 2)$, C_n $(n \geqslant 2)$, ${}^1D_n$ $(n \geqslant 4)$, G_2, F_4, ${}^{1,2}E_6$, E_7, E_8, ${}^{3,6}D_4$.

Теорема 4.2. *Для произвольной F-определенной центральной подгруппы $\mu \leq \widetilde{G}$ многообразие группы $G = \widetilde{G}/\mu$ рационально над F.*

Доказательство теоремы базируется на классификации p-адических групп и предложении 2.17.

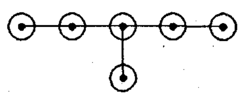
Напомним, что в силу теоремы Кнезера [4, гл. VI] группы типов G_2, F_4, E_8 разложимы над F, не имеют центра и, значит, выделяются в группе G прямыми сомножителями. Тем самым без ограничения общности можно считать, что $\widetilde{G}$ состоит из простых групп типов B_n, C_n, ${}^1D_n$, ${}^{3,6}D_4$, E_7, ${}^{1,2}E_6$.

Пусть $\widetilde{G}' \leqslant \widetilde{G}$ — подгруппа, составленная из всех простых компонент первых пяти упомянутых выше типов, и аналогично $\widetilde{G}'' \leqslant \widetilde{G}$ — подгруппа, составленная из простых компонент типа E_6. Ясно, что $\widetilde{G} \simeq \widetilde{G}' \times \widetilde{G}''$ и что центр группы $\widetilde{G}'$ (соответственно $\widetilde{G}''$) является 2-примарной (соответственно 3-примарной) группой. Тогда очевидно, что

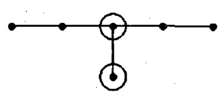
$$\mu \simeq \mu' \times \mu'',$$

где $\mu' = \mu \cap \widetilde{G}'$, $\mu'' = \mu \cap \widetilde{G}''$, так что достаточно рассмотреть по отдельности случаи, когда либо $\widetilde{G}$ состоит только из компонент типа E_6, либо вообще не содержит компонент этого типа.

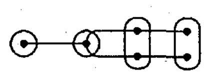
Начнем с первого случая, т.е. с простых компонент типов ${}^{1,2}E_6$. Согласно таблицам в [13], для F-индексов Титса групп $\widetilde{G}_1, \ldots, \widetilde{G}_s$ имеются тогда три возможности:



(4.1)



(4.2)



(4.3)

В случае диаграммы (4.2) полупростое F-анизотропное ядро является почти прямым произведением двух односвязных простых F-групп H_1, H_2 внутреннего типа A_2. Поэтому имеются F-изоморфизмы

$$H_1 \simeq \mathrm{SL}(1, D_1), \qquad H_2 \simeq \mathrm{SL}(1, D_2),$$

где D_1, D_2 — два тела над F степени 3.

Лемма 4.3. *Тело D_2 совпадает либо с D_1, либо с $D_1{}^{\mathrm{op}}$; в частности, для произвольного расширения E/F алгебры $D_1 \otimes_F E$ и $D_2 \otimes_F E$ имеют одни и те же приведенные нормы.*

Доказательство. Из таблиц в [13] следует, что любое расширение E/F, расщепляющее тело D_1, расщепляет также D_2 и обратно. Поэтому в группе $\mathrm{Br}(F)$ тела D_1, D_2 порождают одну и ту же циклическую подгруппу, и остается заметить, что класс $[D_i]$ имеет порядок 3 в $\mathrm{Br}(F)$. •

В качестве первого шага доказательства теоремы 4.2 покажем, что достаточно рассмотреть случай, когда все простые компоненты группы $\widetilde{G}$ являются одновременно либо группами внутреннего типа, либо внешнего типа, разложимые над одним и тем же квадратичным расширением L поля F.

Напомним, что существует лишь три квадратичных расширения поля F. Занумеруем их произвольным образом L_1, L_2, L_3 и занумеруем простые компоненты $\widetilde{G}_1, \ldots, \widetilde{G}_s$ таким образом, чтобы вначале шли группы $\widetilde{G}_1, \ldots, \widetilde{G}_{i_1}$ внутреннего типа, а затем группы

$$\{\widetilde{G}_{i_1+1}, \ldots, \widetilde{G}_{i_2}\},\ \{\widetilde{G}_{i_2+1}, \ldots, \widetilde{G}_{i_3}\},\ \{\widetilde{G}_{i_3+1}, \ldots, \widetilde{G}_{s}\}$$

внешнего типа, разложимые соответственно над L_1, L_2, L_3.

Положим

$$\widetilde{H}_0 = \widetilde{G}_1 \times \cdots \times \widetilde{G}_{i_1}, \quad \widetilde{H}_1 = \widetilde{G}_{i_1+1} \times \cdots \times \widetilde{G}_{i_2},$$
$$\widetilde{H}_2 = \widetilde{G}_{i_2+1} \times \cdots \times \widetilde{G}_{i_3}, \quad \widetilde{H}_3 = \widetilde{G}_{i_3+1} \times \cdots \times \widetilde{G}_{s}$$

и обозначим через $\nu_0, \nu_1, \nu_2, \nu_3$ соответственно пересечения $\widetilde{H}_0 \cap \mu$, $\widetilde{H}_1 \cap \mu$, $\widetilde{H}_2 \cap \mu$, $\widetilde{H}_3 \cap \mu$.

Лемма 4.4. $\mu \simeq \nu_0 \times \nu_1 \times \nu_2 \times \nu_3$.

Доказательство. Достаточно установить, что $\nu_0, \nu_1, \nu_2, \nu_3$ порождают μ. По предположению центр Z_i односвязной группы $\widetilde{G}_i$ является группой порядка 3 и как $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$-модуль имеет следующее строение [4, с. 366]:

а) $Z_i \simeq \mu_3$, если $\widetilde{G}_i$ — группа внутреннего типа;
б) $Z_i \simeq \mathrm{R}^{(1)}_{L/F}(\mu_3)$, если $\widetilde{G}_i$ — группа внешнего типа, разложимая над L.

Рассмотрим отдельно два случая. Предположим вначале, что $\xi_3 \in F$. Тогда для любого $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ и любого нетривиального элемента $x \in Z_i$ в случае а) выполняется равенство $\sigma(x) = x$, а в случае б) имеем $\sigma(x) = x$, если $\sigma|_L = 1$, и $\sigma(x) = x^2$ — в противном случае.

Пусть $z = (z_0, z_1, z_2, z_3) \in \mu$ — произвольный неединичный элемент. Нам надо доказать, что $z_i \in \nu_i$. Возьмем любые три элемента $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ группы $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ такие, что $\sigma_i|_{L_i} \neq 1$ и $\sigma_i|_{L_j} = 1$, если $i \neq j$. Так как μ определена над F, то

$\sigma_1(z) \in \mu$. С другой стороны, по построению имеем $\sigma_1(z) = (z_0, z_1^2, z_2, z_3)$. Отсюда следует, что $\sigma_1(z)z^{-1} = (1, z_1, 1, 1) \in \mu$, и, следовательно, $z_1 \in \nu_1$. Аналогично устанавливается, что

$$\sigma_2(z)z^{-1} = (1,1,z_2,1), \qquad \sigma_3(z)z^{-1} = (1,1,1,z_3),$$

откуда $z_2 \in \nu_2, z_3 \in \nu_3$, а значит, и $z_0 \in \nu_0$.

Второй случай: $\xi_3 \notin F$. Тогда $F(\xi_3)$ совпадает с одним из полей L_1, L_2, L_3. Пусть, например, $F(\xi_3) = L_1$. Как и выше, укажем вначале действие автоморфизмов $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ на элементы центра Z_i.

Пусть $x \in Z_i$. Очевидно, что в случае а) выполняются равенства $\sigma(x) = x$, если $\sigma|_{L_1 = F(\xi_3)} = 1$, и $\sigma(x) = x^2$ — в противном случае. Легко проверить также, что в случае б) справедливы следующие равенства:

если $L \neq L_1$, то

$$\sigma(x) = \begin{cases} x, & \text{если } \sigma|_{L_1} = \sigma|_L = 1 \text{ либо } \sigma|_L \neq 1,\ \sigma|_{L_1} \neq 1; \\ x^2, & \text{если } \sigma|_{L_1} \neq 1,\ \sigma|_L = 1 \text{ либо } \sigma|_{L_1} = 1,\ \sigma|_L \neq 1; \end{cases} \tag{4.4}$$

если же $L = L_1$, то всегда $\sigma(x) = x$.

Пусть $z = (z_0, z_1, z_2, z_3) \in \mu$. Из формул выше непосредственно следует, что для любого $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ такого, что $\sigma|_{L_1} = \sigma|_{L_2} = 1$ и $\sigma|_{L_3} \neq 1$, имеем $\sigma(z) = (z_0, z_1, z_2, z_3^2)$, откуда $z_3 \in \nu_3$. Аналогично показывается, что $z_2 \in \nu_2$, и поэтому элемент $z' = (z_0, z_1, 1, 1)$ также лежит в μ. Наконец, выбирая $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ такой, что $\sigma|_{L_1} \neq 1$, из равенства $\sigma(z') = (z_0^2, z_1, 1, 1)$ выводим, что $z_0 \in \nu_0, z_1 \in \nu_1$. Лемма 4.4 доказана полностью. •

Продолжим доказательство теоремы 4.2 в случае компонент типа E_6. Согласно лемме 4.4, имеется изоморфизм

$$G = H_0 \times H_1 \times H_2 \times H_3,$$

где $H_i = \widetilde{H}_i/\nu_i$, $i = 0, \dots, 3$. Поэтому можно предполагать, что все простые компоненты группы G являются группами либо внутреннего, либо внешнего типа E_6, разложимые над одним и тем же квадратичным расширением L/F.

I случай: $\widetilde{G}_1, \dots, \widetilde{G}_s$ — группы внутреннего типа. Пусть S — максимальный F-разложимый тор группы G. Нам надо установить рациональность многообразия группы $C_G(S)/S$. Из диаграмм (4.1), (4.2) следует, что F-анизотропная полупростая группа $C_G(S)/S$ является почти прямым произведением простых групп над F внутреннего типа A_2, причем, согласно лемме 4.3, каждая из них связана либо с телом D, либо с D^{op}, где D — фиксированное тело над F степени 3 (напомним, что над локальным полем 3-компонента группы $\mathrm{Br}(F)$ имеет порядок 3). Поэтому требуемое утверждение непосредственно вытекает из предложения 2.17.

II случай: $\widetilde{G}_1, \dots, \widetilde{G}_s$ — группы внешнего типа, разложимые над квадратичным расширением L/F. Пусть $\widetilde{S}_i$ — максимальный F-разложимый тор группы

$\widetilde{G}_i$. Из диаграммы (4.3) следует, что централизатор $C_{\widetilde{G}_i}(\widetilde{S}_i)$ изоморфен над F тору T_i вида

$$T_i \simeq G_m \times G_m \times \mathrm{R}_{L/F}(G_{m,L}) \times \mathrm{R}_{L/F}(G_{m,L}).$$

Поэтому завершает доказательство

Лемма 4.5. *Пусть $\nu \leqslant \mathrm{R}_{L/F}(G_{m,L})$ — произвольная F-определенная подгруппа порядка 3 и $\widetilde{P} = \mathrm{R}_{L/F}(G_{m,L}) \times \cdots \times \mathrm{R}_{L/F}(G_{m,L})$. Тогда для любой F-определенной подгруппы $\mu \leqslant \nu \times \cdots \times \nu$ многообразие тора $P = \widetilde{P}/\mu$ рационально над F.*

Доказательство. Именно если $\nu \times 1 \times \cdots \times 1 \leqslant \mu$, то имеется изоморфизм $P \simeq P_1 \times P_2$, где

$$P_1 = 1 \times \mathrm{R}_{L/F}(G_{m,L}) \times \cdots \times \mathrm{R}_{L/F}(G_{m,L})/\mu_1, \qquad P_2 = \mathrm{R}_{L/F}(G_{m,L})/\nu$$

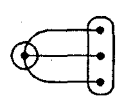
и

$$\mu_1 = \mu \cap \left[1 \times \mathrm{R}_{L/F}(G_{m,L}) \times \cdots \times \mathrm{R}_{L/F}(G_{m,L})\right].$$

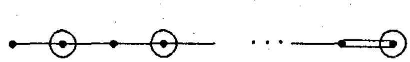
Тор P_2, будучи тором размерности 2, рационален над F, и поэтому по индукции многообразие тора P также рационально над F.

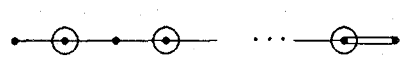
Пусть $\nu \times 1 \times \cdots \times 1 \cap \mu = 1$. Обозначим через P_1 образ $\mathrm{R}_{L/F}(G_{m,L}) \times 1 \times \cdots \times 1$ в P. Так как тор P_1 имеет тривиальные 1-мерные когомологии Галуа, то по лемме 2.13 $P \approx P_1 \times [P/P_1]$, и поэтому опять применимо предположение индукции. Лемма 4.5 доказана. •

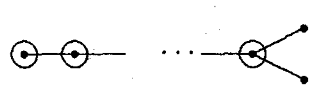
Осталось рассмотреть случай, когда центр группы $\widetilde{G}$ является 2-примарной группой, т. е. среди компонент $\widetilde{G}_1, \ldots, \widetilde{G}_s$ нет групп типа E_6. Для удобства читателей предварительно напомним классификацию F-индексов Титса неразложимых групп типов B_n, C_n, ${}^1D_n$, ${}^{3,6}D_4$, E_7 над локальными полями (см. детали в [13]):

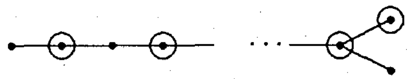

(4.5)


(4.6)

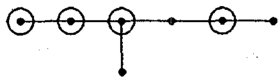

(4.7)


(4.8)


(4.9)


(4.10)


(4.11)


(4.12)

Центры Z_i групп $\widetilde{G}_i$ имеют следующее строение [4, с. 366]:

$$Z_i = \begin{cases} \mu_2, & \text{если } \widetilde{G}_i \text{ — группа типа } B_n, C_n, E_7; \\ \mu_4, & \text{если } \widetilde{G}_i \text{ — группа типа } {}^1D_{2n+1}; \\ \mu_2 \times \mu_2, & \text{если } \widetilde{G}_i \text{ — группа типа } {}^1D_{2n}; \\ \mathrm{R}^{(1)}_{L/F}(\mu_2), & \text{если } \widetilde{G}_i \text{ — группа типа } {}^{3,6}D_4, \end{cases} \tag{4.13}$$

где через L в последнем случае обозначено кубическое расширение поля F, над которым группа $\widetilde{G}_i$ имеет тип ${}^{1,2}D_4$. Всюду ниже через T будем обозначать тело над F степени 4, а через D — тело кватернионов над F. Доказательство рациональности многообразия группы $G = \widetilde{G}/\mu$ разобьем на три этапа.

Первый шаг. Занумеруем простые компоненты группы $\widetilde{G}$ таким образом, чтобы вначале шли группы $\widetilde{G}_1, \ldots, \widetilde{G}_i$ типа ${}^{3,6}D_4$, а затем группы оставшихся типов. Пусть $H_1 = \widetilde{G}_1 \times \cdots \times \widetilde{G}_i$ и $H_2 = \widetilde{G}_{i+1} \times \cdots \times \widetilde{G}_n$. Тогда $\widetilde{G} = H_1 \times H_2$, и, используя равенство (4.13), легко показать, что $\mu = \mu_1 \times \mu_2$, где $\mu_1 = H_1 \cap \mu$ и $\mu_2 = H_2 \cap \mu$. Отсюда следует, что имеется F-изоморфизм $G \simeq H_1/\mu_1 \times H_2/\mu_2$, и, следовательно, достаточно ограничиться случаем, когда все простые компоненты группы G имеют тип либо B_n, C_n, ${}^1D_n$, E_7, либо ${}^{3,6}D_4$.

Во втором случае, согласно (4.5), все простые компоненты группы $\widetilde{G}$ квазиразложимы над F. Поэтому, переходя к централизатору максимального F-разложимого тора группы $\widetilde{G}$ и повторяя дословно рассуждения для групп типов ${}^2E_6$ (см., в частности, лемму 4.5), легко показать, что многообразие G бирационально-изоморфно над F произведению многообразий унипотентных групп и F-рациональных торов вида $\mathrm{R}_{L/F}(G_{m,L})$, $\mathrm{R}_{L/F}(G_{m,L})/\,\mathrm{R}^{(1)}_{L/F}(\mu_2)$. Таким образом, без ограничения общности в дальнейшем можно считать, что группа $\widetilde{G}$ не содержит простых компонент исключительного типа ${}^{3,6}D_4$.

Второй шаг. Покажем, что от группы G можно бирационально отсечь все компоненты типов B_n, C_n, E_7 и компоненты с диаграммой Титса (4.9), (4.10). Отличительной чертой всех этих групп является то, что их полупростые анизотропные F-ядра являются почти прямыми произведениями групп типа A_1, т. е. групп вида $\mathrm{SL}(1, D)$. Поэтому, заменяя вначале компоненты группы $\widetilde{G}$ указанных выше типов на централизаторы их максимальных F-разложимых торов и затем факторизуя их по максимальным F-разложимым торам, легко видеть, что наше утверждение является частным случаем следующей общей теоремы.

Пусть $\widetilde{G} = \widetilde{G}_1 \times \cdots \times \widetilde{G}_s$, где $\widetilde{G}_i$ — группа вида либо $\mathbf{SL}(1, D)$, либо имеет диаграмму Титса 4.11. Рассмотрим произвольную F-определенную центральную подгруппу $\mu \leqslant \widetilde{G}$ и положим $G = \widetilde{G}/\mu$. Предположим также, что $\widetilde{G}_1 = \mathbf{SL}(1, D)$, и обозначим через H ее образ в G.

Теорема 4.6. *Многообразие группы G бирационально-изоморфно над F произведению $H \times G/H$.*

Доказательство осуществляется аналогично доказательству предложения 2.17. А именно, рассмотрим ограничение

$$\phi|_{\widetilde{G}_1} : \widetilde{G}_1 \longrightarrow G.$$

Поскольку центр Z_1 группы $\widetilde{G}_1$ состоит из двух элементов, то либо $Z_1 \leqslant \mu$, либо $\phi|_{\widetilde{G}_1}$ — инъективный гомоморфизм.

В первом случае группа H выделяется в G прямым сомножителем и доказывать нечего. Пусть $Z_1 \cap H = 1$. Тогда в силу леммы 2.13 достаточно проверить, что для любого расширения K/F справедливо равенство

$$\operatorname{Ker}\left[\tau : \mathrm{H}^1(K, H) \longrightarrow \mathrm{H}^1(K, G)\right] = 1. \tag{4.14}$$

Напомним, что F-группы типа ${}^1D_{2n+1}$, имеющие диаграмму Титса (4.11), реализуются как спинорные группы $\mathbf{Spin}(D, h)$, где h — невырожденная косоэрмитова форма дискриминанта 1 над телом кватернионов D нечетной размерности, и h не является гиперболической формой.

Согласно нашим предположениям, центры Z_i компонент $\widetilde{G}_i$ совпадают либо с μ_2, либо с μ_4. Отсюда следует, что μ является прямым произведением подмодулей вида μ_2, μ_4. Поэтому, повторяя далее дословно рассуждения из предложения 2.17, легко видеть, что равенство (4.14) следует из следующих двух лемм.

Лемма 4.7. *Пусть K/F — произвольное расширение; отождествим $\mathrm{H}^1(K, \mu_2) \simeq K^*/(K^*)^2$. Тогда*

$$\operatorname{Ker}\left[\mathrm{H}^1(K, \mu_2) \longrightarrow \mathrm{H}^1(K, \mathbf{Spin}(D, h))\right] = \operatorname{Nrd}(D \otimes_F K)/(K^*)^2.$$

Доказательство. Из точной последовательности

$$\mathbf{SU}(D, h)(K) \longrightarrow \mathrm{H}^1(K, \mu_2) \longrightarrow \mathrm{H}^1(K, \mathbf{Spin}(D, h))$$

следует, что описываемое ядро состоит из спинорных норм. Хорошо известно [20], что над локальным полем любая косоэрмитова форма размерности $\geqslant 4$ изотропна. Поэтому подгруппа группы $K/(K^*)^2$, состоящая из спинорных норм, в точности совпадает с $\operatorname{Nrd}(D \otimes_F K)/(K^*)^2$. ∎

Лемма 4.8. *Пусть K/F — произвольное расширение; отождествим* $\mathrm{H}^1(K,\mu_4) \simeq K^*/(K^*)^4$. *Тогда*

$$\mathrm{Ker}\left[\mathrm{H}^1(K,\mu_4) \longrightarrow \mathrm{H}^1(K,\mathbf{Spin}(D,h))\right] \subset \mathrm{Nrd}(D\otimes_F K)/(K^*)^4.$$

Доказательство. Пусть

$$x(K^*)^4 \in \mathrm{Ker}\left[\mathrm{H}^1(K,\mu_4) \longrightarrow \mathrm{H}^1(K,\mathbf{Spin}(D,h))\right].$$

Тогда очевидно, что

$$x(K^*)^2 \in \mathrm{Ker}\left[\mathrm{H}^1(E,\mu_2) \longrightarrow \mathrm{H}^1(K,\mathbf{SU}(D,h))\right],$$

т. е. элемент x является коэффициентом подобия косоэрмитовой формы h над K, а значит, и коэффициентом подобия ее 3-мерной анизотропной части h_{an}, имеющей тривиальный дискриминант.

Тривиальность дискриминанта означает, что группа $\mathbf{PSU}(D,h_{an})$ является присоединенной группой внутреннего типа ${}^1A_3$ и, следовательно, ее многообразие рационально над F; в частности, группа классов R-эквивалентности группы $\mathbf{PSU}(D,h_{an})$ универсально тривиальна. Тогда, согласно [21], группа коэффициентов подобий формы h^* над K совпадает с группой, порожденной нормами всех конечных расширений L/K таких, что h — гиперболична над L. В силу [21, лемма 4] последняя группа содержится в группе $\mathrm{N}_{E\cdot K/K}\,[\mathrm{Nrd}(C(h_{an})\otimes_F K)]$, где $C(h_{an})$ — алгебра Клиффорда косоэрмитовой формы h_{an} и E/F — ее центр. Осталось заметить, что компоненты алгебры Клиффорда $C(h_{an})$ совпадают либо с T, либо с T^{op} и что если элемент x является приведенной нормой в $T\otimes_F K$, то он приведенная норма и в $(T\otimes_F T)\otimes_F K = D\otimes_F K$. Лемма 4.8, а вместе с ней и теорема 4.6 доказаны. •

Третий шаг. Пусть все простые компоненты $\widetilde{G}_1,\ldots,\widetilde{G}_s$ группы $\widetilde{G}$ имеют тип ${}^1D_{2n+1}$ и диаграмму Титса (4.11). Как и выше, мы можем заменить компоненты $\widetilde{G}_i$ на $C_{\widetilde{G}_i}(\widetilde{S}_i)/\widetilde{S}_i$, где $\widetilde{S}_i$ — максимальный F-разложимый тор в $\widetilde{G}_i$. Из рассуждений в п. 6.3 работы [10] следует, что группа $C_{\widetilde{G}_i}(\widetilde{S}_i)/\widetilde{S}_i$ склеивается из нескольких экземпляров группы $\mathbf{SL}(1,D)$ и группы $\mathbf{SL}(1,T)$, причем последняя не выделяется прямым сомножителем в $C_{\widetilde{G}_i}(\widetilde{S}_i)$.

Лемма 4.9. *Пусть K/F — произвольное расширение; отождествим* $\mathrm{H}^1(K,\mu_2) \simeq K^*/(K^*)^2$. *Тогда*

$$\mathrm{Ker}\left[\mathrm{H}^1(K,\mu_2) \longrightarrow \mathrm{H}^1(K,\mathbf{SL}(1,T))\right] \subseteq \mathrm{Nrd}(D\otimes_F K)/(K^*)^2.$$

Доказательство. Достаточно заметить, что $\mathbf{SL}(1,T) \simeq \mathbf{Spin}(D,h_2)$, где h_2 — 2-мерная F-анизотропная косоэрмитова форма над D, и что описываемое ядро состоит из спинорных норм. •

Лемма 4.10. *Пусть K/F — произвольное расширение; отождествим* $\mathrm{H}^1(K,\mu_4) = K^*/(K^*)^4$. *Тогда*

$$\mathrm{Ker}\left[\mathrm{H}^1(K,\mu_4) \longrightarrow \mathrm{H}^1(K,\mathbf{SL}(1,T))\right] \subseteq \mathrm{Nrd}(D \otimes_F K)/(K^*)^4.$$

Доказательство. Если x — приведенная норма в $T \otimes_F K$, то x — приведенная норма и в $(T \otimes_F T) \otimes_F K = D \otimes_F K$. •

Используя леммы 4.9, 4.10, легко завершить доказательство теоремы 4.2. А именно, дословно повторяя рассуждение в теореме 4.6 либо в предложении 2.17, легко видеть, что от группы

$$\left[\prod_{i=1}^{s} C_{\widetilde{G}_i}(\widetilde{S}_i)/\widetilde{S}_i\right]/\mu$$

отсекаются бирационально над F компоненты типа A_1. Поэтому многообразие исходной группы G бирационально-изоморфно над F произведению многообразий унипотентных групп, рациональных многообразий $\mathbf{SL}(1,D)$, $\mathbf{PSL}(1,D)$ и группы G', которая склеивается из нескольких экземпляров рациональной группы $H = \mathbf{SL}(1,T)/\mu_2 = \mathbf{SU}(D,h_2)$. В свою очередь, согласно предложению 2.18, многообразие группы G' расслаивается на группы $\mathbf{SU}(D,h_2)$ и $\mathbf{PSU}(D,h_2)$. Теорема 4.2 полностью доказана. •

Список литературы

[1] Gille P., *R-équivalence et principe de norme en cohomologie galoisienne*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. 1 Math. **316** (1993), 315–320.

[2] Gille P., *Un théorème de finitude arithmétique sur les groupes réductifs*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. 1 Math. **316** (1993), 701–704.

[3] Gille P., *La R-équivalence sur les groupes algébriques réductifs définis sur un corps global*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 86 (1997), 199–235 (1998).

[4] Платонов В. П., Рапинчук А. С., *Алгебраические группы и теория чисел*, Наука, М., 1991.

[5] Chernousov V., Merkurjev A., *R-equivalence and special unitary groups*, J. Algebra **209** (1998), 175–198.

[6] Воскресенский В. Е., *Алгебраические торы*, Наука, М., 1977.

[7] Rapinchuk A., *Normal subgroups in the multiplicative group of a division algebra and valuations*, Preprint, 1999.

[8] Rapinchuk A., Potapchik A., *Normal subgroups of $SL_{1,D}$ and the classification of finite simple groups*, Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. **106** (1996), 329–368.

[9] Segev Y., *On finite homomorphic images of the multiplicative group of a division algebra*, Ann. of Math. (2) **149** (1999), 219–251.

[10] Chernousov V., Platonov V., *The rationality problem for semisimple group varieties*, J. Reine Angew. Math. **504** (1998), 1–28.

[11] Merkur'ev A., *Generic element in SK_1 for simple algebras*, K-Theory **7** (1993), 1–3.

[12] Colliot-Thélène J.-L., Sansuc J.-J., *La R-équivalence sur les tores*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **10** (1977), 175–229.

[13] Tits J., *Classification of algebraic semisimple groups*, Algebraic Groups and Discontinuous Subgroups (Proc. Sympos. Pure Math., Boulder, Colo., 1965), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 9, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1966, pp. 33–62.

[14] Манин Ю. И., *Кубические формы. Алгебра, геометрия, арифметика*, Наука, М., 1972.

[15] Стейнберг Р., *Лекции о группах Шевалле*, Мир, М., 1975.

[16] Nguyen Q. Thang, *Weak approximation, Brauer and R-equivalence in algebraic groups over arithmetical fields*, *E*-Preprint series, Duke Univ., alg-geom: 97110115.

[17] Chevalley C., *On algebraic group varieties*, J. Math. Soc. Japan **6** (1954), 303–324.

[18] Demazure M., Grothendieck A. (eds.), *Schémas en groupes.* II: *Groupes de type multiplicatif, et structure des schémas en groupes généraux*, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1962/64 (SGA 3), Lecture Notes in Math., vol. 152, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1970.

[19] Бурбаки Н., *Группы и алгебры Ли*. Гл. IV–VI, Мир, М., 1972.

[20] Scharlau W., *Quadratic and Hermitian forms*, Grundlehren Math. Wiss., vol. 270, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1985.

[21] Merkur'ev A., *R-equivalence and rationality problem for semisimple adjoint classical algebraic groups*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 84 (1996), 189–213 (1997).

Fakultät Mathematik
Universität Bielefeld
Postfach 10 01 31
33 501 Bielefeld
Germany
E-mail: chernous@mathematik.uni-bielefeld.de

Поступило 22 декабря 1998 г.

Институт математики НАНБ
Отдел алгебры
220072, Беларусь, Минск
ул. Сурганова, 11
E-mail: timoshenko@im.bas-net.by