Ю. Г. Рыков, Двумерная газовая динамика без давления и вариационный принцип,
Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша, 2016, 094

ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 94 за 2016 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Рыков Ю.Г.

Двумерная газовая динамика без давления и вариационный принцип

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Рыков Ю.Г. Двумерная газовая динамика без давления и вариационный принцип // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2016. № 94. 14 с. doi:**10.20948/prepr-2016-94**
URL: **http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-94**

О р д е н а   Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Р о с с и й с к о й   а к а д е м и и   н а у к

Ю.Г. Рыков

Двумерная газовая динамика без давления и вариационный принцип

Москва — 2016

Рыков Ю.Г.

Двумерная газовая динамика без давления и вариационный принцип

Рассмотрено применение принципа вариационного представления решений для описания механизмов формирования особенностей обобщенных решений системы уравнений газовой динамики без давления в двумерном случае. Выяснено принципиальное отличие от одномерной ситуации, заключающееся в том, что аргументом вариационного функционала являются области в двумерном пространстве. С этой точки зрения получено соответствующее обобщение на двумерный случай условий возникновения особенностей.

Ключевые слова: газовая динамика без давления, вариационное представление, обобщенные решения, дельта-функция плотности на многообразиях, эволюция особенностей

Yuri Germanovich Rykov

2D pressureless gas dynamics and variational principle

The paper considers the application of variational representation principle to the description of singularities formation for the generalized solutions of 2D gas dynamics without pressure. The basic difference from 1D situation is clarified. This difference reads as follows: in 2D case the argument of variational functional is a domain in 2D Euclidian space. The corresponding generalization of singularities' emergency conditions is obtained.

Key words: pressureless gas dynamics, variational representation, generalized solutions, density delta-function on the manifolds, evolution of singularities

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 14-21-00025).

Оглавление

Введение

Система уравнений газовой динамики без давления является хорошей тестовой моделью для изучения возможности построения вариационных принципов для систем законов сохранения. Поясним, что под понятием «вариационный принцип» в настоящей публикации понимается конструкция, принципиально отличная от вариационных принципов, известных из физического контекста. Опишем для краткости это различие в предельно схематичной форме, т.к. детальное изучение подобных различий и выявление возможных пересечений не является задачей настоящего препринта. В рамках физического подхода вначале выписывается соответствующий некоторым физическим процессам лагранжиан/гамильтониан, и затем на основе формального вычисления вариации и приравнивания ее к нулю получаются системы уравнений, которые описывают физический процесс и которые можно исследовать методами математической физики. При этом: 1) рассматриваются, главным образом, функции без особенностей; 2) вообще говоря, не ставится задачи на основе имеющегося вариационного функционала получить строгие теоремы существования и единственности для найденных систем уравнений; 3) также не ставится задачи получить какое-нибудь представление обобщенных решений систем уравнений, отражающее структуру этих обобщенных решений. При построении вариационных принципов в предлагаемой публикации (так же, как и в ряде публикаций, которые будут цитироваться ниже) ставятся как раз описанные выше задачи. То есть в целом вариационный принцип должен быть достаточно конструктивен для того, чтобы с его помощью можно было бы строить обобщенные решения в некотором смысле в «явном виде».

Классическими примерами описанного подхода являются пионерская работа Э. Хопфа [1], где изучался предел по малой вязкости для уравнения Бюргерса, и новаторские работы П. Лакса и О.А. Олейник [2,3], посвященные, в том числе, расширению конструкции Э. Хопфа на одно квазилинейное уравнение с достаточно общим потоком. Затем интерес к данному подходу возродился лишь через почти сорок лет, когда обнаружилось, что успешно применявшийся метод «малой вязкости», вероятно, имеет серьезные ограничения для систем квазилинейных уравнений, содержащих больше двух уравнений. Вариационное представление решений было найдено для вырожденной системы двух уравнений – одномерной системы газовой динамики без давления [4,5]. Это представление позволило доказать теорему существования обобщенных решений и выяснить механизм образования особенностей. Для обобщенных решений одного квазилинейного уравнения и вырожденной системы квазилинейных уравнений типа газовой динамики без давления с одной пространственной переменной распространение слабых возмущений происходит по характеристикам, которые, вообще говоря, можно вычислить априорно, до собственно нахождения решения. Это обстоятельство предоставляет возможность строить достаточно конструктивные вариационные принципы. Для невырожденных систем, даже двух уравнений, в общем положении подобной конструкции характеристик найти нельзя, поэтому обобщение даже методологии построения вариационных принципов для общих систем гиперболических уравнений оказывается нетривиальным. В работах [6 – 8] такое обобщение методологии было найдено, однако для достижения желаемого уровня конструктивности необходимы дальнейшие исследования.

В настоящем препринте разрабатываются основные механизмы вариационного представления решений для двумерной системы уравнений. В качестве первого примера рассмотрена система уравнений двумерной газовой динамики без давления. Здесь, несмотря на то что бихарактеристики можно априорно найти в явном виде, основную трудность предоставляет уже геометрия, поскольку обобщенные решения рассматриваемой системы содержат меры на многообразиях разной размерности, что делает поведение таких решений в значительной степени нетривиальным. В работе [9] было показано, что «прямолинейное» обобщение вариационного принципа путем использования вспомогательного уравнения типа Гамильтона для двумерной газовой динамики без давления не работает. Эволюция особенностей определяется другими механизмами. В предлагаемой работе описываются такие механизмы на основе вариационного подхода. Указанные механизмы, по сути процессов концентрации вещества, оказываются достаточно оригинальными, и их изучение представляет собственный интерес. Кроме того, мы демонстрируем, что основная методология построения вариационных принципов, которая была использована для одномерных систем, годится и в многомерном случае. Это порождает надежду на то, что вариационная методология может быть развита до уровня общего подхода к теории квазилинейных гиперболических систем уравнений.

В разделе 1 приведена формулировка процедуры получения вариационного представления решений для одного уравнения и одномерной системы уравнений газовой динамики без давления в такой форме, которая может быть обобщена на многомерный случай. Это обобщение для двумерной системы уравнений газовой динамики без давления изложено в разделах 2, 3.

Дальнейшие рассуждения предполагают, что все рассматриваемые функции типа $u(t,x)$ или $v(t,x,y)$ обладают нужным числом частных производных всюду в $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ или в $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2$, кроме конечного числа C^1 многообразий коразмерности 1. Эти многообразия являются носителями особенностей в системе уравнений газовой динамики без давления. Частные производные от функций обозначаются при помощи нижнего индекса соответствующего аргумента. Индексом 0 у функций обозначаются начальные данные при $t=0$. Все функционалы, если не оговорено особо, рассматриваются на траекториях $\chi(\tau)$, $u(\tau)=u(\tau,x(\tau))$ или на поверхностях $\chi(\tau,s)$, $\gamma(\tau,s)$, $U(\tau,s)=U(\tau,\chi(\tau,s),\gamma(\tau,s))$; $U\equiv(u,v)$.

1. Процедура получения вариационного принципа для одномерной системы уравнений газовой динамики без давления

В начале в пропедевтических целях рассмотрим одно квазилинейное уравнение – невязкое уравнение Бюргерса, или уравнение Хопфа,

$$u_t + \left(u^2 / 2\right)_x = 0. \tag{1}$$

В соответствии с общей методологией, изложенной в [6], выпишем функционал, форму которого можно получить, интегрируя (1) по некоторой области и применяя формулу Грина

$$J \equiv \int u dx - \left(u^2 / 2\right) dt = \int_0^a u_0(s) ds + \int_0^t \left(u\dot{\chi} - u^2 / 2\right) d\tau, \tag{2}$$

где $\chi(0) = a, \chi(t) = x$. Опираясь на положения [6], нам необходимо выбирать такие траектории, которые удовлетворяют условию $\delta J = 0$. Отметим, что здесь выбор экстремали идет по траекториям $\chi(\tau)$, в то время как $u(\tau,\chi)$ рассматривается как некоторое поле, которое тоже надо найти. Из этого условия следует, что $\dot{\chi} = u, \dot{u} = 0$, то есть, учитывая выписанные выше краевые условия, $\chi(\tau) = a + \frac{x-a}{t}\tau, u(\tau,\chi) = \frac{x-\chi}{t-\tau}, u(\tau,\chi(\tau)) = \frac{x-a}{t}$.

Теперь из (2) уже можно напрямую получить известный вид вариационного функционала для (1), см. [1], однако этот путь нельзя обобщить на более общий случай систем, поэтому мы используем косвенные методы. Зная форму траекторий, вычислим частную производную J_a

$$J_a = u_0(a) + \int_0^t \left[(\dot{\chi} - u)u_a - \dot{u}\chi_a\right] d\tau + u(t)\chi_a(t) - u(0)\chi_a(0) = u_0(a) + \frac{a-x}{t}, \tag{3}$$

отсюда вытекает известная форма вариационного функционала для уравнения Хопфа.

Рассмотрим одномерную систему уравнений газовой динамики без давления

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho u)_x = 0 \\ (\rho u)_t + \left(\rho u^2\right)_x = 0, \end{cases} \tag{4}$$

где $\rho(t,x)$ – плотность среды, $u(t,x)$ – скорость. Система (4) является вырожденной системой законов сохранения, производная ее потока имеет лишь жорданову форму с единственным кратным собственным числом u и соответствующим правым $(1,u)$ и левым $(u,-1)$ собственным вектором. Также имеется единственный инвариант Римана u. Соответствующий вектор-функционал записывается так:

$$J \equiv \begin{cases} J_1 \equiv \int \rho dx - \rho u dt = \int\limits_0^a \rho_0(s)\,ds + \int\limits_0^t (\rho\dot{\chi} - \rho u)\,d\tau \\ J_2 \equiv \int \rho u dx - \rho u^2 dt = \int\limits_0^a \rho_0(s) u_0(s)\,ds + \int\limits_0^t \left(\rho u\dot{\chi} - \rho u^2\right) d\tau, \end{cases} \tag{5}$$

где опять же $\chi(0)=a, \chi(t)=x$ и дополнительно $\rho(0)=\rho_0(a)$. То есть в случае функционалов (5) выбор экстремали идет по траекториям $\chi(\tau)$ и $\rho(\tau)$, в то время как $u(\tau,\chi)$ рассматривается как некоторое поле, которое тоже надо найти. Условие $\delta J = 0$ предполагает выполнение характеристических соотношений $\dot{\chi}=u, \dot{u}=0, \dot{\rho}=-\rho u_\chi$. Решение этих характеристических соотношений можно выписать в явном виде, но теперь они будут содержать особенность при $\tau \to t$: $\chi(\tau)=a+\dfrac{x-a}{t}\tau, u(\tau,\chi)=\dfrac{x-\chi}{t-\tau}, \rho(\tau)=\dfrac{\rho_0(a)}{1-\tau/t}$, поэтому напрямую подставить эти соотношения в (5) нельзя. Формально прибегнем к уже описанному косвенному методу, где будем действовать так, как будто у ρ нет особенности. Тогда оказывается, что для системы уравнений одномерной газовой динамики без давления получается правильный результат, поэтому этот же метод будет использоваться и для двумерного аналога. Для обоснования метода необходимо рассматривать такое возмущение характеристической системы уравнений, при котором ρ уже не имеет особенностей и $\rho\chi_{\mathrm{a}}(\mathrm{t})=0$, с последующим предельным переходом. Детальная реализация этой процедуры не является целью настоящего препринта и будет изложена в последующих публикациях. Здесь мы акцентируем внимание лишь на формальном получении вида вариационного функционала и соответствующей вариационной задачи, что позволяет отразить новизну ситуации в случае системы уравнений двумерной газовой динамики без давления.

Тогда рассмотрим величину J_a

$$J_a \equiv \begin{cases} J_{1a} = \rho_0(a) + \int\limits_0^t \left[\rho_a(\dot{\chi}-u) + \rho\left(\dot{\chi}_a - u_\chi \chi_a\right)\right] d\tau \\ J_{2a} = \rho_0(a)u_0(a) + \int\limits_0^t \left[(\rho u)_a(\dot{\chi}-u) + \rho u\left(\dot{\chi}_a - u_\chi \chi_a\right)\right] d\tau, \end{cases} \tag{6}$$

которая после интегрирования по частям принимает вид

$$J_a \equiv \begin{cases} J_{1a} = \rho_0(a) + \rho\chi_a\big|_0^t \equiv 0 \\ J_{2a} = \rho_0(a)u_0(a) + \rho u\chi_a\big|_0^t = \rho_0(a)\left[u_0(a) - (x-a)/t\right]. \end{cases} \tag{7}$$

Из второго соотношения (7) теперь следует известная форма вариационного функционала для системы уравнений одномерной газовой динамики без давления [4,5].

2. Процедура получения вариационного принципа для двумерной системы уравнений газовой динамики без давления

Система уравнений двумерной газовой динамики без давления выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho u)_x + (\rho v)_y = 0 \\ (\rho u)_t + (\rho u^2)_x + (\rho uv)_y = 0 \\ (\rho v)_t + (\rho uv)_x + (\rho v^2)_y = 0, \end{cases} \tag{8}$$

здесь $\rho(t,x)$ – плотность среды, $u(t,x)$, $v(t,x)$ – компоненты скорости.

Систему (8) будем также записывать в общем виде

$$U_t + F(U)_x + G(U)_y = 0\,; U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \end{pmatrix}; F(U) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 \\ \rho uv \end{pmatrix}; G(U) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

для которого будем проводить все преобразования. Таким образом, разрабатываемая методика может, вообще говоря, применяться и для общих многомерных гиперболических систем (основываясь на подходах [6-8]). Аналогом (5) для системы (9) будет следующий интеграл по некоторой поверхности S от дифференциальной вектор-формы:

$$J \equiv \iint U dx \wedge dy + F(U) dy \wedge dt + G(U) dt \wedge dx\,. \tag{10}$$

Если параметризовать поверхность $S = (\chi(\tau,s), \gamma(\tau,s))$ временем τ и внутренним параметром s, то выражение (10) (рассматриваемое как аналог (5)) примет вид, см. Рис.1,

$$J = \iint\limits_A U_0(a,b)\,da\,db + \int\limits_0^t \int\limits_{s_1}^{s_2} \left[U \cdot (\chi_s\gamma_\tau - \gamma_s\chi_\tau) + F(U)\gamma_s - G(U)\chi_s\right] ds\,d\tau\,. \tag{11}$$

Характерной особенностью вариационного подхода для двумерной (многомерной) гиперболической системы уравнений является возникновение неизвестного многообразия – кривой (соответственно поверхности коразмерности 1) $S(0,s)$, форму которой будет необходимо определить в процессе решения вариационной задачи. Ниже, на Рис.1 и далее, через (a,b) будут обозначаться координаты (χ,γ) при $\tau=0$.

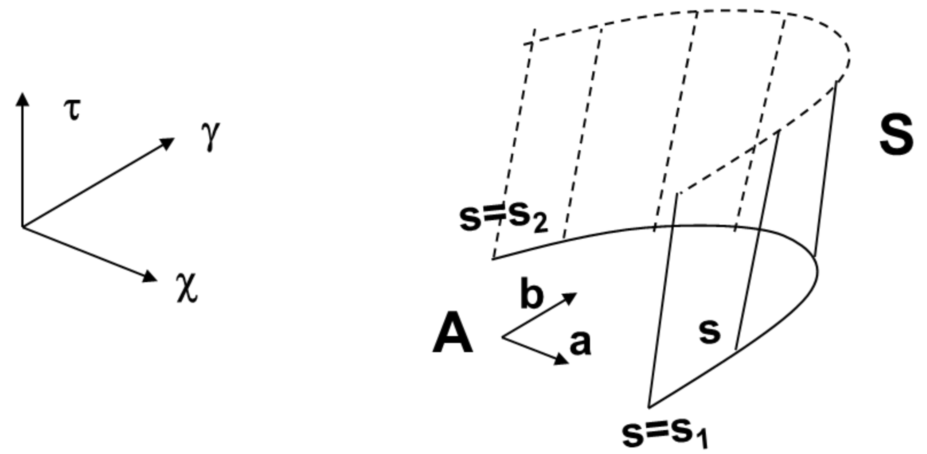

Рис. 1. Поверхность интегрирования в процедуре получения вариационного принципа

Вычислим вариацию δJ

$$\delta J=\delta\iint\limits_A U_0(a,b)\,dadb+\delta J_{гр.}-\delta J_{пов.}$$

$$\delta J_{гр.}=\int\limits_0^t\left\{\left(U\gamma_\tau-G(U)\right)\delta\chi\Big|_{s_1}^{s_2}+\left(F(U)-U\chi_\tau\right)\delta\gamma\Big|_{s_1}^{s_2}\right\}d\tau+\int\limits_{s_1}^{s_2}U\left(\chi_s\delta\gamma-\gamma_s\delta\chi\right)\Big|_0^t ds \tag{12}$$

$$\delta J_{пов.}=\int\limits_0^t\int\limits_{s_1}^{s_2}\Big\{\left[\left(U\gamma_\tau\right)_s-\left(U\gamma_s\right)_\tau\right]\delta\chi-G(U)_s\,\delta\chi+\left[\left(U\chi_s\right)_\tau-\left(U\chi_\tau\right)_s\right]\delta\gamma+$$

$$F(U)_s\,\delta\gamma-\left[\left(\chi_s\gamma_\tau-\chi_\tau\gamma_s\right)+F'(U)\gamma_s-G'(U)\chi_s\right]\delta U\Big\}\,dsd\tau.$$

Формула (12) справедлива в общем случае квазилинейных гиперболических систем. Далее уже будем учитывать специфику рассматриваемой системы (8). Будем выбирать экстремаль функционала J (11), варьируя $\chi(\tau,s),\gamma(\tau,s)$ и $\rho(\tau,s)$, а $u(\tau,\chi,\gamma),v(\tau,\chi,\gamma)$ рассматривать как некоторое поле, которое тоже надо найти.

По аналогии с разделом 1 будем требовать, чтобы $\delta J=0$, тогда $\delta J_{пов.}=\delta J_{гр.}=0$. Учитывая, что

$$\delta U=\delta\rho\begin{pmatrix}1\\u\\v\end{pmatrix}+\delta\chi\cdot\rho\begin{pmatrix}1\\u_\chi\\v_\chi\end{pmatrix}+\delta\gamma\cdot\rho\begin{pmatrix}1\\u_\gamma\\v_\gamma\end{pmatrix}, \tag{13}$$

из равенства $\delta J_{пов.}=0$ получаем характеристическую систему уравнений для системы (8): $\dot\chi=u,\dot u=0;\dot\gamma=v,\dot v=0;\dot\rho=-\rho\left(u_\chi+v_\gamma\right)$. Если снабдить эти уравнения краевыми условиями $\chi(0)=a,\chi(t)=x;\gamma(0)=b,\gamma(t)=y$, то найдем соответствующие решения $\chi(\tau)=a+\dfrac{x-a}{t}\tau, u(\tau,\chi)=\dfrac{x-\chi}{t-\tau}$, $\gamma(\tau)=b+\dfrac{y-b}{t}\tau, v(\tau,\chi,\gamma)=\dfrac{y-\gamma}{t-\tau}, \rho(\tau)=\dfrac{\rho_0(a,b)}{(1-\tau/t)^2}$.

Теперь, если в (12) подставить потоки (9), то первый интеграл в $\delta J_{гр.}$ окажется равным нулю, и из условия $\delta J=0$ вытекает равенство

$$\delta\iint_A U_0(a,b)\,da\,db+\int_{s_1}^{s_2} U\left(\chi_s\delta\gamma-\gamma_s\delta\chi\right)\Big|_0^t ds=0. \tag{14}$$

Формула (14) показывает, что в выражении для вариации J интегрирование происходит по ∂A(Рис. 1) с учетом элемента прилегающей площади. Учитывая вид консервативных переменных U, мы приходим к формулировке вариационного принципа для системы уравнений двумерной газовой динамики без давления, которую детально опишем и изучим в следующем разделе.

3. Формулировка вариационного принципа для двумерной системы уравнений газовой динамики без давления

Итак, мы приходим к следующей формулировке, которая, как будет видно, является в некотором смысле прямым обобщением вариационного принципа для системы уравнений одномерной газовой динамики без давления. Этот вариационный принцип «вбирает» в себя результаты работы [9] и обобщает в геометрическом отношении более раннюю работу [10], которая, по существу, описывает бесконечно малый промежуток времени после начала образования сингулярности в двумерной системе уравнений газовой динамики без давления.

Фиксируем точку (t,x)и рассмотрим следующие функционалы, в которых варьируемой величиной будет площадь A(Рис. 1),

$$\begin{aligned} J_1&\equiv\iint_A\left[\frac{x-a}{t}-u_0(a,b)\right]\rho_0(a,b)\,da\,db\equiv\iint_A X(a,b)\left(a_sb_l-b_sa_l\right)ds\,dl,\\ J_2&\equiv\iint_A\left[\frac{y-b}{t}-v_0(a,b)\right]\rho_0(a,b)\,da\,db\equiv\iint_A Y(a,b)\left(a_sb_l-b_sa_l\right)ds\,dl,\end{aligned} \tag{15}$$

где введена параметризация области A: $\left(a(s,l),b(s,l)\right)$. Поясним выражения (15) более подробно.

В соответствии с наблюдениями, сделанными в [9], [10], те точки в пространстве (χ,γ), в которые в момент времени t приходят две характеристики, образуют некоторую кривую $\left(\chi(t,l),\gamma(t,l)\right)$, l – натуральный параметр вдоль этой кривой. На этой кривой концентрируется масса в виде δ-функции на кривой, Рис. 2.

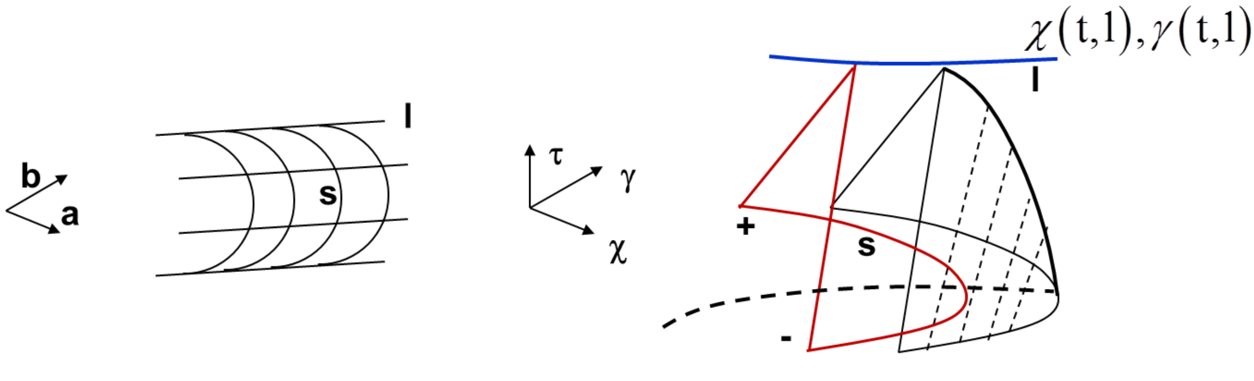

Рис. 2. Формирование особенностей на кривых

При этом, учитывая, что такая δ-функции на кривой является слабым решением системы, справедливы формулы, см. Рис. 2 и [9],

$$\begin{gathered}\int_0^t \left[\chi(t,l)-a_+(s,l)-tu_0^+(s,l)\right]\rho_0(a_+,b_+)\left[(a_+)_s(b_+)_l-(b_+)_s(a_+)_l\right]ds = \\ \int_0^t \left[\chi(t,l)-a_-(s,l)-tu_0^-(s,l)\right]\rho_0(a_-,b_-)\left[(a_-)_s(b_-)_l-(b_-)_s(a_-)_l\right]ds\,; \\ \int_0^t \left[\gamma(t,l)-b_+(s,l)-tv_0^+(s,l)\right]\rho_0(a_+,b_+)\left[(a_+)_s(b_+)_l-(b_+)_s(a_+)_l\right]ds = \\ \int_0^t \left[\gamma(t,l)-b_-(s,l)-tv_0^-(s,l)\right]\rho_0(a_-,b_-)\left[(a_-)_s(b_-)_l-(b_-)_s(a_-)_l\right]ds.\end{gathered} \tag{16}$$

Заметим, что при изменении параметра s от 0 до t происходит движение лишь по половине соответствующей кривой, Рис. 2 (от точек «+» или «-» до пунктирной линии), поэтому (16) можно трактовать так, что интеграл по целой кривой (от точки «+» до точки «-») от соответствующего выражения равен нулю. Теперь обобщение одномерной формулировки состоит в том, что необходимо искать совместную экстремаль (J_1, J_2), варьируя площадь A, то есть определять форму границы ∂A.

Запишем соответствующую вариацию для J_1 (для J_2 аналогично), используя технику интегрирования по частям, аналогичную примененной при выводе формулы (12)

$$\begin{gathered}\delta J_1 = \delta \iint_A X(a,b)(a_s b_l - b_s a_l)ds dl = \oint_{\partial A} X(a,b)\left(\vec{n}_{\partial A}\cdot(\delta a,\delta b)\right)d(\partial A) = \\ \int_0^t X(a,b)(a_s\delta b - b_s\delta a)\Big|_{l_1}^{l_2} ds + \int_{l_1}^{l_2} X(a,b)(b_l\delta a - a_l\delta b)\Big|_0^t dl.\end{gathered} \tag{17}$$

Вследствие формулы (17) вектор $(\delta a, \delta b)$ имеет смысл брать параллельным вектору нормали к ∂A. Тогда второй интеграл в (17) зануляется (при этом $X(a,b)\big|_{s=0} = X(a,b)\big|_{s=t}$, то есть в точку (t,x,y) приходят две характеристики, учитывая аналогичное соотношение для $Y(a,b)$) и требование $\delta J_1 = 0$ ведет к тому, что первый интеграл (17) равен нулю, что как раз соответствует первой формуле (16) (вторая формула является следствием таких же рассмотрений для J_2). Таким образом, вариация (15) по площади A приводит к условиям на границу ∂A, соответствующим законам движения «тяжелой» кривой (16).

В [9], [10] описывалась следующая схема эволюции особенностей в общем положении в отдельных локальных областях пространства, Рис. 3.

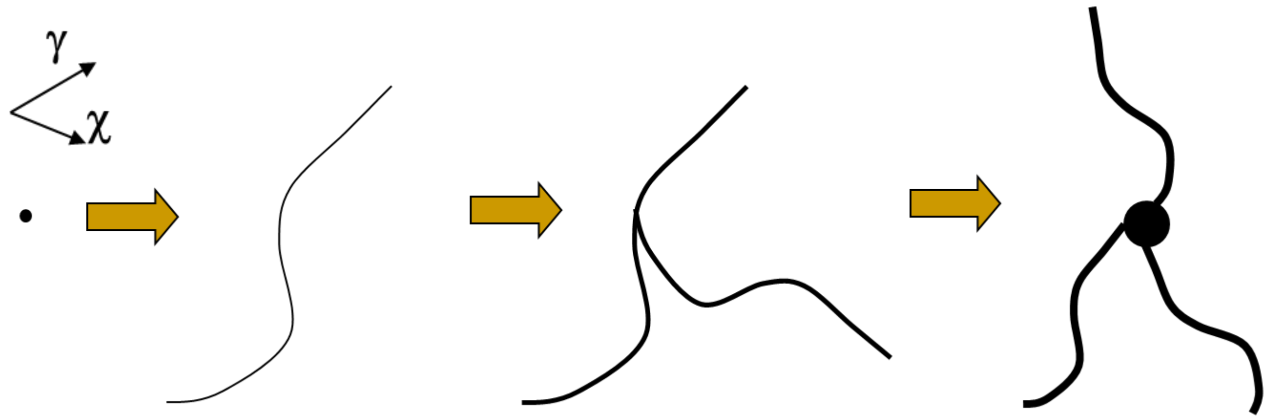

Рис. 3. Эволюция особенностей в общем положении

Вначале возникает точечная особенность без какой-либо концентрации массы. В следующий бесконечно малый отрезок времени эта особенность превращается в кривую, несущую δ-функцию массы. Таких кривых, вообще говоря, может образовываться много. Далее две кривые могут столкнуться, что приведет к образованию уже точечной δ-особенности.

Вариационный подход позволяет описывать полный процесс образования особенностей, представленный на Рис. 3. А именно, предположим, что в точке с координатами (t,x,y) с помощью формулы (17) можно найти несколько кривых. Тогда в плоскости (a,b) при движении точечной δ-особенности получаем картину, изображенную на Рис. 4.

Обобщением на двумерный случай условия из вариационного принципа для одномерной ситуации, которое характеризует возникновение особенности на нуль-мерных многообразиях, является следующее условие:

$$J(t) \equiv \iint\limits_{D(t)} \begin{pmatrix} X(a,b;t) \\ Y(a,b;t) \end{pmatrix} da db = 0. \qquad (18)$$

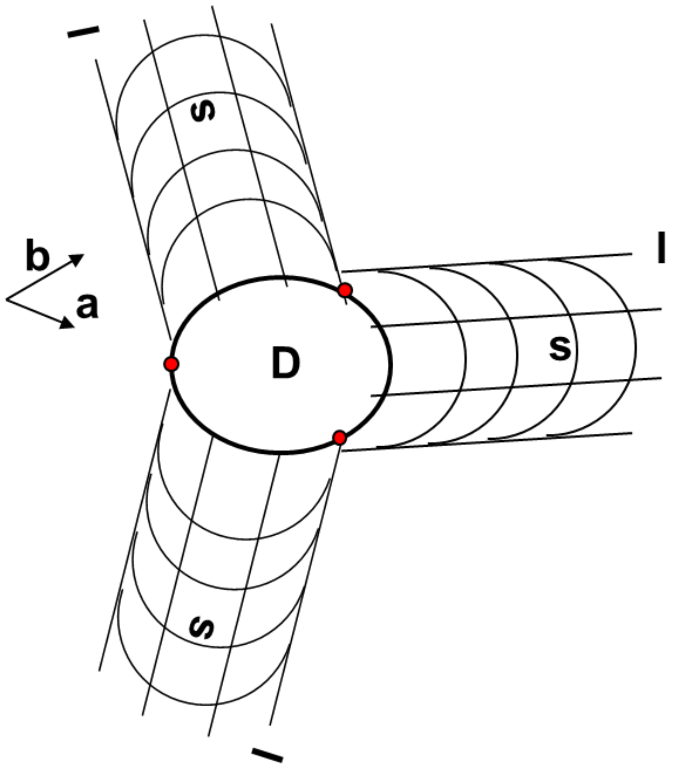

Рис. 4. Картина на начальной плоскости (a,b) при образовании точечной δ-функции

Если вычислить вариационную производную от J из (18) при изменяющемся t, то получим

$$0=\delta\iint\limits_{D(t)}\begin{pmatrix}X(a,b;t)\\Y(a,b;t)\end{pmatrix}dadb=\iint\limits_{D(t)}\delta_t\begin{pmatrix}X(a,b;t)\\Y(a,b;t)\end{pmatrix}dadb+$$
$$\oint\limits_{\partial D(t)}\begin{pmatrix}X(a,b;t)\\Y(a,b;t)\end{pmatrix}\cdot\left[\vec{n}_{\partial A}\cdot(\delta a,\delta b)\right]d(\partial D). \tag{19}$$

Последний интеграл в (19) равен нулю в силу равенства нулю вариации J_1 в формуле (17) и аналогичной для J_2, тогда имеем

$$0=\iint\limits_{D(t)}\delta_t\begin{pmatrix}\dfrac{x-a}{t}-u_0(a,b)\\\dfrac{y-b}{t}-v_0(a,b)\end{pmatrix}\rho_0(a,b)dadb=\frac{1}{t}\left\{\iint\limits_{D(t)}\begin{pmatrix}\dot{x}-\dfrac{x-a}{t}\\\dot{y}-\dfrac{y-b}{t}\end{pmatrix}\rho_0(a,b)dadb\right\}. \tag{20}$$

Отсюда

$$\begin{pmatrix}\dot{x}\\\dot{y}\end{pmatrix}\iint\limits_{D(t)}\rho_0(a,b)dadb=\iint\limits_{D(t)}\begin{pmatrix}\dfrac{x-a}{t}\\\dfrac{y-b}{t}\end{pmatrix}\rho_0(a,b)dadb=\iint\limits_{D(t)}\begin{pmatrix}u_0(a,b)\\v_0(a,b)\end{pmatrix}\rho_0(a,b)dadb, \tag{21}$$

поскольку $J(t)=0$, см. (18).

То есть «тяжелая» точка движется в соответствии с законами сохранения, когда скорость движения в данный момент времени равна импульсу такой точки, деленному на ее массу.

Итак, соображения, изложенные выше, представляют собой обобщение на двумерный случай характеристик ситуации возникновения особенностей, ранее найденных для одномерного случая [4, 5]. А именно, в одномерной ситуации при фиксированных начальных данных рассматривалась специальная «функция от точки», глобальный минимум которой определял гладкое решение при заданных (t,x). Если таких минимумов оказывалось, например, два, то есть значения нашей «функции от точки» совпадали (а это означает, что соответствующий интеграл равнялся нулю, см. (3)), то тогда в точке (t,x) формировалась δ-особенность. Для двумерного случая, как описано выше, рассматривается специальная «вектор-функция площади» при заданных (t,x), вместо минимума берем экстремаль $\delta J=0$ и находим не точку минимума, а экстремальную кривую. Если кривая вырождается в точку, то это означает гладкость решения в (t,x), если кривая не вырождается, то получаем ситуацию, когда точка (t,x) лежит на кривой, несущей δ-особенность. Если же таких кривых оказывается несколько, то они ограничивают некоторую область, см. Рис. 4, и равенство нулю соответствующего интеграла определяет движение формирующейся в этом случае δ-особенности в точке (t,x).

Как видно из представленного описания, размерность очень сильно влияет на законы формирования особенностей в системе уравнений газовой динамики без давления. При этом вариационные процедуры фактически применяются уже не к функциям, а к функционалам, аргументом которых являются области в пространстве соответствующей размерности (в нашем случае в $\mathbb{R}^2$). Это свойство не позволяет сразу достичь необходимого уровня конструктивности вариационного подхода, но демонстрирует возможность применения вариационной методологии и в двумерном (многомерном) случае.

Библиографический список

[1] Hopf E. The partial differential equation $u_t+uu_x=\mu u_{xx}$ // Comm. Pure Appl. Math. — 1950. — V. 3. — p. 201 – 230.

[2] Lax P.D. Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation // Comm. Pure Appl. Math. — 1954. — V. 7. — pp. 159 – 193.

[3] Олейник О.А. Задача Коши для нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка с разрывными начальными условиями // Труды Моск. Мат. Об-ва. — 1956. — Т. 5. — с. 433 – 454.

[4] И Вейнан, Рыков Ю.Г., Синай Я.Г. Вариационный принцип Лакса-Олейник для некоторых одномерных систем квазилинейных уравнений // Успехи матем. наук. — 1995. — Т. 50. — Вып. 1. — с. 193 – 194.

[5] E Weinan, Rykov Yu.G., Sinai.Ya.G. Generalized variational principles, global weak solutions and behavior with random initial data for systems of conservation laws arising in adhesion particle dynamics // Comm.Math.Phys. — 1996. — V. 177. — pp. 349 – 380.

[6] Рыков Ю.Г. Вариационное представление обобщенных решений квазилинейных гиперболических систем и возможные алгоритмы для гибридных вычислительных комплексов // Препринты ИПМ им.М.В.Келдыша. — 2011. — № 62. — 9 с. — URL: http://keldysh.ru/papers/2011/prep62/prep2011_62.pdf

[7] Рыков Ю.Г., Феодоритова О.Б. О методологии вариационного представления обобщенных решений для квазилинейных гиперболических систем двух уравнений // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. — 2014. — № 84. — 22 с. URL: http://keldysh.ru/papers/2014/prep2014_84.pdf

[8] Рыков Ю.Г., Феодоритова О.Б. Системы квазилинейных законов сохранения и алгоритмизация вариационных принципов // ЖВМ. — 2015. — Т. 55. — № 9. — с. 1586 – 1598.

[9] Rykov Yu.G. On the nonhamiltonian character of shocks in 2-D pressureless gas // Bolletino dell' U.M.I. Sezione B (8). — 2002. — V. 5-B. — pp. 55 – 78.

[10] Рыков Ю.Г. Вариационный принцип для двумерной системы уравнений газовой динамики без давления // Успехи матем. наук. — 1996. — Т. 51. — Вып. 1. — с. 165 – 166.