В.А.Гриценко

ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ РАСШИРЕНИЯ КОЛЬЦА ГЕККЕ ПОЛНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ГРУППЫ

В этой работе описан широкий класс многочленов над кольцом Гекке группы GL_n, раскладывающихся на множители над кольцом Гекке подходящей параболической подгруппы группы GL_n. Значение подобных разложений в теории эйлеровых произведений было проанализировано А.Н.Андриановым в статье [I] (см.также работу автора [3]). Разложение многочлена шестой степени над кольцом Гекке группы $\Gamma_{4,2} = \left\{ \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \in GL_4(\mathbb{Z}) \right\}$ (см. пример 3 этой статьи) находит свое применение (см.[5]) в теории эрмитовых модулярных форм рода 2 (группа $SU(2,2)$). Мы надеемся,что это разложение может быть применено и в теории автоморфных форм на группе GL_4.

Пусть G – группа, Γ – ее подгруппа и $S \subset G$ – полугруппа такая, что $\Gamma S = S\Gamma = S$ и двойной класс $\Gamma g \Gamma$ является объединением конечного числа левых и правых смежных классов на Γ для любого элемента g из S. Пару (Γ, S) будем называть парой Гекке. Кольцо Гекке $L(\Gamma, S)$ это Γ-инвариантное подпространство $\mathbb{Q}$-векторного пространства V, состоящего из всех формальных конечных линейных комбинаций

$$X = \sum_i a_i \Gamma g_i \quad ; \quad a_i \in \mathbb{Q}, \; g_i \in S .$$

Представление группы Γ на V задается равенством

$$X \longrightarrow X_\gamma = \sum a_i \Gamma(g_i \gamma) .$$

Для любых двух элементов

$$X = \sum a_i \Gamma g_i \quad \text{и} \quad Y = \sum b_j \Gamma h_j$$

кольца $L(\Gamma, S)$ их произведение $X \cdot Y$ определено равенством

$$X \cdot Y = \sum_{i,j} a_i b_j \Gamma(g_i h_j) ;$$

это умножение ассоциативно (см.[I , 7]).

В этом параграфе мы рассмотрим кольца Гекке полной линейной группы и ее стандартных параболических подгрупп.

Фиксируем натуральное число n и простое p.

Положим

$$\Gamma_n = GL_n(\mathbb{Z}), \quad \Gamma_{n,k} = \left\{ \gamma = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline O_{n-k,k} & D \end{array}\right] \in \Gamma_n \right\},$$

где $O_{n-k,k}$ – нулевая $(n-k)\times k$ матрица;

$$\mathbb{Z}[p^{-1}] = \{ r = a p^{b}\ ;\ a, b \in \mathbb{Z} \},$$

$$S_n = S_n^{(p)} = \{ N \in M_n(\mathbb{Z}[p^{-1}]);\ \det N = \pm p^{\delta},\ \delta \in \mathbb{Z} \},$$

$$S_{n,k} = \left\{ N = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline O_{n-k,k} & D \end{array}\right] \in S_n^{(p)} \right\}.$$

Пары (Γ_n, S_n) и $(\Gamma_{n,k}, S_{n,k})$ являются парами Гекке. Введем соответствующие кольца

$$L^n = L(\Gamma_n, S_n) \quad , \quad L^{n,k} = L(\Gamma_{n,k}, S_{n,k}).$$

Хорошо известно, что любой элемент X кольца Гекке L^n можно представить в виде суммы классов $X = \sum a_i \Gamma_n g_i$, где

$$g_i = \begin{pmatrix} p^{d_{i1}} & * & \dots & * & * \\ 0 & p^{d_{i2}} & \dots & * & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & p^{d_{in}} \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Положим тогда

$$\varepsilon(X) = \sum_i a_i \Gamma_{n,k} g_i .$$

Легко доказать, что отображение ε является гомоморфным вложением кольца Гекке L^n в кольцо $L^{n,k}$. Мы будем отождествлять кольцо L^n с его образом $\varepsilon(L^n)$ при этом вложении.

Кольцо $L^{n,k}$ назовем параболическим расширением кольца L^n. Оно не является коммутативным и обладает делителями нуля. Исследуем его структуру, следуя методу Андрианова (см. [I]), который исследовал расширение кольца Гекке группы $Sp_n(\mathbb{Z})$, отвечающее ее "треугольной" параболической подгруппе Γ_0 (см. также статью автора [3]).

Положим

$$\Lambda_-^{n,k} = \Gamma_{n,k}\begin{pmatrix} pE_k & 0 \\ 0 & E_{n-k}\end{pmatrix}\Gamma_{n,k}, \quad \Lambda_+^{n,k} = \Gamma_{n,k}\begin{pmatrix} E_k & 0 \\ 0 & pE_{n-k}\end{pmatrix}\Gamma_{n,k},$$

где через E_m обозначена единичная матрица порядка m; введем централизаторы C_- и C_+ элементов $\Lambda_-^{n,k}$, $\Lambda_+^{n,k}$

$$C_{\mp}^{n,k} = \{X \in L^{n,k}\ ;\ X\Lambda_{\mp}^{n,k} = \Lambda_{\mp}^{n,k} X\}.$$

Кольца $L^{n,k}$ и $L^{n,n-k}$ связаны друг с другом при помощи антиавтоморфизма $*$. Для двойных классов это отображение задается следующим образом

$$* : \Gamma_{n,k}\, g\, \Gamma_{n,k} \longmapsto \Gamma_{n,n-k}\, g^*\, \Gamma_{n,n-k},$$

где

$$g^* = \begin{bmatrix} 0 & & 1 \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ 1 & & 0\end{bmatrix} {}^t g \begin{bmatrix} 0 & & 1 \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ 1 & & 0\end{bmatrix},$$

а затем отображение $*$ доопределяется по линейности.

ЛЕММА I. Отображение $*$ является антиавтоморфизмом кольца $L^{n,k}$ на кольцо $L^{n,n-k}$. Кольцо L^n, содержащееся как в кольце $L^{n,k}$, так и в $L^{n,n-k}$, неподвижно при этом отображении.

Утверждение леммы следует из того факта, что умножение двойных классов $\Gamma g \Gamma$, определенное при помощи разложения на левые смежные классы, совпадает с умножением, определенным при помощи разложения на правые смежные классы. Кольцо L^n неподвижно относительно $*$, так как любой двойной класс $\Gamma_n g \Gamma_n$ может быть приведен к диагональному виду, а для диагональной матрицы g $(\Gamma_n g \Gamma_n)^* = \Gamma_n g \Gamma_n$.

Отметим, что $(X^*)^* = X$, $(\Lambda_-^{n,k})^* = \Lambda_+^{n,n-k}$, $(C_-^{n,k})^* = C_+^{n,n-k}$, поэтому все утверждения, сформулированные ниже для колец C_-, справедливы (с соответствующими изменениями) для колец C_+.

В дальнейшем нам будет полезна следующая лемма.

ЛЕММА 2. Пусть

$$X = \Gamma_{n,k} \left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & D \end{array}\right] \Gamma_{n,k} \in L^{n,k} .$$

Тогда разложение X на левые классы по $\Gamma_{n,k}$ имеет вид

$$\sum_{\substack{\mu \in \Gamma_k^A \setminus \Gamma_k \\ \nu \in \Gamma_{n-k}^D \setminus \Gamma_{n-k} \\ B \in V(A,D)}} \Gamma_{n,k} \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \nu \end{bmatrix} ,$$

где $\Gamma_m^N = \Gamma_m \cap N^{-1} \Gamma_m N$, а $V(A,D)$ - полная система матриц вида AY, где $Y \in M_{k,n-k}(\mathbb{Z})$, попарно несравнимых справа по модулю D.

ЛЕММА 3. Кольцо $C_-^{n,k}$ - является коммутативной областью целостности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $M \in S_n^{(p)}$, а $(p^{m_1}, \dots, p^{m_n})$ - набор элементарных делителей матрицы M. Положим

$$min_p(M) = \min_i (m_i), \quad max_p(M) = \max_i (m_i) .$$

Из леммы 2 следует, что двойные классы вида

$$\dot{\Gamma}_{n,k} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} \Gamma_{n,k} , \text{ где } \quad min_p(A) \geqslant max_p(D), \qquad (2)$$

образуют линейный базис пространства $C_-^{n,k}$ (рассмотреть равенство $(\Lambda_-^{n,k})^m X = X(\Lambda_-^{n,k})^m$ для больших m). Кольца L^k и L^{n-k} - коммутативные области целостности. Лемма доказана.

Напомним определение сферического отображения. Пусть $X = \sum_i a_i \Gamma_n g_i$, где g_i имеют вид (I). Тогда отображение

$$\Phi_n(X) = \sum_i a_i \Phi_n(\Gamma_n g_i) = \sum_i a_i \prod_{j=1}^{n} (x_j p^{-j})^{d_{ij}} \qquad (3)$$

является изоморфизмом кольца L^n с кольцом симметрических многочленов $\mathbb{Q}^{\Sigma}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ (см.[I , 6 , 8]). Определим коммутативную диаграмму, состоящую из гомоморфизмов Ω, φ и $\Phi = \varphi \circ \Omega$:

$$\begin{tikzcd} L^{n,k} \arrow[rr, "\Phi_{n,k}"] \arrow[dr, "\Omega_{n,k}"'] & & \mathbb{Q}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}] \\ & L[x_{k+1}^{\pm}, \dots, x_n^{\pm}] \arrow[ur, "\varphi_k"'] & \end{tikzcd}$$

Если $X = \sum a_i \Gamma_{n,k} \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ 0 & D_i \end{bmatrix}$, то положим

$$\Omega(X) = \sum a_i (\Gamma_k A_i) \Phi_{n-k} (\Gamma_{n-k} D_i).$$

Гомоморфизм φ_k совпадает со сферическим отображением Φ_k на L^k и сохраняет переменные x_i $(i > k)$. Ясно, что сужение отображения $\Phi_{n,k}$ на кольцо $L^n \subset L^{n,k}$ совпадает с отображением Φ_n.

Введем некоторые многочлены над кольцом L^n. Положим

$$s^{n,k}(t) = \prod_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} (1 - x_{i_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_k} t) = \sum_{0 \le l \le \binom{n}{k}} s_l^{n,k} t^l,$$

$$S^{n,k}(t) = \sum_l \Phi_n^{-1}(s_l^{n,k}) t^l. \tag{4}$$

Докажем, что многочлены $S^{n,k}(t) \in L^n[t]$ имеют правосторонний корень в кольце $L^{n,k}[t]$.

ЛЕММА 4.

$$\sum_{0 \le l \le \binom{n}{k}} \left(p^{\langle k \rangle - \langle n \rangle} \Lambda_-^{n,k} \Delta_n^{-1} \right)^l S_l^{n,n-k} = 0,$$

$$\sum_{0 \le l \le \binom{n}{k}} \left(p^{\langle k \rangle} \Lambda_-^{n,k} \right)^l S^{n,k}_{\binom{n}{k} - l} = 0,$$

где $\binom{n}{k}$ – биномиальный коэффициент, $\langle n \rangle = \frac{n(n+1)}{2}$,

$$\Delta_n = \Gamma_n \, p \, E_n \, \Gamma_n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Элемент Δ_n принадлежит центру кольца $L^{n,k}$. Элемент $(\Lambda_-^{n,k})^l S_l^{n,n-k}$ принадлежит кольцу $C_-^{n,k}$, так как из теории элементарных делителей следует, что этот элемент есть линейная комбинация смежных классов типа (2). Отображение $\Omega_{n,k}$ (следовательно и $\Phi_{n,k}$) инъективно на C_-. Но значение $\Phi_{n,k}$ на левой части первого равенства равно 0, так как $\Phi(\Lambda_-^{n,k}) =$

$p^{-\langle k\rangle}x_1\cdot\ldots\cdot x_k$, а $\Phi(p^{\langle n\rangle}\Delta_n)=x_1\cdot\ldots\cdot x_n$. Так как

$$S^{n,k}_{\binom{n}{k}-\ell}=S^{n,n-k}_{\ell}\,(x_1\cdot\ldots\cdot x_n)^{\binom{n-1}{k-1}-\ell},$$

то второе равенство следует из первого.

Равенства леммы 4 позволяют построить рекуррентную последовательность "отрицательных степеней" элемента $\Lambda^{n,k}_-$ (см. § 2.2 [I] и § 3 [3]):

$$(\Lambda^{n,k}_-)^{-m}=-\sum_{\ell\geqslant 1}(\Lambda^{n,k}_-)^{\ell-m}\,(p^{\langle k\rangle-\langle n\rangle}\Delta_n^{-1})^{\ell}\,S^{n,n-k}_{\ell} \qquad (5)$$

Используя коммутативность колец $C^{n,k}_-$ и L^n, легко доказать, что

$$(\Lambda^{n,k}_-)^{m}\,T\,(\Lambda^{n,k}_-)^{-m}=T \qquad (6)$$

для любого $T\in L^n$ такого, что $(\Lambda^{n,k}_-)^m T\in C^{n,k}$.

ЛЕММА 5. Сужение гомоморфизма $\Phi_{n,k}$ на модуль

$$A^{n,k}_-=C^{n,k}_-\cdot L^n=\Big\{\sum X_iY_i\,;\ X_i\in C^{n,k}_-,\ Y_i\in L^n\Big\}$$

инъективно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (6) $(\Lambda^{n,k}_-)^m(\Lambda^{n,k}_-)^{-m}=1$, поэтому $\Phi_{n,k}((\Lambda^{n,k}_-)^{-m})\neq 0$. Для произвольного ненулевого $Z\in A^{n,k}$ и достаточно большого m $\Phi_{n,k}(Z)=\Phi_{n,k}(\Lambda^m_- Z\Lambda^{-m}_-)=\Phi_{n,k}((\Lambda^{n,k}_-)^m Z)\,\Phi_{n,k}((\Lambda^{n,k}_-)^{-m})\neq 0$, так как сужение $\Phi_{n,k}$ на $C^{n,k}_-$ инъективно (см. (2)).

ТЕОРЕМА. Пусть

$$P(t)=\sum_{\ell=0}^{m}P_\ell t^\ell \qquad (P_\ell\in L^n)$$

- многочлен из кольца $L^n[t]$. Предположим, что его Φ-образ

$$(\Phi_nP)(t)=\sum_{\ell=0}^{m}\Phi_n(P_\ell)\,t^\ell=\Big(\sum f_i t^i\Big)\Big(\sum g_j t^j\Big)$$

раскладывается в произведение двух многочленов $f(t)$ и $g(t)$. Пусть все коэффициенты f_i принадлежат образу $\Phi(C^{n,k}_-)$ кольца $C^{n,k}_-$:

$$f_i=\Phi_{n,k}(F_i),\quad F_i\in C^{n,k}_-,\ f_0=1.$$

Тогда все коэффициенты многочлена $g(t)$ принадлежат Φ-образу пространства $A^{n,k}_-$:

$$g_j=\Phi_{n,k}(G_j),\quad G_j\in A^{n,k}_-,$$

$$X \mapsto X^- = \Gamma_{n,n-1}\begin{bmatrix} g & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}\Gamma_{n,n-1} \in C_-^{n,n-1},$$

$$X \mapsto X^+ = \Gamma_{n,n-1}\begin{bmatrix} g & 0 \\ 0 & \det g\end{bmatrix}\Gamma_{n,n-1} \in C_+^{n,n-1}.$$

Рассмотрим многочлен

$$Q^-_{n-1}(t) = \sum_{\ell=0}^{n-1}(-1)^\ell q^-_\ell t^\ell \in C_-^{n,n-1}[t].$$

Тогда

$$\Phi_{n,n-1}(Q^-_{n-1}(t)) = \prod_{i=1}^{n-1}(1-p^{-1}x_i)$$

и утверждение теоремы приводит нас к разложению

$$Q_n(t) = Q^-_{n-1}(t)\,R(t),$$

где $R(t)$ – линейный многочлен. Сравнивая коэффициенты при t^1, получаем

$$Q_n(t) = Q^-_{n-1}(t)\,(1-\Lambda_+^{n,n-1}t),$$

где

$$\Lambda_+^{n,n-1} = \Gamma_{n,n-1}\operatorname{diag}(\underbrace{1,\dots,1}_{n-1},p)\,\Gamma_{n,n-1}.$$

В качестве следствия этого разложения легко получается теорема о рациональности ряда Гекке (см. [7], [8]). Действительно, коэффициенты многочлена $Q^-_{n-1}(t)$ принадлежат коммутативной области целостности $C_-^{n,n-1}$, поэтому эти многочлены можно обратить в кольце формальных степенных рядов. Тогда

$$Q_n(t)^{-1} = \Big(\sum_{\ell\geq 0}\Lambda_+^\ell t^\ell\Big)\Big(\sum_{m\geq 0}T^-_{n-1}(p^m)\,t^m\Big)$$

(мы применяем индукцию по n). Так как

$$\Gamma_{n,n-1}\begin{bmatrix} X & b \\ 0 & p^m\end{bmatrix} = \Gamma_{n,n-1}\begin{bmatrix} E & b \\ 0 & p^m\end{bmatrix}\begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

для произвольного левого класса, то (см. лемму 2)

$$T_n(p^m) = \sum_{0\leq k\leq n}(\Lambda_-^{n,n-1})^\ell\, T^-_{n-1}(p^{m-\ell})$$

и

$$Q_n(t)^{-1} = \sum_{m\geq 0} T_n(p^m)\,t^m.$$

и для любых G_j, удовлетворяющих этому условию, имеет место следующее разложение многочлена $P(t)$ над кольцом $L^{n,k}$:

$$P(t) = \left(\sum_{i=0}^{N_1} F_i t^i\right)\left(\sum_{j=0}^{N_2} G_j t^j\right).$$

Эта теорема аналогична теоремам 2.3.I [I] и 4.I [3]. Для ее доказательства достаточно обратить многочлен $F(t)$ в кольце степенных рядов $C_-^{n,k}[[t]]$ ($C_-^{n,k}$ – коммутативная область целостности) и воспользоваться инъективностью отображения на пространстве $A_-^{n,k}$.

Примеры разложений многочленов над кольцом Гекке группы $GL_n(\mathbb{Z})$.

Пример I.

$$S^{n,k}(t) = (1 - p^{<k>}\Lambda_-^{n,k}t)\, R(t),$$

где $R(t) \in A_-^{n,k}[t]$,

$$S^{n,k}(t) = R^*(t)(1 - p^{<k>}\Lambda_+^{n,n-k}t),$$

где $R(t) \in A_+^{n,n-k}[t]$.

Первое разложение получается непосредственно из теоремы. Второе разложение получается из первого применением антиавтоморфизма $*$ (см.лемму I).

Можно выписать значения коэффициентов многочлена $R(t)$, используя достаточно большую "отрицательную степень" $(\Lambda_-^{n,k})^{-m}$ элемента $\Lambda_-^{n,k}$. Однако явное описание этих степеней наталкивается на вычислительные трудности (см.[2],[4]).

Пример 2. Рассмотрим многочлен

$$Q_n(t) = S^{n,1}(p^{-1}t) = \Phi_n^{-1}\left(\prod_{i=1}^{n}(1-p^{-1}x_i t)\right) = \sum_{\ell=0}^{n}(-1)^\ell q_\ell t^\ell,$$

который является знаменателем ряда Гекке

$$\sum_{n\geq 0} T_n(p^m)\, t^m$$

кольца L^n (см. [7], [8]). Напомним, что $T(p^n)$ является суммой всех различных двойных смежных классов по группе Γ_n, имеющих определитель p^n. (Наличие множителя p^{-1} в определении многочлена Q_n связано с выбранной в (3) нормировкой сферического отображения Φ_n). Рассмотрим кольцо Гекке L^n как подкольцо кольца $L^{n,n-1}$ и определим два вложения целочисленного подкольца кольца Гекке L^{n-1} в $L^{n,n-1}$: если $g \in S_{n-1}^{(p)} \cap M_{n-1}(\mathbb{Z})$ и $X = \Gamma_{n-1} g \Gamma_{n-1}$, то

Пример 3. Если $n=2k$ – четно, то разложения примера I показывают, что многочлен $S^{2k,k}(t)$ обладает правым делителем $(1-\Lambda_+^{2k,k}p^{<k>}t)$ и левым делителем $(1-\Lambda_-^{2k,k}p^{<k>}t)$. Можно доказать, что существует симметричное разложение вида

$$S^{2k,k}(t)=(1-p^{<k>}\Lambda_-^{2k,k}t)R(t)(1-p^{<k>}\Lambda_+^{2k,k}t).$$

Ниже мы выпишем такое разложение для случая группы GL_4. Это разложение использовано в статье [5] для построения рядов Дирихле с эйлеровыми произведениями для голоморфных модулярных форм, отвечающих унитарной группе $SU(2,2)$. Отметим также, что многочлен $S^{4,2}(t)$ отвечает кососимметрическому квадрату стандартного представления группы GL_4.

Пусть

$$S^{4,2}(t)=\Phi_4^{-1}\Big(\prod_{1\leq i<j\leq 4}(1-x_ix_jt)\Big),$$

тогда

$$S^{4,2}(p^{-3}t)=(1-\Lambda_-^{4,2}t)(1-Xt+Yt^2-Zt^3+Ut^4)(1-\Lambda_+^{4,2}t),$$

где

$$X=\Gamma_{4,2}\operatorname{diag}(1,p,1,p)\Gamma_{4,2},$$

$$Y=p\Gamma_{4,2}\operatorname{diag}(1,p^2,p,p)\Gamma_{4,2}+p\Gamma_{4,2}\operatorname{diag}(p,p,1,p^2)\Gamma_{4,2}+pR_p+$$
$$+(p^3+p^2+p-p^4)\Delta,$$

$$Z=p^3\sum_{a \bmod p}\left(\Delta\Gamma_{4,2}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&p&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&p\end{pmatrix}\Gamma_{4,2}+\Gamma_{4,2}\begin{pmatrix}p^2&0&0&0\\0&p&0&a\\0&0&p^2&0\\0&0&0&p\end{pmatrix}\right)-p^4\Delta X,$$

$$U=p^5\Delta\,(R_p-(p^2-p-1)\Delta),$$

где $\Delta=\Gamma_{4,2}\operatorname{diag}(p,p,p,p)\Gamma_{4,2}$ и

$$R_p=\sum_{\substack{X \bmod p\\ \operatorname{rang}_p X=1}}\Gamma_{4,2}\begin{pmatrix}E_2&X\\0&E_2\end{pmatrix}.$$

Литература

1. А н д р и а н о в А.Н. Мультипликативная арифметика зигелевых модулярных форм. – Успехи мат.наук, 1979, т.34, № 1, с.67–135.
2. А н д р и а н о в А.Н. Эйлеровы разложения тэта-преобразований зигелевых модулярных форм рода n. – Мат.сб.,1978, т.105, № 3, с.291–341.
3. Г р и ц е н к о В.А. Действие модулярных операторов на коэффициенты Фурье-Якоби модулярных форм. – Мат.сб.,1982, т.119, № 2, с.248–277.
4. Г р и ц е н к о В.А. Рекуррентные соотношения в теории операторов Гекке. – В кн.: Аналитическая теория чисел и теория функций 5. Зап.науч.семин.ЛОМИ, 1983, т.125,с.65–73.
5. Г р и ц е н к о В.А. Дзета-функция шестой степени для эрмитовых модулярных форм рода 2. – В кн.: Аналитическая теория чисел и теория функций 7. Зап.научн.семин.ЛОМИ,1986, т.154, с.46–66.
6. S a t a k e I. Theory of spherical functions on reductive algebraic groups over p-adic fields. – Publ.Math. IHES, 1963, N 18, p.1–69.
7. Ш и м у р а Г. Введение в арифметическую теорию автоморфных функций. М., 1973. 326 с.
8. T a m a g a w a T. On the ζ-functions of a division algebra. – Ann.Math., vol.77, N 2, p.387–405.