



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

A. O. Vatulyan, S. A. Nesterov, On the identification problem of the thermomechanical characteristics of the finite functionally graded cylinder, *Izv. Saratov Univ. Math. Mech. Inform.*, 2021, Volume 21, Issue 1, 35–47

DOI: 10.18500/1816-9791-2021-21-1-35-47

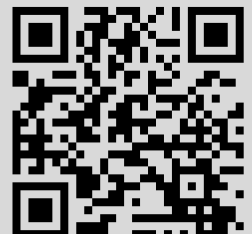
Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 3.94.202.151

November 4, 2024, 20:55:08





Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 1. С. 35–47  
*Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, vol. 21, iss. 1, pp. 35–47

Научная статья

УДК 539.3

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-35-47>

## О задаче идентификации термомеханических характеристик конечного функционально-градиентного цилиндра

А. О. Ватульян<sup>1,2✉</sup>, С. А. Нестеров<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Институт математики, механики и компьютерных наук имени И. И. Воровича, Южный федеральный университет, Россия, 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, д. 8а

<sup>2</sup>Южный математический институт — филиал Владикавказского научного центра РАН, Россия, 362027, г. Владикавказ, ул. Ватулина, д. 53

**Ватульян Александр Ованесович**, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой теории упругости; заведующий отделом дифференциальных уравнений, [aovatulyan@sfedu.ru](mailto:aovatulyan@sfedu.ru), [vatulyan@aaanet.ru](mailto:vatulyan@aaanet.ru), <https://orcid.org/0000-0003-0444-4496>

**Нестеров Сергей Анатольевич**, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, [1079@list.ru](mailto:1079@list.ru)

**Аннотация.** Рассмотрена задача об осесимметричных колебаниях функционально-градиентного конечного полого цилиндра. Торцы цилиндра теплоизолированы и находятся в условиях скользящей заделки. На внутренней поверхности цилиндра, свободной от напряжений, поддерживается нулевая температура, а на внешней действует комбинированная термосиловая нагрузка. Прямая задача после применения преобразования Лапласа решена на основе метода разделения переменных. Получен набор канонических линейных систем дифференциальных уравнений 1-го порядка, решение каждой из которых получено численно с помощью метода пристрелки. Поставлена коэффициентная обратная задача о нахождении термомеханических характеристик цилиндра конечной длины по дополнительной информации в трансформантах Лапласа, заданной на внешней поверхности цилиндра. Безразмерные термомеханические характеристики цилиндра восстанавливались в два этапа. На первом этапе определялось начальное приближение в классе положительных ограниченных функций. На втором этапе на основе решения соответствующих интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода находились поправки реконструируемых функций, и строился итерационный процесс их уточнения. В ходе вычислительных экспериментов выяснено, что монотонные характеристики восстанавливаются со значительной точностью; процедура реконструкции устойчива к зашумлению входной информации.

**Ключевые слова:** термоупругость, конечный цилиндр, идентификация, коэффициентная обратная задача, итерационный процесс, интегральное уравнение, метод пристрелки, метод разделения переменных

**Благодарности:** Работа выполнена при поддержке гранта Правительства РФ № 075-15-2019-1928 и Южного математического института — филиала Владикавказского научного центра РАН, г. Владикавказ.



**Для цитирования:** Ватульян А. О., Нестеров С. А. О задаче идентификации термомеханических характеристик конечного функционально-градиентного цилиндра // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 1. С. 35–47. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-35-47>

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

Article

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-35-47>

## On the identification problem of the thermomechanical characteristics of the finite functionally graded cylinder

A. O. Vatulyan<sup>1,2✉</sup>, S. A. Nesterov<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences named after I. I. Vorovich, Southern Federal University, 8-a Milchakova St., Rostov-on-Don 344090, Russia

<sup>2</sup>Southern Mathematical Institute — the Affiliate of Vladikavkaz Scientific Center of Russian Academy of Sciences, 53 Vatutina St., Vladikavkaz 362027, Russia

**Alexander O. Vatulyan**, [aovatulyan@sfnu.ru](mailto:aovatulyan@sfnu.ru), [vatulyan@aanet.ru](mailto:vatulyan@aanet.ru), <https://orcid.org/0000-0003-0444-4496>

**Sergei A. Nesterov**, [1079@list.ru](mailto:1079@list.ru)

**Abstract.** The problem of axisymmetric vibrations of a functionally graded finite hollow cylinder is considered. The ends of the cylinder are thermally insulated and are in a sliding fit. Zero temperature is maintained on the inner surface of the cylinder, free from stress, and a combined thermal and power load acts on the outer surface. The direct problem after applying the Laplace transform is solved based on the method of separation of variables. A set of canonical linear systems of differential equations of the 1st order is obtained, the solution of each of which is obtained numerically using the shooting method. The coefficient inverse problem of finding the thermomechanical characteristics of a finite length cylinder using additional information in Laplace transforms, given on the outer surface of the cylinder, is posed. The dimensionless thermomechanical characteristics of the cylinder were restored in two stages. At the first stage, the initial approximation was determined in the class of positive bounded functions. At the second stage, based on the solution of the corresponding Fredholm integral equations of the 1st kind, corrections of the reconstructed functions were found, and an iterative process of their refinement was constructed. In the course of computational experiments, it was found that monotonic characteristics are restored with good accuracy; the reconstruction procedure is resistant to input information noise.

**Keywords:** thermoelasticity, finite cylinder, identification, coefficient inverse problem, iterative process, integral equation, shooting method, variable separation method

**Acknowledgements:** This work was supported by a grant from the Government of the Russian Federation No. 075-15-2019-1928 and Southern Mathematical Institute — the Affiliate of Vladikavkaz Scientific Center of Russian Academy of Sciences, Vladikavkaz.

**For citation:** Vatulyan A. O., Nesterov S. A. On the identification problem of the thermomechanical characteristics of the finite functionally graded cylinder. *Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, vol. 21, iss. 1, pp. 35–47 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-35-47>

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)



## ВВЕДЕНИЕ

Элементы цилиндрической формы являются составными частями многих сложных конструкций, которые подвергаются большим термомеханическим нагрузкам. Как правило, такие конструкции изготавливают из однородных или слоистых материалов. Однако в настоящее время все шире применяются функционально-градиентные материалы (FGM) в качестве альтернативы слоистым композитам. FGM, как правило, представляют собой двухфазные композиты, синтезированные на основе металла и керамики, с непрерывным изменением термомеханических характеристик [1]. Важным преимуществом FGM по сравнению со слоистыми материалами является существенное снижение вероятности появления трещин и отслоений и более экономное расходование материала [2]. Технология изготовления FGM с требуемыми свойствами является достаточно сложной и требует на последнем этапе диагностики реальных свойств изделия.

Сегодня самые популярные методики диагностики свойств конструкций опираются на теоретические результаты, полученные в области коэффициентных обратных задач (КОЗ) механики, в том числе и термоупругости [3]. Эти задачи состоят в нахождении коэффициентов дифференциальных операторов термоупругости по некоторой дополнительной информации о полях смещений и температуры.

К настоящему времени выполнено довольно много исследований по решению КОЗ теплопроводности [4–8] и теории упругости [9–13] для неоднородных материалов. При этом наиболее часто используемым методом решения КОЗ является построение функционала невязки и его минимизация каким-либо из градиентных методов [5–7]. Рассматриваются и альтернативные методы решения, например метод обращения конечно-разностных схем [8], проекционные методы [14]. В работах [9, 10, 15] решение КОЗ основано на организации итерационного процесса, на каждом этапе которого решается линеаризованное операторное уравнение. Используя этот подход, была проведена идентификация механических и теплофизических характеристик функционально-градиентного бесконечного полого цилиндра.

Для некоторых материалов необходимо учитывать связанность полей и решать КОЗ термоупругости [3, 16]. В работах [14, 17] представлены результаты идентификации неоднородных термомеханических характеристик стержня, слоя, бесконечно длинного полого цилиндра.

Данная работа посвящена решению обратной задачи об идентификации термомеханических характеристик конечного цилиндра на основе дополнительной информации о трансформантах температуры и радиального перемещения на внешней боковой поверхности цилиндра.

## 1. РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу о неустановившихся осесимметричных колебаниях функционально-градиентного конечного полого термоупругого цилиндра. Цилиндр имеет высоту  $2h$ , внутренний радиус  $r_1$  и внешний радиус  $r_2$ . Торцы цилиндра теплоизолированы и находятся в условиях скользящей заделки. На внутренней поверхности цилиндра, свободной от механических нагрузок, поддерживается нулевая температура. Колебания цилиндра вызываются двумя способами: 1) распределенной по закону  $S(z)G_1(t)$  нормальной механической нагрузкой с амплитудой  $p^0$ ; 2) распределенным по закону  $R(z)G_2(t)$  тепловым потоком с амплитудой  $q^0$ , приложенным на внешней боковой поверхности. Термомеханические характеристики цилиндра изменяются только по радиальной координате:  $\lambda = \lambda(r)$ ,  $\mu = \mu(r)$ ,  $\rho = \rho(r)$ ,  $\gamma = \gamma(r)$ ,  $k = k(r)$ ,



$c = c(r)$ . Постановка задачи в цилиндрической системе координат  $(\rho, \phi, z)$  имеет вид:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\phi\phi}}{r} = \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{zr}}{r} = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}, \quad (2)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( k(r)r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) + k(r) \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = c(r) \frac{\partial \theta}{\partial t} + T_0 \gamma(r) \left( \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial t} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial t} \right), \quad (3)$$

$$u_z(r, \pm h, t) = 0, \quad \sigma_{rz}(r, \pm h, t) = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial z}(r, \pm h, t) = 0, \quad (4)$$

$$\sigma_{rr}(r_1, z, t) = \sigma_{rz}(r_1, z, t) = \theta(r_1, z, t) = 0, \quad (5)$$

$$\sigma_{rr}(r_2, z, t) = -p^0 S(z) G_1(t), \quad \sigma_{rz}(r_2, z, t) = 0, \quad -k(r_2) \frac{\partial \theta}{\partial r}(r_2, z, t) = q^0 R(z) G_2(t), \quad (6)$$

$$\theta(r, z, 0) = u_r(r, z, 0) = \frac{\partial u_r}{\partial t}(r, z, 0) = u_z(r, z, 0) = \frac{\partial u_z}{\partial t}(r, z, 0) = 0. \quad (7)$$

Здесь  $\theta$  — приращение температуры от температуры естественного состояния  $T_0$ ,  $u_r, u_z$  — компоненты радиального и осевого перемещения соответственно,  $\lambda$  и  $\mu$  — параметры Ламе,  $\rho$  — плотность,  $\gamma$  — коэффициент температурных напряжений,  $k$  — коэффициент теплопроводности,  $c$  — удельная объемная теплоемкость,  $\sigma_{rr} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda \left( \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) - \gamma \theta$ ,  $\sigma_{\phi\phi} = (\lambda + 2\mu) \frac{u_r}{r} + \lambda \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) - \gamma \theta$ ,  $\sigma_{zz} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_z}{\partial z} + \lambda \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right) - \gamma \theta$ ,  $\sigma_{zr} = \sigma_{rz} = \mu \left( \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right)$  — ненулевые компоненты тензора напряжений в цилиндрической системе координат.

Прямая задача термоупругости заключается в определении функций  $\theta = \theta(r, z, t)$ ,  $u_r = u_r(r, z, t)$ ,  $u_z = u_z(r, z, t)$  из (1)–(7) при известных термомеханических характеристиках  $\lambda(r)$ ,  $\mu(r)$ ,  $\rho(r)$ ,  $\gamma(r)$ ,  $k(r)$ ,  $c(r)$ .

Введем в рассмотрение безразмерные параметры и функции:  $\xi = \frac{r}{r_2}$ ,  $\eta = \frac{z}{r_2}$ ,  $\xi_0 = \frac{r_1}{r_2}$ ,  $\beta_0 = \frac{h}{r_2}$ ,  $U = \frac{u_r}{r_2}$ ,  $V = \frac{u_z}{r_2}$ ,  $W = \frac{\gamma_0 \theta}{\lambda_0}$ ,  $\tau = \frac{t}{r_2} \sqrt{\frac{\lambda_0}{\rho_0}}$ ,  $\delta_0 = \frac{\gamma_0 T_0}{c_0 \lambda_0}$ ,  $\Omega_{rr} = \frac{\sigma_{rr}}{\lambda_0}$ ,  $\Omega_{\phi\phi} = \frac{\sigma_{\phi\phi}}{\lambda_0}$ ,  $\Omega_{rz} = \frac{\sigma_{rz}}{\lambda_0}$ ,  $\Omega_{zz} = \frac{\sigma_{zz}}{\lambda_0}$ ,  $\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_0}$ ,  $g_0 = \frac{\mu_0}{\lambda_0}$ ,  $\bar{\mu} = \frac{\mu}{\mu_0}$ ,  $\bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0}$ ,  $\bar{\gamma} = \frac{\gamma}{\gamma_0}$ ,  $\bar{k} = \frac{k}{k_0}$ ,  $\bar{c} = \frac{c}{c_0}$ ,  $\chi_0 = \frac{p^0}{\lambda_0}$ ,  $\omega_0 = \frac{q^0 r_2 \gamma_0}{k_0 \lambda_0}$ . Здесь  $\lambda_0$ ,  $\mu_0$ ,  $\rho_0$ ,  $\gamma_0$ ,  $k_0$ ,  $c_0$  — характерные величины.

Обезразмеренная задача (1)–(7) примет вид:

$$\frac{\partial \Omega_{rr}}{\partial \xi} + \frac{\partial \Omega_{zr}}{\partial \eta} + \frac{\Omega_{rr} - \Omega_{\phi\phi}}{\xi} = \bar{\rho} \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial \Omega_{zr}}{\partial \xi} + \frac{\partial \Omega_{zz}}{\partial \eta} + \frac{\Omega_{zr}}{\xi} = \bar{\rho} \frac{\partial^2 V}{\partial \tau^2}, \quad (9)$$

$$\frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \bar{k}(\xi) \xi \frac{\partial W}{\partial \xi} \right) + \bar{k}(\xi) \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} = \bar{c}(\xi) \frac{\partial W}{\partial \tau} + \delta_0 \bar{\gamma}(\xi) \left( \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \tau} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 V}{\partial \eta \partial \tau} \right), \quad (10)$$

$$V(\xi, \pm \beta_0, \tau) = 0, \quad \Omega_{rz}(\xi, \pm \beta_0, \tau) = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial \eta}(\xi, \pm \beta_0, \tau) = 0, \quad (11)$$

$$\Omega_{rr}(\xi_0, \eta, \tau) = 0, \quad \Omega_{rz}(\xi_0, \eta, \tau) = 0, \quad W(\xi_0, \eta, \tau) = 0, \quad (12)$$

$$\Omega_{rr}(1, \eta, \tau) = \chi_0 S(\eta) G_1(\tau), \quad \Omega_{rz}(1, \eta, \tau) = 0, \quad -\bar{k}(1) \frac{\partial W}{\partial \xi}(1, \eta, \tau) = \omega_0 R(\eta) G_2(\tau), \quad (13)$$

$$W(\xi, \eta, 0) = U(\xi, \eta, 0) = \frac{\partial U}{\partial \tau}(\xi, \eta, 0) = V(\xi, \eta, 0) = \frac{\partial V}{\partial \tau}(\xi, \eta, 0) = 0. \quad (14)$$



После применения преобразования Лапласа по  $\tau$  к уравнениям (8)–(13) с учетом начальных условий (14) получим:

$$\frac{\partial \tilde{\Omega}_{rr}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{\Omega}_{zr}}{\partial \eta} + \frac{\tilde{\Omega}_{rr} - \tilde{\Omega}_{\phi\phi}}{\xi} = p^2 \bar{\rho} \tilde{U}, \quad (15)$$

$$\frac{\partial \tilde{\Omega}_{zr}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{\Omega}_{zz}}{\partial \eta} + \frac{\tilde{\Omega}_{zr}}{\xi} = p^2 \bar{\rho} \tilde{V}, \quad (16)$$

$$\frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \bar{k}(\xi) \xi \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \xi} \right) + \bar{k}(\xi) \frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial \eta^2} = p \bar{c}(\xi) \tilde{W} + \delta_0 p \bar{\gamma}(\xi) \left( \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \xi} + \frac{\tilde{U}}{\xi} + \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \eta} \right), \quad (17)$$

$$\tilde{V}(\xi, \pm \beta_0, p) = 0, \quad \tilde{\Omega}_{rz}(\xi, \pm \beta_0, p) = 0, \quad \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \eta}(\xi, \pm \beta_0, p) = 0, \quad (18)$$

$$\tilde{\Omega}_{rr}(\xi_0, \eta, p) = 0, \quad \tilde{\Omega}_{rz}(\xi_0, \eta, p) = 0, \quad \tilde{W}(\xi_0, \eta, p) = 0, \quad (19)$$

$$\tilde{\Omega}_{rr}(1, \eta, p) = \chi_0 S(\eta) \tilde{G}_1(p), \quad \tilde{\Omega}_{rz}(1, \eta, p) = 0, \quad -\bar{k}(1) \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \xi}(1, \eta, p) = \omega_0 R(\eta) \tilde{G}_2(p). \quad (20)$$

Задача (15)–(20) решается на основе метода разделения переменных. Для этого полагаем  $\nu_n = \frac{n\pi}{\beta_0}$ ,  $\tilde{U}(\xi, \eta, p) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n(\xi, p) \cos(\nu_n \eta)$ ,  $\tilde{V}(\xi, \eta, p) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{b}_n(\xi, p) \sin(\nu_n \eta)$ ,  $\tilde{W}(\xi, \eta, p) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{d}_n(\xi, p) \cos(\nu_n \eta)$ . В этом случае граничные условия на торцах цилиндра (18) выполняются тождественно.

Будем предполагать, что функции  $S(\eta)$  и  $R(\eta)$  — четные, тогда законы изменения внешней нагрузки допускают представления

$$S(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n \cos(\nu_n \eta), \quad R(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n \cos(\nu_n \eta),$$

где коэффициенты  $s_n = \int_{-\beta_0}^{\beta_0} S(\eta) \cos(\nu_n \eta) d\eta$ ,  $r_n = \int_{-\beta_0}^{\beta_0} R(\eta) \cos(\nu_n \eta) d\eta$ .

Распишем компоненты тензора напряжений, входящие в уравнения колебаний, в виде:

$$\tilde{\Omega}_{rr} = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{R}_{1n} \cos(\nu_n \eta), \quad \tilde{\Omega}_{zr} = \tilde{\Omega}_{rz} = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{R}_{2n} \sin(\nu_n \eta), \quad (21)$$

$$\tilde{\Omega}_{\phi\phi} = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{R}_{3n} \cos(\nu_n \eta), \quad \tilde{\Omega}_{zz} = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{R}_{4n} \cos(\nu_n \eta). \quad (22)$$

Здесь  $\tilde{R}_{1n} = (\bar{\lambda} + 2g_0 \bar{\mu}) \tilde{a}'_n + \bar{\lambda} \left( \frac{\tilde{a}_n}{\xi} + \nu_n \tilde{b}_n \right) - \bar{\gamma} \tilde{d}_n$ ,  $\tilde{R}_{2n} = g_0 \bar{\mu} (\tilde{b}'_n - \nu_n \tilde{a}_n)$ ,  $\tilde{R}_{3n} = \frac{\bar{\lambda} + 2g_0 \bar{\mu}}{\xi} \tilde{a}_n + \bar{\lambda} (\tilde{a}'_n + \nu_n \tilde{b}_n) - \bar{\gamma} \tilde{d}_n$ ,  $\tilde{R}_{4n} = (\bar{\lambda} + 2g_0 \bar{\mu}) \nu_n \tilde{b}_n + \bar{\lambda} \left( \tilde{a}'_n + \frac{1}{\xi} \tilde{a}_n \right) - \bar{\gamma} \tilde{d}_n$ .

Из (15)–(20) и (21), (22) с учетом введенных обозначений и свойств ортогональности систем функций  $\{\cos(\nu_n \eta)\}$  и  $\{\sin(\nu_n \eta)\}$  получим набор линейных систем дифференциальных уравнений:

при  $n = 0$ :

$$\tilde{a}'_0 = \frac{R_{10} - \bar{\lambda} \frac{\tilde{a}_0}{\xi} + \bar{\gamma} \tilde{d}_0}{\bar{\lambda} + 2g_0 \bar{\mu}}, \quad \tilde{R}'_{10} = - \left( \frac{\tilde{R}_{10} - \tilde{R}_{30}}{\xi} \right) + p^2 \bar{\rho} \tilde{a}_0,$$



$$\begin{aligned} \tilde{d}'_0 &= \frac{1}{\bar{k}(\xi)} \tilde{Q}_0, \quad \tilde{Q}'_0 = -\frac{\tilde{Q}_0}{\xi} + \left( p\bar{c}\tilde{d}_0 + p\delta_0\bar{\gamma} \left( \tilde{a}'_0 + \frac{\tilde{a}_0}{\xi} \right) \right), \\ \tilde{R}_{10}(\xi_0, p) &= 0, \quad \tilde{d}_0(\xi_0, p) = 0, \\ \tilde{R}_{10}(1, p) &= \chi_0 s_0 \tilde{G}_1(p), \quad \tilde{Q}_0(1, p) = -\omega_0 r_0 \tilde{G}_2(p); \end{aligned}$$

при  $n = 1, 2, \dots$ :

$$\tilde{a}'_n = \frac{\tilde{R}_{1n} - \bar{\lambda} \left( \frac{\tilde{a}_n}{\xi} + \nu_n \tilde{b}_n \right) + \bar{\gamma} \tilde{d}_n}{\bar{\lambda} + 2g_0 \bar{\mu}}, \quad \tilde{b}'_n = \frac{\tilde{R}_{2n}}{g_0 \bar{\mu}} + \nu_n \tilde{a}_n, \quad (23)$$

$$\tilde{R}'_{1n} = - \left( \nu_n \tilde{R}_{2n} + \frac{R_{1n} - R_{3n}}{\xi} \right) + p^2 \bar{\rho} \tilde{a}_n, \quad (24)$$

$$\tilde{R}'_{2n} = - \left( \nu_n \tilde{R}_{4n} + \frac{R_{2n}}{\xi} \right) + p^2 \bar{\rho} \tilde{b}_n, \quad \tilde{d}'_n = \frac{1}{\bar{k}(\xi)} \tilde{Q}_n, \quad (24)$$

$$\tilde{Q}'_n = -\frac{\tilde{Q}_n}{\xi} + (p\bar{c}(\xi) + \nu_n \bar{k}(\xi)) \tilde{d}_n + p\delta_0 \bar{\gamma} \left( \tilde{a}'_n + \frac{\tilde{a}_n}{\xi} + \nu_n \tilde{b}_n \right), \quad (25)$$

$$\tilde{R}_{1n}(\xi_0, p) = 0, \quad \tilde{R}_{2n}(\xi_0, p) = 0, \quad \tilde{d}_n(\xi_0, p) = 0, \quad (26)$$

$$\tilde{R}_{1n}(1, p) = \chi_0 s_n \tilde{G}_1(p), \quad \tilde{R}_{2n}(1, p) = 0, \quad \tilde{Q}_n(1, p) = -\omega_0 r_n \tilde{G}_2(p). \quad (27)$$

Здесь  $\tilde{R}_{3n}, \tilde{R}_{4n}$  выражаются через  $\tilde{a}_n, \tilde{b}_n, \tilde{d}_n, \tilde{R}_{1n}$ .

Задача (23)–(27) является линейной относительно искомым функций  $\tilde{a}_n(\xi, p), \tilde{b}_n(\xi, p), \tilde{d}_n(\xi, p), \tilde{Q}_n(\xi, p), \tilde{R}_{1n}(\xi, p), \tilde{R}_{2n}(\xi, p)$ . Ее решение при заданных  $\bar{\lambda}(\xi), \bar{\mu}(\xi), \bar{\rho}(\xi), \bar{\gamma}(\xi), \bar{k}(\xi), \bar{c}(\xi)$  может быть получено численно с помощью метода пристрелки, как в [10]. Для этого сначала строятся решения трех вспомогательных задач Коши с граничными условиями при  $\xi = \xi_0$ :

- 1)  $\tilde{R}_{1n}(\xi_0, p) = 0, \tilde{R}_{2n}(\xi_0, p) = 0, \tilde{d}_n(\xi_0, p) = 0, \tilde{a}_n(\xi_0, p) = 1, \tilde{b}_n(\xi_0, p) = 0, \tilde{Q}_n(\xi_0, p) = 0;$
- 2)  $\tilde{R}_{1n}(\xi_0, p) = 0, \tilde{R}_{2n}(\xi_0, p) = 0, \tilde{d}_n(\xi_0, p) = 0, \tilde{a}_n(\xi_0, p) = 0, \tilde{b}_n(\xi_0, p) = 1, \tilde{Q}_n(\xi_0, p) = 0;$
- 3)  $\tilde{R}_{1n}(\xi_0, p) \nu = 0, \tilde{R}_{2n}(\xi_0, p) = 0, \tilde{d}_n(\xi_0, p) = 0, \tilde{a}_n(\xi_0, p) = 0, \tilde{b}_n(\xi_0, p) = 0, \tilde{Q}_n(\xi_0, p) = 1.$

Решение каждой из полученных задач Коши реализовано численно с помощью метода Рунге – Кутты. Тогда решения набора систем (23)–(27) можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{1n}(\xi, p) &= A_n \tilde{R}_{1n}^I(\xi, p) + B_n \tilde{R}_{1n}^{II}(\xi, p) + C_n \tilde{R}_{1n}^{III}(\xi, p), \\ \tilde{R}_{2n}(\xi, p) &= A_n \tilde{R}_{2n}^I(\xi, p) + B_n \tilde{R}_{2n}^{II}(\xi, p) + C_n \tilde{R}_{2n}^{III}(\xi, p), \\ \tilde{a}_n(\xi, p) &= A_n \tilde{a}_n^I(\xi, p) + B_n \tilde{a}_n^{II}(\xi, p) + C_n \tilde{a}_n^{III}(\xi, p), \\ \tilde{b}_n(\xi, p) &= A_n \tilde{b}_n^I(\xi, p) + B_n \tilde{b}_n^{II}(\xi, p) + C_n \tilde{b}_n^{III}(\xi, p), \\ \tilde{d}_n(\xi, p) &= A_n \tilde{d}_n^I(\xi, p) + B_n \tilde{d}_n^{II}(\xi, p) + C_n \tilde{d}_n^{III}(\xi, p), \\ \tilde{Q}_n(\xi, p) &= A_n \tilde{Q}_n^I(\xi, p) + B_n \tilde{Q}_n^{II}(\xi, p) + C_n \tilde{Q}_n^{III}(\xi, p), \end{aligned}$$

где коэффициенты пристрелки  $A_n, B_n, C_n$  определяются из граничных условий при  $\xi = 1$ :

$$\begin{aligned} A_n \tilde{R}_{1n}^I(1, p) + B_n \tilde{R}_{1n}^{II}(1, p) + C_n \tilde{R}_{1n}^{III}(1, p) &= \chi_0 s_n \tilde{G}_1(p), \\ A_n \tilde{R}_{2n}^I(1, p) + B_n \tilde{R}_{2n}^{II}(1, p) + C_n \tilde{R}_{2n}^{III}(1, p) &= 0, \\ A_n \tilde{Q}_n^I(1, p) + B_n \tilde{Q}_n^{II}(1, p) + C_n \tilde{Q}_n^{III}(1, p) &= \omega_0 r_n \tilde{G}_2(p). \end{aligned}$$



## 2. РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Если температура и радиальное перемещение на внешней боковой поверхности цилиндра известны в любой момент времени  $\tau \in [0, \infty)$ , то обратную задачу можно сформулировать в пространстве трансформант Лапласа.

Рассмотрим обратную задачу об идентификации законов изменения  $\bar{\lambda}(\xi)$ ,  $\bar{\mu}(\xi)$ ,  $\bar{\rho}(\xi)$ ,  $\bar{\gamma}(\xi)$ ,  $\bar{k}(\xi)$ ,  $\bar{c}(\xi)$  из (15)–(20) по данным о трансформантах гармоник радиального перемещения  $\tilde{f}_n^{(1)}(1, p)$  и температуры  $\tilde{f}_n^{(2)}(1, p)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$

В работе [14] на основе слабой постановки прямой задачи получено два операторных соотношения для решения коэффициентной обратной задачи в трансформантах для изотропного неоднородного термоупругого тела:

$$\int_V \lambda \text{tr}(\varepsilon(\tilde{u})) \text{tr}(\varepsilon(\tilde{v})) dV + 2 \int_V \mu \varepsilon(\tilde{u}) \odot \varepsilon(\tilde{v}) dV + p^2 \int_V \rho \tilde{u} \tilde{v} dV - \int_V \gamma \tilde{\theta} \text{tr}(\varepsilon(\tilde{v})) dV = \int_{S_\sigma} \tilde{P} \tilde{v} dS_\sigma, \quad (28)$$

$$\int_V k \nabla \tilde{\theta} \nabla \tilde{\vartheta} dV + p \int_V c \tilde{\theta} \tilde{\vartheta} dV + p T_0 \int_V \gamma \tilde{\vartheta} \text{tr}(\varepsilon(\tilde{u})) dV = - \int_{S_q} \tilde{Q} \tilde{\vartheta} dS_q. \quad (29)$$

Здесь  $\tilde{v}$  и  $\tilde{\vartheta}$  — гладкие пробные функции.

Соотношения (28), (29) можно кратко описать как  $A_1(a, \tilde{u}, \tilde{\theta}, \tilde{v}) = B_1(\tilde{v})$  и  $A_2(a, \tilde{u}, \tilde{\theta}, \tilde{\vartheta}) = B_2(\tilde{\vartheta})$ . Оператор  $A_1(a, \tilde{u}, \tilde{\theta}, \tilde{v})$  является линейным по термомеханическим характеристикам  $a$ , компонентам трансформант физических полей  $\tilde{u}$  и  $\tilde{\theta}$  и пробным функциям  $\tilde{v}$ . Оператор  $A_2(a, \tilde{u}, \tilde{\theta}, \tilde{\vartheta})$  является линейным по термомеханическим характеристикам  $a$ , компонентам трансформант физических полей  $\tilde{u}$  и  $\tilde{\theta}$  и пробным функциям  $\tilde{\vartheta}$ .

Для формулировки обобщенного соотношения взаимности рассмотрим два состояния, которым соответствуют два набора характеристик  $a^{(1)}$ ,  $\tilde{u}^{(1)}$ ,  $\tilde{\theta}^{(1)}$  и  $a^{(2)}$ ,  $\tilde{u}^{(2)}$ ,  $\tilde{\theta}^{(2)}$ . Рассмотрим выражения:

$$A_1(a^{(1)}, \tilde{u}^{(1)}, \tilde{\theta}^{(1)}, \tilde{u}^{(2)}) - A_1(a^{(2)}, \tilde{u}^{(2)}, \tilde{\theta}^{(2)}, \tilde{u}^{(1)}) = B_1(\tilde{u}^{(2)}) - B_1(\tilde{u}^{(1)}), \quad (30)$$

$$A_2(a^{(1)}, \tilde{u}^{(1)}, \tilde{\theta}^{(1)}, \tilde{\theta}^{(2)}) - A_2(a^{(2)}, \tilde{u}^{(2)}, \tilde{\theta}^{(2)}, \tilde{\theta}^{(1)}) = B_2(\tilde{\theta}^{(2)}) - B_2(\tilde{\theta}^{(1)}). \quad (31)$$

Осуществим линеаризацию (30), (31) по правилу:  $a^{(1)} = a^{(m-1)}$ ,  $a^{(2)} = a^{(m-1)} + a^{(m)}$ ,  $\tilde{u}^{(1)} = \tilde{u}^{(m-1)}$ ,  $\tilde{u}^{(2)} = \tilde{u}^{(m-1)} + \tilde{u}^{(m)}$ ,  $\tilde{\theta}^{(1)} = \tilde{\theta}^{(m-1)}$ ,  $\tilde{\theta}^{(2)} = \tilde{\theta}^{(m-1)} + \tilde{\theta}^{(m)}$ . Здесь  $a^{(m)}$ ,  $\tilde{u}^{(m)}$ ,  $\tilde{\theta}^{(m)}$  — малые поправки к соответствующим функциям. Пренебрегая слагаемыми второго порядка малости, получим в развернутом виде

$$\int_V (\lambda^{(m)} \text{tr}(\varepsilon(\tilde{u}^{(m-1)}))^2 + 2\mu^{(m)} (\varepsilon(\tilde{u}^{(m-1)}))^2 + p^2 \rho^{(m)} (\tilde{u}^{(m-1)})^2 - 2\gamma^{(m)} \tilde{\theta}^{(m-1)} \text{tr}(\varepsilon(\tilde{u}^{(m-1)}))) dV = \int_{S_\sigma} \tilde{P} \cdot \tilde{u}^{(m)} dS_\sigma, \quad (32)$$

$$\int_V \left[ k^{(m)} (\nabla \tilde{\theta}^{(m-1)})^2 + p c_\varepsilon^{(m)} (\tilde{\theta}^{(m-1)})^2 + 2p T_0 \gamma^{(m)} \tilde{\theta}^{(m-1)} \text{tr}(\varepsilon(\tilde{u}^{(m-1)})) \right] dV =$$





$$= \int_{S_q} \tilde{Q} \cdot \tilde{\theta}^{(m)} dS_q. \quad (33)$$

На основе (32), (33) получим необходимые соотношения для решения обратной задачи для цилиндра, учитывая выражения для тензора деформации, векторов механической и тепловой нагрузки, осесимметричность задачи. Так, при  $n = 0$  операторные соотношения в безразмерном виде имеют вид:

$$\int_{\xi_0}^1 (\bar{\lambda}^{(m)} \left( \tilde{a}'_0^{(m-1)} + \frac{\tilde{a}_0^{(m-1)}}{\xi} \right)^2 + 2\bar{\mu}^{(m)} g_0 \left( (\tilde{a}'_0^{(m-1)})^2 + \left( \frac{\tilde{a}_0^{(m-1)}}{\xi} \right)^2 \right) + p^2 \bar{\rho}^{(m)} (\tilde{a}_0^{(m-1)})^2 - 2\delta_0 \bar{\gamma}^{(m)} \left( \tilde{a}'_0^{(m-1)} + \frac{\tilde{a}_0^{(m-1)}}{\xi} \right) \tilde{a}_0^{(m-1)} \xi d\xi = s_0 \chi_0 \tilde{G}_1(p) (\tilde{f}_0^{(1)}(1, p) - \tilde{a}_0^{(m-1)}(1, p)), \quad (34)$$

$$\int_{\xi_0}^1 (\bar{k}^{(m)} (\tilde{d}'_0^{(m-1)})^2 + p \bar{c}^{(m)} (\tilde{d}_0^{(m-1)})^2 + 2p \delta_0 \bar{\gamma}^{(m)} \left( \tilde{d}'_0^{(m-1)} + \frac{\tilde{d}_0^{(m-1)}}{\xi} \right) \tilde{d}_0^{(m-1)} \xi d\xi = r_0 \omega_0 \tilde{G}_2(p) (\tilde{f}_0^{(2)}(1, p) - \tilde{d}_0^{(m-1)}(1, p)), \quad p \in [0, \infty). \quad (35)$$

При  $n = 1, 2, \dots$  выражения не приводятся в силу их громоздкости.

Полученные выражения представляют собой систему интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода с гладкими ядрами относительно поправок  $\bar{\lambda}^{(m)}$ ,  $\bar{\mu}^{(m)}$ ,  $\bar{\rho}^{(m)}$ ,  $\bar{\gamma}^{(m)}$ ,  $\bar{k}^{(m)}$ ,  $\bar{c}^{(m)}$  при известных значениях трансформант функций перемещений  $\tilde{a}_0^{(m-1)}$  и температуры  $\tilde{d}_0^{(m-1)}$ , найденных из решения прямой задачи. На их основе можно организовать итерационный процесс для определения искомых функций.

Поскольку решение интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода является некорректной задачей, то численные решения построены с помощью метода регуляризации Тихонова [18].

Выход из итерационного процесса осуществляется по условию достижения максимального наперед заданного количества итераций.

Дискретизация интегральных уравнений вида (34), (35) основана на методе коллокаций с применением квадратурной формулы трапеций. Для этого вводится равномерное разбиение отрезка  $[\xi_0, 1]$  на  $N$  отрезков точками  $\xi_i = \xi_0 + \frac{(i-1)(1-\xi_0)}{N-1}$ ,  $i = 1..N$ . Строится набор параметров  $\{p_j\}_{j=1}^M$  по формуле  $p_j = \frac{\kappa_j}{\sqrt{1-\kappa_j^2}}$ , где  $\kappa_j = \kappa_0 + j\kappa$ ,  $j = 1..M$ ,  $\kappa = \frac{g_2 - g_1}{m}$ ,  $g_1 = \kappa_0$ ,  $g_2 = 1 - \kappa_0$ . В работе принято:  $\kappa_0 = 0.1$ ,  $M = 20$ ,  $N = 20$ .

Итерационный процесс стартует с выбора начального приближения, которое определяется в классе линейных функций  $\bar{a}^{(0)} = k_1 \xi + k_2$ , где коэффициенты  $k_1$  и  $k_2$  определяются исходя из измеренных значений искомых функций на границе отрезка по формулам:  $k_1 = \frac{\bar{a}^- - \bar{a}^+}{\xi_0 - 1}$ ,  $k_2 = \bar{a}^+ - \frac{\bar{a}^- - \bar{a}^+}{\xi_0 - 1}$ .

В качестве примера реконструкции свойств функционально-градиентного материала рассмотрен  $Ni - TiC$  со следующими законами изменения термомеханических характеристик:  $\bar{\mu}(\xi) = 11.39\xi^2 - 18.3\xi + 8.14$ ,  $\bar{\lambda}(\xi) = 7.84\xi^2 - 10.81\xi + 4.82$ ,  $\bar{\gamma}(\xi) = -6.6\xi^2 + 10.03\xi - 1.06$ ,  $\bar{\rho}(\xi) = -5.76\xi^2 + 8.37\xi - 2.12$ ,  $\bar{k}(\xi) = -8.83\xi^2 + 12.64\xi - 3.56$ ,  $\bar{c}(\xi) = -3.64\xi^2 + 5\xi - 1.23$ . Значения коэффициентов этих функций находились из условия равенства значений термомеханических характеристик на внешней и внутренней границах цилиндра соответственно характеристикам  $Ni$  и  $TiC$ . В расчетах принято:  $\xi_0 = 0.8$ ,  $\delta_0 = 0.3$ ,  $g_0 = 1$ ,  $\beta_0 = 2$ ,  $\chi_0 = 1$ ,  $\omega_0 = 0.1$ . На внешней



поверхности цилиндра приложены следующие типы нагрузок: а) механическая  $\Omega_{rr}(1, \eta, \tau) = \chi_0 \left(1 - \left(\frac{\eta}{\beta_0}\right)^2\right) H(\tau)$ ; б) тепловая  $Q(1, \eta, \tau) = \omega_0 \left(1 - \left(\frac{\eta}{\beta_0}\right)^2\right) H(\tau)$ . Здесь  $H(\tau)$  — функция Хевисайда.

Для каждой термомеханической характеристики были найдены начальные приближения, которые имеют вид:  $\bar{\mu}^{(0)}(\xi) = 2.2\xi - 0.97$ ,  $\bar{\lambda}^{(0)}(\xi) = 3.3\xi - 1.45$ ,  $\bar{\gamma}^{(0)}(\xi) = -1.85\xi + 4.22$ ,  $\bar{\rho}^{(0)}(\xi) = -2\xi + 2.49$ ,  $\bar{k}^{(0)}(\xi) = -3.25\xi + 3.5$ ,  $\bar{c}^{(0)}(\xi) = -1.55\xi + 1.68$ .

В случае механического нагружения цилиндра для одновременной идентификации функций  $\bar{\rho}(\xi)$ ,  $\bar{\mu}(\xi)$ ,  $\bar{\lambda}(\xi)$  и  $\bar{\gamma}(\xi)$  необходимо решить систему четырех интегральных уравнений при  $n = 0$ ,  $n = 1$ ,  $n = 2$  и  $n = 3$ . Однако при решении системы четырех интегральных уравнений возникают большие вычислительные проблемы. Поэтому в работе решалась упрощенная задача об одновременном нахождении двух функций на примере  $\bar{\lambda}(\xi)$  и  $\bar{\gamma}(\xi)$  при известных остальных термомеханических характеристиках  $\bar{\rho}(\xi)$ ,  $\bar{\mu}(\xi)$ ,  $\bar{k}(\xi)$  и  $\bar{c}(\xi)$ . В этом случае для нахождения поправок  $\bar{\lambda}^{(m)}$  и  $\bar{\gamma}^{(m)}$  необходимо решать систему уравнений при  $n = 0$ ,  $n = 1$ . Однако практическая реализация данной процедуры реконструкции осложнена из-за структуры ядер интегральных уравнений. Проведенные расчеты показали, что значение ядра при поправке  $\bar{\lambda}^{(m)}$  значительно больше, чем при  $\bar{\gamma}^{(m)}$ . В этом случае величина поправок  $\bar{\gamma}^{(m)}$  стремится к нулю на всех итерациях. Вследствие такой особенности предложен поэтапный итерационный процесс реконструкции. На первом этапе идентификации считалось, что значение поправки  $\bar{\gamma}^{(m)} = 0$ , что означает равенство коэффициента температурных напряжений выбранному начальному приближению. С учетом этого допущения на каждой итерации определялись поправки  $\bar{\lambda}^{(m)}$  как решение упрощенного интегрального уравнения:

$$\int_{\xi_0}^1 \bar{\lambda}^{(m)} \left( \tilde{a}_0^{(m-1)} + \frac{\tilde{a}_0^{(m-1)}}{\xi} \right)^2 \xi d\xi = \frac{s_0 \chi_0}{p} (\tilde{f}_0^{(1)}(1, p) - \tilde{a}_0^{(m-1)}(1, p)), \quad p \in [0, \infty).$$

Выход из итерационного процесса был осуществлен по предельному числу итераций, равному 20.

На втором этапе фиксируется найденная функция  $\bar{\lambda}(\xi)$ , а соответствующие поправки  $\bar{\lambda}^{(m)}$  принимаются равными нулю, и на каждой последующей итерации аналогично определяются поправки  $\bar{\gamma}^{(m)}$  как решение упрощенного интегрального уравнения:

$$\begin{aligned} \delta_0 \int_{\xi_0}^1 \bar{\gamma}^{(m)} \left( \tilde{a}_0^{(m-1)} + \frac{\tilde{a}_0^{(m-1)}}{\xi} \right) \tilde{a}_0^{(m-1)} \xi d\xi = \\ = -\frac{s_0 \chi_0}{p} (\tilde{f}_0^{(1)}(1, p) - \tilde{a}_0^{(m-1)}(1, p)), \quad p \in [0, \infty). \end{aligned} \quad (36)$$

На рис. 1 представлены результаты реконструкции функций  $\bar{\lambda}(\xi)$  (рис. 1, а) и  $\bar{\gamma}(\xi)$  (рис. 1, б). При этом штриховой линией показано начальное приближение, сплошной линией — точный закон, точками — восстановленный закон. При отсутствии зашумления входной информации максимальная погрешность реконструкции  $\bar{\lambda}(\xi)$  не превысила 3%, а  $\bar{\gamma}(\xi)$  — 6%. В случае восстановления  $\bar{\gamma}(\xi)$  важно обратить внимание на ядро интегрального уравнения (36). Оно обращается в нуль при  $\xi = \xi_0$  в соответ-

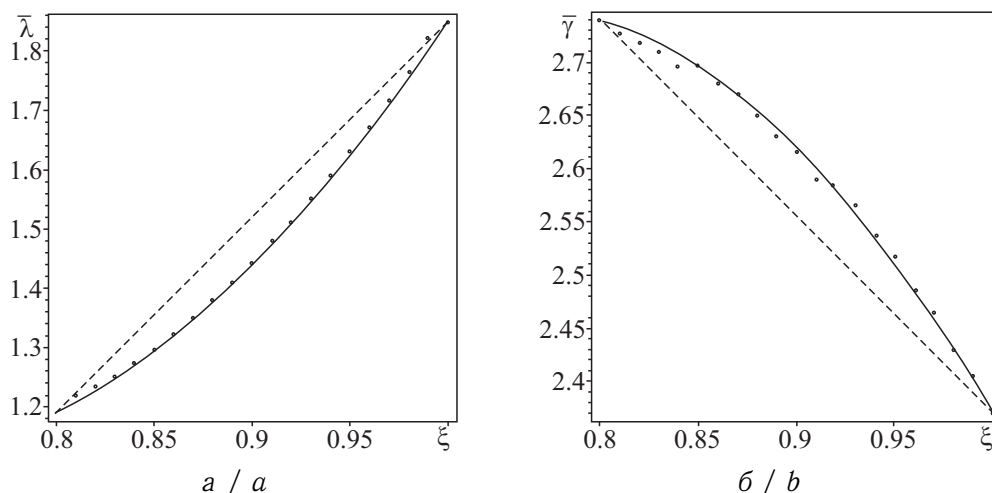


Рис. 1. Результаты реконструкции механических характеристик:  
 $a - \bar{\lambda}(\xi) = 7.84\xi^2 - 10.81\xi + 4.82$ ;  $b - \bar{\gamma}(\xi) = -6.6\xi^2 + 10.03\xi - 1.06$   
 Fig. 1. Results of reconstruction of mechanical characteristics:  
 $a - \bar{\lambda}(\xi) = 7.84\xi^2 - 10.81\xi + 4.82$ ;  $b - \bar{\gamma}(\xi) = -6.6\xi^2 + 10.03\xi - 1.06$

ствии с граничными условиями (19), поэтому наибольшая погрешность реконструкции возникает в окрестности  $\xi = \xi_0$ .

Во второй серии экспериментов использовалось тепловое нагружение цилиндра. Для упрощения считаем, что коэффициенты  $\bar{\rho}(\xi)$ ,  $\bar{\mu}(\xi)$ ,  $\bar{\lambda}(\xi)$  и  $\bar{\gamma}(\xi)$  известны. Однако проведенные расчеты показали, что значение ядра при поправке  $\bar{k}^{(m)}$  значительно больше, чем при  $\bar{c}^{(m)}$ . Поэтому, как при механическом нагружении, использован поэтапный итерационный процесс реконструкции искомым законов. На первом этапе идентификации считалось, что значение поправки  $\bar{c}^{(m)} = 0$ . С учетом этого допущения на каждой итерации определялись поправки  $\bar{k}^{(m)}$  как решение интегрального уравнения:

$$\int_{\xi_0}^1 \bar{k}^{(m)} (\tilde{d}_0^{(m-1)})^2 \xi d\xi = \frac{r_0 \omega_0}{p} (\tilde{f}_0^{(2)}(1, p) - \tilde{d}_0^{(m-1)}(1, p)), \quad p \in [0, \infty).$$

На втором этапе фиксируется найденная функция  $\bar{k}(\xi)$ , и на каждой последующей итерации аналогично определяются поправки  $\bar{c}^{(m)}$  как решение интегрального уравнения:

$$\int_{\xi_0}^1 \bar{c}^{(m)} (\tilde{d}_0^{(m-1)})^2 \xi d\xi = \frac{r_0 \omega_0}{p} (\tilde{f}_0^{(2)}(1, p) - \tilde{d}_0^{(m-1)}(1, p)), \quad p \in [0, \infty). \quad (37)$$

На рис. 2 представлены результаты восстановления функций  $\bar{k}(\xi)$  (рис. 2, а) и  $\bar{c}(\xi)$  (рис. 2, б). При отсутствии зашумления входной информации максимальная погрешность реконструкции  $\bar{k}(\xi)$  не превысила 2%, а  $\bar{c}(\xi)$  — 7%. При этом наибольшая погрешность реконструкции  $\bar{c}(\xi)$  возникает в окрестности  $\xi = \xi_0$ , это связано с тем, что ядро интегрального уравнения (37) обращается в нуль при  $\xi = \xi_0$ .

Процедура реконструкции термомеханических характеристик оказалась устойчива к 1%-му шуму. Максимальная погрешность реконструкции не превысила 13%.

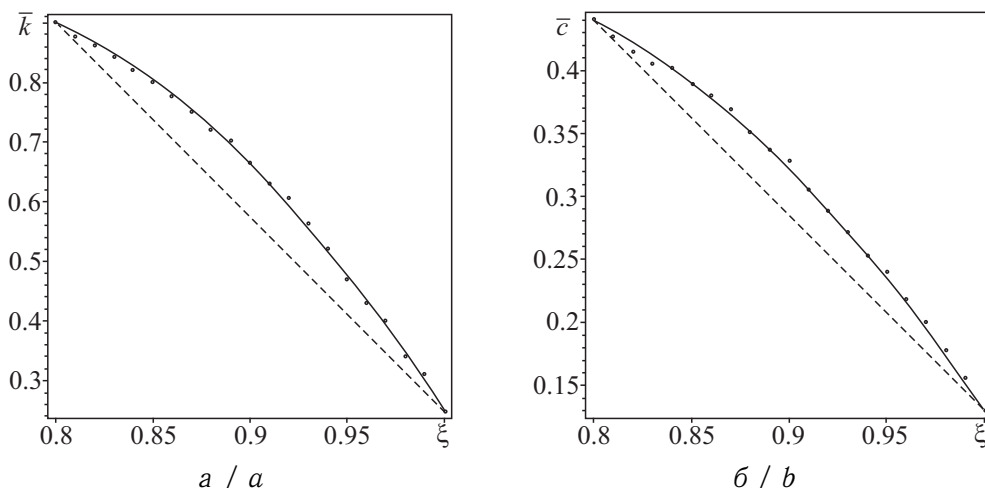


Рис. 2. Результаты реконструкции теплофизических характеристик:  
 $a - \bar{k}(\xi) = -8.83\xi^2 + 12.64\xi - 3.56$ ;  $b - \bar{c}(\xi) = -3.64\xi^2 + 5\xi - 1.23$   
 Fig. 2. Results of reconstruction of thermophysical characteristics:  
 $a - \bar{k}(\xi) = -8.83\xi^2 + 12.64\xi - 3.56$ ;  $b - \bar{c}(\xi) = -3.64\xi^2 + 5\xi - 1.23$

## ВЫВОДЫ

Приведена постановка новой обратной задачи об идентификации термомеханических характеристик конечного функционально-градиентного цилиндра. Прямая задача для цилиндра решена на основе комбинации метода разделения переменных и пристрелки в трансформантах Лапласа. Для решения нелинейной обратной задачи в трансформантах Лапласа получены линеаризованные операторные уравнения, связывающие искомые и измеряемые в эксперименте функции. Решение обратной задачи построено на основе итерационного процесса, на каждом шаге которого решается интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода. Вычислительные эксперименты показали: 1) монотонные законы изменения термомеханических характеристик восстанавливаются с погрешностью, не превышающей 7%; 2) процедура реконструкции устойчива к зашумлению входной информации.

## Список литературы

1. *Birman V., Byrd L. W.* Modeling and analysis of functionally graded materials and structures // *Applied Mechanics Reviews*. 2007. Vol. 60, iss. 5. P. 195–216. <https://doi.org/10.1115/1.2777164>
2. *Wetherhold R. C., Seelman S., Wang S.* The use of functionally graded materials to eliminated or control thermal deformation // *Composites Science and Technology*. 1996. Vol. 56, № 9. P. 1099–1104. [https://doi.org/10.1016/0266-3538\(96\)00075-9](https://doi.org/10.1016/0266-3538(96)00075-9)
3. *Ломазов В. А.* Задачи диагностики неоднородных термоупругих сред. Орел : Издательство ОрелГТУ, 2002. 168 с.
4. *Ватульян А. О., Нестеров С. А.* Об особенностях решения коэффициентной обратной задачи теплопроводности для двусоставного слоя // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика*. 2019. Т. 19, вып. 4. С. 409–423. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-4-409-423>
5. *Алифанов О. М., Артюхин Е. А., Румянцев С. В.* Экстремальные методы решения некорректных задач. Москва : Наука, 1988. 288 с.
6. *Hao D. N.* *Methods for Inverse Heat Conduction Problems*. Frankfurt a/M : Peter Lang Pub. Inc., 1998. 249 p.
7. *Kabanikhin S. I., Hasanov A., Penenko A. V.* A gradient descent method for solving an inverse coefficient heat conduction problem // *Numerical Analysis and Applications*. 2008. Vol. 1, iss. 1. P. 34–45. <https://doi.org/10.1134/S1995423908010047>



8. Yeung W. K., Lam T. T. Second-order finite difference approximation for inverse determination of thermal conductivity // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 1996. Vol. 39, iss. 17. P. 3685–3693. [https://doi.org/10.1016/0017-9310\(96\)00028-2](https://doi.org/10.1016/0017-9310(96)00028-2)
9. Vatulyan A. O., Bogachev I. V., Nedin R. D., Yavruyan O. V. Identification of inhomogeneous elastic properties of isotropic cylinder // *ZAMM — Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*. 2016. Vol. 97, iss. 3. P. 358–364. <https://doi.org/10.1002/zamm.201600179>
10. Dudarev V. V., Vatulyan A. O., Mnuhkhin R. M., Nedin R. D. Concerning an approach to identifying the Lamé parameters of an elastic functionally graded cylinder // *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 2020. Vol. 43, iss. 11. P. 6861–6870. <https://doi.org/10.1002/mma.6428>
11. Geymonat G., Pagano S. Identification of mechanical properties by displacement field measurement: A variational approach // *Meccanica*. 2003. Vol. 38. P. 535–545. <https://doi.org/10.1023/A:1024766911435>
12. Grediac M., Hild F., Pineau A. *Full-Field Measurements and Identification in Solid Mechanics*. Great Britain : Wiley-ISTE. 2013. 485 p.
13. Avril S., Pierron F. General framework for the identification of constitutive parameters from full-field measurements in linear elasticity // *International Journal of Solids and Structures*. 2007. Vol. 44, iss. 14–15. P. 4978–5002. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2006.12.018>
14. Ватульян А. О., Нестеров С. А. Коэффициентные обратные задачи термомеханики. Ростов н/Д ; Таганрог : Издательство Южного федерального университета, 2019. 146 с.
15. Nedin R., Nesterov S., Vatulyan A. On reconstruction of thermalphysic characteristics of functionally graded hollow cylinder // *Applied Mathematical Modeling*. 2016. Vol. 40, iss. 4. P. 2711–2719. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2015.09.078>
16. Ватульян А. О., Нестеров С. А. Об особенностях идентификации термомеханических характеристик функционально-градиентных материалов // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика*. 2014. Т. 14, вып. 3. С. 329–335. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2014-14-3-329-335>
17. Ватульян А. О., Нестеров С. А. К определению неоднородных термомеханических характеристик трубы // *Инженерно-физический журнал*. 2015. Т. 88, №. 4. P. 951–959.
18. Тихонов А. Н., Гончарский А. В., Степанов В. В., Ягола А. Г. *Численные методы решения некорректных задач*. Москва : Наука, 1990. 230 с.

### References

1. Birman V., Byrd L. W. Modeling and analysis of functionally graded materials and structures. *Applied Mechanics Reviews*, 2007, vol. 60, iss. 5, pp. 195–216. <https://doi.org/10.1115/1.2777164>
2. Wetherhold R. C., Seelman S., Wang S. The use of functionally graded materials to eliminated or control thermal deformation. *Composites Science and Technology*, 1996, vol. 56, no. 9, pp. 1099–1104. [https://doi.org/10.1016/0266-3538\(96\)00075-9](https://doi.org/10.1016/0266-3538(96)00075-9)
3. Lomazov V. A. *Zadachi diagnostiki neodnorodnykh termouprugikh sred* [Diagnostics Problems for Inhomogeneous Thermoelastic Media]. Orel, Izdatel'stvo OrelGTU, 2002. 168 p. (in Russian).
4. Vatulyan A. O., Nesterov S. A. On the peculiarities of solving the coefficient inverse problem of heat conduction for a two-part layer. *Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2019, vol. 19, iss. 4, pp. 409–423 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-4-409-423>
5. Alifanov O. M., Artyukhin E. A., Rumyantsev S. V. *Ekstremal'nye metody resheniya nekorrektnykh zadach* [Extreme Methods of Solving Ill-Posed Problems]. Moscow, Nauka, 1988. 288 p. (in Russian).



6. Hao D. N. *Methods for Inverse Heat Conduction Problems*. Frankfurt a/M., Peter Lang Pub. Inc., 1998. 249 p.
7. Kabanikhin S. I., Hasanov A., Penenko A. V. A gradient descent method for solving an inverse coefficient heat conduction problem. *Numerical Analysis and Applications*, 2008, vol. 1, iss. 1, pp. 34–45. <https://doi.org/10.1134/S1995423908010047>
8. Yeung W. K., Lam T. T. Second-order finite difference approximation for inverse determination of thermal conductivity. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 1996, vol. 39, iss. 17, pp. 3685–3693. [https://doi.org/10.1016/0017-9310\(96\)00028-2](https://doi.org/10.1016/0017-9310(96)00028-2)
9. Vatulyan A. O., Bogachev I. V., Nedin R. D., Yavruyan O. V. Identification of inhomogeneous elastic properties of isotropic cylinder. *ZAMM – Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 2016, vol. 97, iss. 3, pp. 358–364. <https://doi.org/10.1002/zamm.201600179>
10. Dudarev V. V., Vatulyan A. O., Mnukhin R. M., Nedin R. D. Concerning an approach to identifying the Lamé parameters of an elastic functionally graded cylinder. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2020, vol. 43, iss. 11, pp. 6861–6870. <https://doi.org/10.1002/mma.6428>
11. Geymonat G., Pagano S. Identification of mechanical properties by displacement field measurement: A variational approach. *Meccanica*, 2003, vol. 38, pp. 535–545. <https://doi.org/10.1023/A:1024766911435>
12. Grediac M., Hild F., Pineau A. *Full-Field Measurements and Identification in Solid Mechanics*. Great Britain, Wiley-ISTE, 2013. 485 p.
13. Avril S., Pierron F. General framework for the identification of constitutive parameters from full-field measurements in linear elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 2007, vol. 44, iss. 14–15, pp. 4978–5002. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2006.12.018>
14. Vatulyan A. O., Nesterov S. A. *Koeffitsiyentnye obratnye zadachi termomekhaniki* [Coefficient Inverse Problems of Thermomechanics]. Rostov-on-Don, Taganrog, Izdatel'stvo Yuzhnogo Federal'nogo Universieta, 2019. 146 p. (in Russian).
15. Nedin R., Nesterov S., Vatulyan A. On reconstruction of thermalphysic characteristics of functionally graded hollow cylinder. *Applied Mathematical Modeling*, 2016, vol. 40, iss. 4, pp. 2711–2719. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2015.09.078>
16. Vatulyan A. O., Nesterov S. A. About the Specifics of Identification Thermomechanical Characteristics of Functionally Graded Materials. *Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2014, vol. 14, iss. 3, pp. 329–335 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2014-14-3-329-335>
17. Vatul'yan A. O., Nesterov S. A. On determination of inhomogeneous thermomechanical characteristics of a pipe. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 2015, vol. 88, no. 4, pp. 984–993. <https://doi.org/10.1007/s10891-015-1274-7>
18. Tikhonov A. N., Goncharskiy A. V., Stepanov V V., Yagola A. G. *Chislennyye metody resheniya nekorrektnykh zadach* [Numerical Methods for Solving Ill-Posed Problems]. Moscow, Nauka, 1990. 230 p. (in Russian).

Поступила в редакцию / Received 15.06.2020

Принята к публикации / Accepted 17.08.2020

Опубликована / Published 01.03.2021