Н. Г. Кружилин, А. В. Лобода, Линеаризация локальных автоморфизмов псевдовыпуклых поверхностей, *Докл. АН СССР*, 1983, том 271, номер 2, 280–282

Аналогично найдем:

$$Z(B)=\left\{\begin{bmatrix} p & q & r & s\\ p_1 & q_1 & r_1 & s_1\\ -r & s & p & -q\\ r_1 & -s_1 & -p_1 & q_1\end{bmatrix}\right\},$$

где $p, q, r, s, p_1, q_1, r_1, s_1$ – произвольные действительные числа.

Очевидно,

$$(12)\qquad Z(A,B)=Z(A)\cap Z(B)=\left\{\begin{bmatrix} a & b & c & d\\ -b & a & -d & c\\ -c & d & a & -b\\ -d & -c & b & a\end{bmatrix}\right\},$$

где a, b, c, d – произвольные действительные числа. Соответствие $a+bi+cj+dk\longleftrightarrow$ $\longleftrightarrow Z(A,B)$ является изоморфизмом между телом кватернионов и $Z(A,B)$.

Дагестанский государственный университет
им. В.И. Ленина, Махачкала

Поступило
15 XI 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. Наука, 1976. 2. *Зейналов Б.А.* – ДАН, 1965, т. 164, № 5, с. 971–975.

УДК 517.5 МАТЕМАТИКА

Н.Г. КРУЖИЛИН, А.В. ЛОБОДА

ЛИНЕАРИЗАЦИЯ ЛОКАЛЬНЫХ АВТОМОРФИЗМОВ ПСЕВДОВЫПУКЛЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

(Представлено академиком В.С. Владимировым 26 X 1982)

В пространстве $\mathbf{C}^{n+1}$ с координатами $z=(z_1, z_2, \ldots, z_n)$, $w=u+iv$ рассмотрим вещественно-аналитическую гиперповерхность

$$(1)\qquad M=\{(z,w)\in\mathbf{C}^{n+1}: v=F(z,\bar z,u)\},$$

где F – вещественно-аналитическая функция, $F(0)=0$, $dF|_0=0$. Будем предполагать, что M имеет в начале координат положительно-определенную форму Леви

$$\langle z,z\rangle=\sum_{j,k}\left.\frac{\partial^2F}{\partial z_1\partial\bar z_k}\right|_0 z_j\bar z_k,$$

т.е. является строго псевдовыпуклой в некоторой окрестности точки $(0,0)$. В этом случае может быть выбрана система координат, в которой

$$\langle z,z\rangle=\sum_k|z_k|^2,$$

что и будет предполагаться в дальнейшем.

Обозначим через $\mathcal{G}(M)$ группу локальных автоморфизмов такой гиперповерхности, т.е. группу таких биголоморфных отображений φ окрестностей начала координат Ω_φ, для которых

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(M \cap \Omega_\varphi) \subset M.$$

Здесь доказывается следующая

Теорема. *Пусть M – вещественно-аналитическая строго псевдовыпуклая гиперповерхность, локально не эквивалентная сфере.*

Тогда в некоторых координатах группа $\mathcal{G}(M)$ является компактной подгруппой группы $U(n)$ линейных унитарных преобразований по переменным z_1, $z_2, \ldots, z_n$.

Доказательство основано на компактности группы $\mathcal{G}(M)$ (см. [5], лемма 3, а также [4]) и теореме Бохнера о линеаризации компактных групп преобразований (см. [1]).

В [2] показано, что всякую гиперповерхность вида (1) можно голоморфной заменой переменных привести к виду

$$v = \langle z, z \rangle + \sum_{k,\, l=2}^{\infty} F_{kl}(z, \bar{z}, u),$$

где F_{kl} – многочлен, степени которого по z и $\bar{z}$ равны k и l, а коэффициенты аналитически зависят от u. При этом F_{22}, F_{32} и F_{33} должны удовлетворять еще некоторым дополнительным условиям. Такая форма записи поверхности называется нормальной. Кривая на поверхности, которая в некоторой нормальной форме может быть задана уравнением

$$z = 0, \quad v = 0,$$

называется цепью. Через всякую точку поверхности в каждом направлении, трансверсальном к комплексной касательной, можно провести единственную цепь.

Пусть в двух различных координатных системах уравнение поверхности M имеет нормальную форму. Тогда, как показано в [2], преобразование $\varphi(z, w)$, связывающее эти две системы, однозначно разлагается в композицию $\varphi = \varphi_1 \circ \varphi_0$ отображений вида

$$\varphi_0(z, w) = \begin{pmatrix} \lambda V(z + aw)/\Delta_{a,r} \\ \lambda^2 w/\Delta_{a,r} \end{pmatrix}, \quad \varphi_1(z, w) = \begin{pmatrix} z + f(z, w) \\ w + g(z, w) \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где матрица $V \in U(n)$, a – n-мерный комплексный вектор, $\lambda > 0$ и r – вещественные числа, $\Delta_{a,r} = 1 - (2i\langle z, a \rangle + (r + i\langle a, a \rangle)w)$, а разложения f и g в степенные ряды по z, w начинаются с достаточно больших степеней.

Лемма. *На поверхности M существует цепь $\gamma(t)$, $\gamma(0) = 0$, точки которой неподвижны при всех преобразованиях $\varphi \in \mathcal{G}(M)$.*

Доказательство. Поскольку группа $\mathcal{G}(M)$ компактна, все локальные автоморфизмы действуют в общей окрестности начала координат Ω.

По теореме Бохнера на гиперповерхности M в окрестности точки $(0, 0) \in M$ существует такая локальная система координат $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{2n+1}$, в которой преобразования $\varphi \in \mathcal{G}(M)$ могут быть записаны как линейные. Будем считать, что эта система координат выбрана таким образом, что репер $\left.\left(\dfrac{\partial}{\partial \xi_1}, \dfrac{\partial}{\partial \xi_2}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial \xi_{2n+1}}\right)\right|_0$ совпадает с $\left.\left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \dfrac{\partial}{\partial y_1}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial y_n}, \dfrac{\partial}{\partial u}\right)\right|_0$, где $x_k + iy_k = z_k$. Рассмотрим матрицу произвольного $\varphi \in \mathcal{G}(M)$:

$$\begin{pmatrix} a_1^1(\varphi) \ldots & a_{2n+1}^1(\varphi) \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ a_1^{2n+1}(\varphi) \ldots & a_{2n+1}^{2n+1}(\varphi) \end{pmatrix}.$$

В ней $a_k^{2n+1}(\varphi) = 0$ при $k \leqslant 2n$, поскольку дифференциал $d\varphi$ отображения φ сохраняет комплексную касательную. $a_{2n+1}^{2n+1}(\varphi)$ есть $(2n+1)$-я координата вектора $d\varphi|_0\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)$ относительно репера $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y_{2n}}, \frac{\partial}{\partial u}\right)$. Однако $d\varphi|_0 = d\varphi_0|_0$ (см. (2)), следовательно, $a_{2n+1}^{2n+1}(\varphi) = \lambda^2$. Как показано в [3], для автоморфизма φ несферической поверхности $\lambda = 1$. Таким образом, $a_{2n+1}^{2n+1}(\varphi) = 1$.

Обозначим через h_φ вектор из T_0M, имеющий координаты $(a_{2n+1}^1(\varphi), a_{2n+1}^2, \ldots, a_{2n+1}^{2n+1}(\varphi))$ относительно репера $\left(\frac{\partial}{\partial \xi_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \xi_{2n+1}}\right)$. Пусть $h \in T_0M$ есть усреднение h_φ по мере Хаара на группе $\mathcal{G}(M)$

$$h = \int_{\varphi \in \mathcal{G}(M)} h_\varphi d\varphi.$$

Для всякого $\varphi \in \mathcal{G}(M)$

$$d\varphi|_0(h) = \int d\varphi|_0(h_\psi)d\psi = \int h_{\varphi\psi}d_\psi = \int h_\psi d_\psi = h.$$

$(2n+1)$-я координата вектора h отлична от 0, поэтому h трансверсален к комплексной касательной. Произведем такую линейную замену координат $\xi'(\xi)$, что репер $\left(\frac{\partial}{\partial \xi'_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \xi'_{2n+1}}\right)$ совпадает с $\left(\frac{\partial}{\partial \xi_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \xi_{2n}}, h\right)$. В новых координатах всякое преобразование $\varphi \in \mathcal{G}(M)$ записывается матрицей $\begin{pmatrix} a_1^1 & \ldots & a_{2n}^1 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^{2n} & \ldots & a_{2n}^{2n} & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Пусть теперь $\gamma(t)$ – цепь на M такая, что $\gamma(0) = 0$, $\dot\gamma(0) = h$. Поскольку всякий локальный автоморфизм φ переводит цепи в цепи и $d\varphi|_0(\dot\gamma(0)) = \dot\gamma(0)$, то $\varphi(\gamma) \subset \gamma$. Кроме того, $\xi'_{2n+1}(\varphi(\gamma(t))) = \xi'_{2n+1}(\gamma(t))$. Однако при малых t отображение $t \longmapsto \xi'_{2n+1}(\gamma(t))$ взаимно однозначно, следовательно, $\varphi(\gamma(t)) = \gamma(t)$. Лемма доказана.

Приведем M в $\mathbf{C}^{n+1}$ к нормальной форме так, чтобы цепь γ из доказанной выше леммы перешла в прямую $z = 0$, $v = 0$. Пусть φ – произвольный локальный автоморфизм M, а $V \in U(n)$, a, r и $\lambda = 1$ – соответствующий ему набор параметров (см. (2)). Поскольку φ оставляет на месте точки кривой $z = 0$, $v = 0$, получаем, что $r = a = 0$.

Биголоморфное преобразование $z^* = Vz$, $w^* = w$ приводит M к нормальной форме и ему соответствует тот же набор параметров. Следовательно, это преобразование совпадает с φ. Это завершает доказательство теоремы.

В заключение авторы выражают благодарность чл.-корр. АН СССР А.Г. Витушкину за внимание к работе и полезные обсуждения.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступило
22 XI 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bochner S.* – Ann. Math., 1945, vol. 46, № 3, p. 372–381. 2. *Chern S., Moser J.* – Acta Math., 1974, vol. 133, № 3, p. 219–274. 3. *Белошапка В.К.* – Изв. АН СССР. Сер. матем., 1979, т. 43, № 2, с. 243–266. 4. *Белошапка В.К., Витушкин А.Г.* – Там же, 1981, т. 45, № 5, с. 962–934. 5. *Витушкин А.Г.* – Там же, 1982, т. 46, № 1, с. 28–35.