Ю. С. Эйдельман, Одна задача линейного управления, *Дифференц. уравнения*, 1982, том 18, номер 4, 614–620

$+Ym$ является решением второй из задач (18) и, значит, совпадает с ξ. Подставляя при этом $p\equiv\xi_1-Ym$ во второе из уравнений (5), получаем $m\equiv m_1$, $p\equiv\xi-Ym_1$, что показывает единственность решения задачи (5). Теорема 1 доказана.

Литература

1. Летов А. М. Аналитическое конструирование регуляторов, I—IV.— Автоматика и телемеханика, 1960, т. 21, № 4, с. 436—441; № 5, с. 561—568; № 6, с. 661—665; 1961, т. 22, № 4, с. 425—435.
2. Куржанский А. Б. Об аналитическом конструировании регулятора в системе с помехой, зависящей от управления.— Дифференц. уравнения, 1965, т. 1, № 2, с. 204—213.
3. Параев Ю. И. Введение в статистическую динамику процессов управления и фильтрации.— М.: Советское радио, 1976.— 184 с.
4. Wonham W. M. On the separation theorem of stochastic control.— SIAM J. Control. 1968, vol. 6. N 1, p. 312—326.
5. Bismut J.-M. Controle des systemes lineaires quadratiques: applications l'integrale stochastique.— Lect. Notes Math., 1978, N 649, p. 180—264.
6. Bismut J.-M. Linear-quadratic optimal stochastic control with random coefficients.— SIAM J. Control and Optimiz., 1976, vol. 14, N 3, p. 419—444.
7. Смирнов И. П. Об оптимальном управлении динамической системой со случайными параметрами при неполной информации.— ПММ, 1979, т. 43, вып. 4, с. 621—628.
8. Флеминг У., Ришел Р. Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами.— М.: Мир, 1978.— 318 с.
9. Гихман И. И., Скороход А. В. Управляемые случайные процессы.— Киев: Наукова думка, 1977.— 251 с.
10. Морозов С. Ф., Смирнов И. П. Об одной задаче оптимального управления стохастическим процессом.— Дифференц. уравнения, 1979, т. 15, № 5, с. 943—944.
11. Bismut J.-M. Conjugate convex functions in optimal stochastic control.—J. Math. Anal. and Appl., 1973, vol. 44, N 2, p. 384—404.
12. Морозов С. Ф., Смирнов И. П. Принципы минимума в задачах оптимального управления случайными процессами.— ПММ, 1978, т. 42, вып. 2, с. 233—244.
13. Морозов С. Ф., Смирнов И. П. Структура операторов стохастического интегрирования на пространствах суммируемых случайных функций.—М., 1980.— 28 с. Деп. в ВИНИТИ, № 397—80.
14. Садовяк А. М., Царьков Е. Ф. Аналог формулы Коши для стохастических дифференциальных уравнений.— Теория вероятностей и ее применения, 1973, т. 18, вып. 2, с. 415—417.
15. Ланкастер Л. С. Теория матриц — М.: Наука, 1978.— 280 с.

Горьковский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

Поступила в редакцию 3 декабря 1980 г.

УДК 517.977

Ю. С. ЭЙДЕЛЬМАН

ОДНА ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО УПРАВЛЕНИЯ

В настоящей работе рассматривается задача линейного управления для системы дифференциальных уравнений

$$\ddot{x} = f(t,\ x,\ u(t)), \tag{1}$$

$$x(0) = x_0,\ x(1) = x_1, \tag{2}$$

$$\dot{x}(0) = \dot{x}_0. \tag{3}$$

Здесь функция $f(t, x, u)$ определена и непрерывна при $t\in[0, 1]$, $x\in R^n$, $u\in R^n$ и принимает значения в пространстве R^n. $u(t)$ — линейная функция, $u(t)=a+bt$, где a и b — векторные n-мерные параметры. Доказывается, что при некоторых указанных ниже условиях существуют такие значения параметров, при которых уравнение (1) имеет решение, удовлетворяющее краевым условиям (2), (3).

При доказательстве полученных результатов используются результаты и методы, изложенные А. В. Кибенко и А. И. Перовым в [1].

Предполагается, что в пространстве R^n введена евклидова норма $\|x\|$, (x, y) — скалярное произведение векторов x и y.

Выделим отдельно условия на правую часть уравнения (1), которые нам в дальнейшем потребуются.

(α_1) $f(t, x, u)$ удовлетворяет локальному условию Липшица по x, т. е. при $t \in [0, 1]$; $\|x_1\|$, $\|x_2\| \leqslant c_1$; $\|u\| \leqslant c_2$

$$\|f(t, x_1, u) - f(t, x_2, u)\| \leqslant L\|x_1 - x_2\|, \tag{4}$$

(α_2)
$$M(x, f(t, x, a+bt)) \leqslant G(\Phi(x), \|a\| + \|b\|), \tag{5}$$

где $M(x, h)$ — полудифференциал непрерывной функции $\Phi(x)$ такой, что

$$\Phi(x) \underset{\|x\|\to\infty}{\to} \infty; \quad \forall (c \geqslant 0)\left[\int^{\infty} \frac{d\varphi}{G(\varphi, c)} = \infty\right].$$

Из условия (α_1) и непрерывности f следует, что решение задачи Коши

$$\dot{x} = f(t, x, a+bt), \ x(0) = x_0 \tag{6}$$

при любых a и b существует на некотором промежутке $[0, \delta]$ и единственно, а из условия (α_2) следует, что это решение определено на всем отрезке $[0, 1]$.

Для проведения дальнейших рассуждений нам потребуется следующая

Лемма 1. *Пусть функция $f(t, x, u)$ удовлетворяет условию*

$$(f(t, x, u), Pu) \geqslant \varepsilon(t)\|u\|^2, \tag{7}$$

где P — линейный обратимый оператор, а $\varepsilon(t) > 0$. Тогда для любых $t_0 \in [0, 1]$, $x_0 \in R^n$, $\dot{x}_0 \in R^n$ существует u_0-решение уравнения

$$f(t_0, x_0, u_0) = \dot{x}_0 \tag{8}$$

и справедлива оценка

$$\|\dot{x}_0\| \geqslant \frac{\varepsilon(t_0)}{\|P\|}\|u_0\|. \tag{9}$$

Доказательство. Рассмотрим непрерывные векторные поля $\Phi(u) = f(t_0, x_0, u) - \dot{x}_0$, $W(u) = Pu$. Поле $W(u)$ в силу обратимости оператора P на любой сфере с центром в точке 0 не имеет нулевых векторов, и вращение поля $W(u)$ на такой сфере отлично от нуля ([2]).

В силу (7) $(\Phi(u), Pu) = (f(t_0, x_0, u) - \dot{x}_0, Pu) = (f(t_0, x_0, u), Pu) - (\dot{x}_0, Pu) \geqslant \varepsilon(t_0)\|u\|^2 - \|P\|\,\|\dot{x}_0\|\,\|u\|$, откуда следует, что $(\Phi(u), Pu) > 0$ при $\|u\| > \dfrac{\|P\|\,\|\dot{x}_0\|}{\varepsilon(t_0)}$.

Таким образом, на сфере достаточно большого радиуса с центром в нулевой точке $(P(u), W(u)) > 0$, откуда следует, что на этой сфере поле $\Phi(u)$ не имеет нулевых векторов и поля $\Phi(u)$ и $W(u)$ гомотопны. Поэтому вращение поля $\Phi(u)$ на этой сфере отлично от нуля, и в шаре, границей которого является эта сфера, векторное поле имеет нулевую точку, т. е. уравнение (8) имеет решение.

В силу (7) $\varepsilon(t_0)\|u_0\|^2 \leqslant (\dot{x}_0, Pu_0) \leqslant \|u_0\|\,\|P\|\,\|\dot{x}_0\|$, откуда и следует оценка (9). Лемма доказана.

Предположим теперь, что правая часть уравнения (1) удовлетворяет следующему условию: для любого $b \in R^n$ существует $V(b)$ такое, что

$$(V(b), Pb) \geqslant c_1\|b\|^2, \tag{10}$$

$$\|V(b)\| \leqslant c_2\|b\|, \tag{11}$$

где P — линейный обратимый оператор, и если $(Pu, V(b)) \geqslant 0$, то

$$(f(t, x, u), V(b)) \geqslant \varepsilon(t)(Pu, V(b)), \ \varepsilon(t) > 0. \tag{12}$$

Лемма 2. *Пусть выполнены условия (10)—(12). Тогда уравнение (8) имеет решение и справедлива оценка*

$$\|u_0\| \leqslant \frac{\|\dot{x}_0\| c_2}{\varepsilon(t_0) c_1}. \tag{13}$$

Доказательство. Как и при доказательстве леммы 1, рассмотрим непрерывные векторные поля $W(u)=Pu$ и $\Phi(u)=f(t_0, x_0, u)-\dot{x}_0$ и покажем, что на сфере достаточно большого радиуса с центром в нулевой точке эти поля гомотопны.

В силу (12) и (10), (11) $(\Phi(u), V(u)) = (f(t_0, x_0, u)-\dot{x}_0, V(u)) = (f(t_0, x_0, u), V(u)) - (\dot{x}_0, V(u)) \geqslant \varepsilon(t_0)(Pu, V(u)) - (\dot{x}_0, V(u)) \geqslant c_1\varepsilon(t_0)\|u\|^2 - c_2\|\dot{x}_0\|\,\|u\|$.

Если $\|u\| > \frac{c_2\|\dot{x}_0\|}{c_1\varepsilon(t_0)}$, то $(\Phi(u), V(u)) > 0$, а из неравенства (10) получаем, что на сфере достаточно большого радиуса векторы $\Phi(u)$ и Pu не направлены противоположно, откуда и следует гомотопность полей $\Phi(u)$ и $W(u)$.

Следовательно, уравнение (8) имеет решение u_0.

В силу (10) — (12) $\varepsilon(t_0)\|u_0\|^2 c_1 \leqslant \varepsilon(t_0)(Pu_0, V(u_0)) \leqslant (\dot{x}_0, V(u_0)) \leqslant \leqslant c_2\|\dot{x}_0\|\,\|u_0\|$, откуда и следует оценка (13). Лемма доказана.

Замечание. В случае одного уравнения условия (7) и (10)—(12) эквивалентны условию $f(t, x, u)\ \alpha u \geqslant \varepsilon(t)u^2$, где $\varepsilon(t)>0$, $\alpha=\pm 1$.

Подставляя в уравнение (1) $t=0$, получим соотношение, связывающее начальную точку 0, x_0, $\dot{x}_0$ и a,

$$f(0, x_0, a) = \dot{x}_0. \tag{14}$$

Если выполнено условие (7) или условия (10)—(12), то уравнение (14) имеет решение a_0 (вообще говоря, не единственное). Таким образом, параметр a можно исключить и вместо задачи (1)—(3) рассматривать двухточечную краевую задачу для дифференциального уравнения с параметром

$$\dot{x} = f(t, x, a_0 + bt), \tag{15}$$

$$x(0) = x_0, \quad x(1) = x_1. \tag{16}$$

Здесь a_0 — решение уравнения (14). Задача (15), (16) эквивалентна задаче о разрешимости операторного уравнения

$$T(b) \equiv x_0 + \int_0^1 f(t, x_b, (t), a_0 + bt), \tag{17}$$

где $x_b(t)$ — решение задачи Коши

$$\dot{x} = f(t, x, a_0 + bt), \quad x(0) = x_0. \tag{18}$$

Если выполнены условия (α_1), (α_2), то оператор $T(b)$ определен на всем пространстве R^n и непрерывен.

Теорема 1. *Пусть правая часть уравнения (1) удовлетворяет условиям (α_1), (α_2) и (10)—(12), причем в условии (12) $\varepsilon(t)\equiv\varepsilon$. Тогда задача (1)—(3) имеет решение при произвольных x_0, x_1, $\dot{x}_0 \in R^n$.*

Доказательство. В силу приведенных выше рассуждений задачу (1) можно свести к задаче (15), (16) для дифференциального уравнения с параметром b, которая эквивалентна задаче о разрешимости уравнения (17).

Рассмотрим непрерывные векторные поля $W(b)=Pb$ и $\Psi(b)=T(b)-x_1$. Будет показано, что на сфере достаточно большого радиуса с центром в нулевой точке эти поля гомотопны. Тогда вращение поля $\Psi(b)$ на этой сфере отлично от нуля, откуда следует, что в шаре, границей которого является эта сфера, поле $\Psi(b)$ имеет нулевой вектор, т. е. уравнение (17) имеет решение.

В силу (10) и (11) $(P(a_0+bt),\ V(b)) = t(Pb,\ V(b)) + (Pa_0,\ V(b)) \geqslant \geqslant tc_1\|b\|^2 - c_2\|b\|\,\|P\|\,\|a_0\|$. Предположим, что $\|b\| > \dfrac{c_2\|a_0\|\,\|P\|}{c_1}$,

$$(P(a_0+bt),\ V(b)) \geqslant 0 \ \text{при}\ t \geqslant \frac{\|P\|\,\|a_0\|\,c_2}{c_1\|b\|}. \tag{19}$$

Обозначим $t^* = \dfrac{\|P\|\,\|a_0\|\,c_2}{c_1\|b\|}$, $t^* < 1$. При $t \in [t^*,\ 1]$ справедливо (19). Рассмотрим $x_b(t)$ — решение задачи Коши (18) на отрезке $[0,\ t^*]$.

Сделаем замену $\tau = \dfrac{t}{t^*}$; $\tau \in [0,\ 1]$, когда $t \in [0,\ t^*]$.

Введем новую функцию $y_b(\tau) = x_b(t^*\tau)$; $y_b(0) = x_b(0)$, $y_b(1) = x_b(t^*)$. В силу (18) $y_b(\tau)$ является решением задачи $\dot{y}_b(\tau) = t^*f(t^*\tau,\ y_b(\tau),\ a_0 + bt^*\tau)$, $y_b(0) = x_0$.

В силу условия (α_2) и определения полудифференциала $M(y_b(\tau),\ t^*f(t^*\tau,\ y_b(\tau),\ a_0+bt^*\tau)) \leqslant M(y_b(\tau),\ f(t^*\tau,\ y_b(\tau),\ a_0+bt^*\tau)) \leqslant G(\Phi(y_b(\tau)),\ \|a_0\| + \|b\|\,t^*) \leqslant G\left(\Phi(y_b(\tau)),\ \|a_0\|\left(1 + \dfrac{c_2\|P\|}{c_1}\right)\right)$.

Отсюда следует ([3]), что $\Phi(y_b(\tau)) \leqslant \varphi(\tau)$, где $\varphi(\tau)$—верхнее решение задачи $\dot{\varphi} = G\left(\varphi,\ \|a_0\|\left(1 + \|P\|\dfrac{c_2}{c_1}\right)\right)$, $\varphi(0) = \varphi_0$ $(\varphi_0 \geqslant \max(0,\ \Phi(x_0)))$. Обозначим $H = \max\limits_{0\leqslant\tau\leqslant1}|\varphi(\tau)|$. Очевидно, что $\Phi(y_b(\tau)) \leqslant H$, причем H не зависит от b. В силу условия $\Phi(x) \underset{\|x\|\to\infty}{\to} \infty$ имеем $\|y_b(\tau)\| \leqslant H$, откуда следует

$$\|x_b(t^*)\| \leqslant H,\ H \neq H(b). \tag{20}$$

Уравнение (17) можно переписать в виде

$$T(b) = x_b(t^*) + \int\limits_{t^*}^{1} f(t,\ x_b(t),\ a_0 + bt)\,dt. \tag{21}$$

В силу (10) — (12), учитывая (19), имеем при $t \in [t^*,\ 1]: (f(t,\ x,\ a_0 + bt),\ V(b)) \geqslant \varepsilon(P(a_0+bt),\ V(b)) \geqslant \varepsilon c_1\|b\|^2 t - \varepsilon c_2\|b\|\,\|P\|\,\|a_0\|$. Поэтому $\left(\int\limits_{t^*}^{1} f(t,\ x,\ a_0+bt)\,dt,\ V(b)\right) = \int\limits_{t^*}^{1}(f(t,\ x,\ a_0+bt),\ V(b))\,dt \geqslant \int\limits_{t^*}^{1}(\varepsilon c_1\|b\|^2 t - \varepsilon c_2\|b\|\,\|a_0\|\,\|P\|)\,dt = \dfrac{1}{2}\varepsilon c_1\left(\|b\| - \dfrac{c_2}{c_1}\|P\|\,\|a_0\|\right)^2$. Отсюда, учитывая (20) и (21), получаем $(\Psi(b),\ V(b)) \geqslant \dfrac{1}{2}\varepsilon c_1\left(\|b\| - \dfrac{c_2}{c_1}\|P\|\,\|a_0\|\right)^2 - V(b)(\|x_b(t^*)\| + \|x_1\|) \geqslant \dfrac{1}{2}\varepsilon c_1\left(\|b\| - \dfrac{c_2}{c_1}\|a_0\|\,\|P\|\right)^2 - c_2\|b\|(H + \|x_1\|) \geqslant \dfrac{1}{2}\varepsilon c_1 \times \times\left(\|b\|^2 - 2\|b\|\dfrac{c_2}{c_1}\left(\|P\|\,\|a_0\| + \dfrac{1}{\varepsilon}(H + \|x_1\|)\right)\right)$. В силу оценки (13) $(\Psi(b),\ V(b)) \geqslant \dfrac{1}{2}\varepsilon c_1\left(\|b\|^2 - 2\|b\|\dfrac{c_2}{c_1\varepsilon}\left(\dfrac{\|P\|\,\|x_0\|\,c_2}{c_1} + H + \|x_1\|\right)\right)$. Из последнего неравенства следует, что $(\Psi(b),\ V(b)) > 0$ при $\|b\| = r > r_0$, где

$$r_0 = \frac{2c_2}{c_1\varepsilon}\left(\frac{\|P\|\,\|x_0\|\,c_2}{c_1} + \|x_1\| + H\right). \tag{22}$$

Следовательно, на сфере достаточно большого радиуса выполнено неравенство $(\Psi(b),\ V(b)>0$, откуда следует, что на этой сфере поле $\Psi(b)$ не имеет нулевых векторов и векторы $\Psi(b)$ и $W(b)$ в силу (10) ни в одной точке этой сферы не направлены противоположно, откуда и следует гомотопность полей $\Psi(b)$ и $W(b)$.

Таким образом, в каждом шаре радиуса $r>r_0$ уравнение (17) имеет решение, откуда и следует разрешимость задачи (1)—(3). Теорема доказана.

Примером правой части, удовлетворяющей условиям теоремы 1, является функция $f(t, x, u) = \{f_i(t, x, u)\}_{i=1,\dots,n}$ вида $f_i(t, x, u)\,\varphi_i(t, x) \times \times \sum_{j=1}^{n} p_{ij}u_j$, где функции $\varphi_i(t, x)$ удовлетворяют локальному условию Липшица по x и неравенствам $|\varphi_i(t, x)| \leqslant c_i(t)(\|x\| + \delta)$, $\delta > 0$; $\varphi_i(t, x) \geqslant \varepsilon$, а матрица $P = \{p_{ij}\}_{i,j=1,\dots,n}$ невырождена. В качестве $V(b)$ здесь можно взять проекцию Pb на ближайшую координатную ось.

Рассмотрим теперь особо случай, когда условие (3) имеет вид

$$\dot{x}(0) = 0. \tag{23}$$

Предположим, что выполнено условие (7). Тогда при любом x_0 уравнение $f(0, x_0, a_0) = 0$ имеет единственное решение $a_0 = 0$. Поэтому задачу (1), (2), (23) можно свести к двухточечной краевой задаче с параметром b

$$\dot{x} = f(t, x, bt), \tag{24}$$

$$x(0) = x_0, \ x(1) = x_1. \tag{25}$$

Для задачи (24), (25) применима теорема А. В. Кибенко, А. И. Перова ([1, теорема 6]). Поэтому справедлива

Теорема 2. *Пусть правая часть уравнения (1) удовлетворяет условиям (α_1), (α_2) и условию (7), причем $\varepsilon(t)$ в (7) суммируема на* $[0, 1]$. *Тогда задача (1), (2), (23) имеет решение.*

Простым примером системы, удовлетворяющей условиям теоремы 2, является система двух уравнений

$$\dot{x}_1 = (|x_2| + 1)\,u_1 - \|x\|\,u_2, \quad \dot{x}_2 = (|x_1| + 1)\,u_2 + \|x\|\,u_1.$$

Здесь P — единичный оператор, $\varepsilon(t) \equiv 1$.

В случае, когда правая часть уравнения (1) ограничена по x, справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть правая часть уравнения (1) удовлетворяет условию (α_1), а также условиям*

1) $\|f(t, x, u)\| \leqslant \alpha(t, u)$, *где $\alpha(t, u)$ суммируема на* $[0, 1]$ *по t;*

2) $(f(t, x, u_1) - f(t, x, u_2),\ P(u_1 - u_2)) \geqslant \varepsilon(t)\|u_1 - u_2\|^2$, *где P — линейный обратимый оператор, а $\varepsilon(t)$ — положительная и суммируемая на* $[0, 1]$ *функция.*

Тогда задача (1)—(3) имеет решение.

Доказательство. Из условия 2) теоремы следует, что уравнение (14) имеет единственное решение a_0 ([1]). Задачу (1)—(3) можно поэтому свести к задаче (15), (16) с параметром b, которая в свою очередь эквивалентна задаче о разрешимости операторного уравнения (17). В силу условий 1) и (α_1) оператор $T(b)$ в (17) определен на всем пространстве R^n и непрерывен.

Как и при доказательстве теоремы 1, рассмотрим непрерывные векторные поля $W(b) = Pb$ и $\Psi(b) = T(b) - x_1$.

В силу 1) и 2) $(f(t, x_b(t), a_0 + bt), Pb) = (f(t, x_b(t), a_0 + bt) - f(t, x, a_0), Pb) + (f(t, x_b(t), a_0), Pb) \geqslant \varepsilon(t)\,t\,\|b\|^2 - \|f(t, x, a_0)\|\,\|P\|\,\|b\| \geqslant \varepsilon(t)t\|b\|^2 - \alpha(t, a_0)\|P\|\|b\|$. Отсюда следует $(\Psi(b), Pb) = \left(\int_0^1 f(t, x_b(t), a_0 + bt)\,dt, Pb\right) + (x_0 - x_1, Pb) \geqslant \tilde{\varepsilon}\|b\|^2 - \tilde{\alpha}(a_0)\|P\|\|b\| - \|x_1 - x_0\|\,\|P\|\,\|b\|$, где $\tilde{\varepsilon} = \int_0^1 \varepsilon(t)\,dt$, $\tilde{\alpha}(a_0) = \int_0^1 \alpha(t, a_0)\,dt$.

Следовательно, $(\Psi(b), W(b)) > 0$ при $\|b\| = r > r_0 = \frac{\|P\|}{\tilde{\varepsilon}}(\tilde{\alpha}(a_0) + \|x_1 - x_0\|)$, откуда следует, что на сфере радиуса r поля $W(b)$ и $\Psi(b)$ гомотопны, а, следовательно, уравнение (17) имеет решение. Теорема доказана.

В случае задачи (1)—(3) для одного уравнения (f — скалярная функция трех скалярных переменных) справедливо следующее утверждение относительно единственности задачи (1)—(3).

Теорема 4. *Пусть скалярная функция $f(t, x, u)$ непрерывно дифференцируема по t, x, u и при всех $t \in [0, 1]$, $x \in R^1$, $u \in R^1$ справедливо $\frac{\partial f}{\partial u} \neq 0$. Тогда задача (1) — (3) для одного уравнения имеет не более одного решения.*

Доказательство. В силу условия $\frac{\partial f}{\partial u} \neq 0$ уравнение $f(0, x_0, a_0) = x_0$ имеет не более одного решения a_0.

Дальнейшие рассуждения аналогичны приведенным в [5].

Интерес, на наш взгляд, представляет также следующий результат, установленный для случая, когда условие (2) имеет вид

$$x(0) = x(1) = x_0. \tag{26}$$

Теорема 5. *Пусть функция $f(t, x, u)$ удовлетворяет условию (α_2) и такова, что уравнение (14) разрешимо относительно a_0. Пусть выполнены следующие условия:*

1) $f(t, x, u) = -f(t, x, -u)$ *при* $t \in [0, 1]$, $x \in R^n$, $u \in R^n$;

2) $f(\tau, x, u) = f(1-\tau, x, u)$ *при* $\tau \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $x \in R^n$, $u \in R^n$.

Тогда задача (1), (26), (3) имеет решение.

Доказательство. В силу разрешимости (14) задачу (1), (26), (3) можно свести к задаче

$$\dot{x} = f(t, x, a_0 + bt), \tag{27}$$

$$x(0) = x(1) = x_0. \tag{28}$$

Возьмем значение параметра $b = -2a_0$, тогда уравнение (27) принимает вид $\dot{x} = f(t, x, a_0(1-2t))$. Пусть $x_{-2a_0}(t)$ — какое-либо решение задачи

$$\dot{x} = f(t, x, a_0(1-2t)), \quad x(0) = x_0, \tag{29}$$

определенное на отрезке $[0, 1/2]$. Возьмем

$$y(t) = \begin{cases} x_{-2a_0}(t) & 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}, \\ x_{-2a_0}(1-t), & \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Очевидно, что $y(0) = y(1) = x_0$ и при $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ справедливо $\dot{y}(t) = f(t, y(t), a_0(1-2t))$. Для $t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ в силу условий 1) и 2) имеем $\dot{y}(t) = -\dot{x}_{-2a_0}(1-t) = -f(1-t, x_{-2a_0}(1-t), a_0(2t-1)) = -f(t, y(t), a_0(2t-1)) = f(t, y(t), a_0(1-2t))$. Следовательно, $y(t)$ является решением задачи (29), удовлетворяющим условию $x(1) = x_0$.

Таким образом, найдено решение уравнения (27) (соответствующее значению параметра $b = -2a_0$), которое удовлетворяет краевым условиям (28). Теорема доказана.

Замечание. Краевое условие (3) можно заменить условием $\dot{x}(1) = \dot{x}_1$. Все полученные результаты при этом остаются в силе.

Автор выражает благодарность профессору П. Е. Соболевскому за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Литература

1. Кибенко А. В., Перов А. И.— Труды семинара по функциональному анализу, 1963, вып. 7, с. 52—58.

2. Красносельский М. А., Забрейко П. П. Геометрические методы нелинейного анализа.—М.: Наука, 1974.

3. Красносельский М. А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1966.

4. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения.— М.: Наука, 1970.

5. Эйдельман Ю. С.— Дифференц. уравнения, 1978, т. 14, № 7, с. 1335—1337.

г. Воронеж

Поступила в редакцию 9 января 1979 г.