



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. И. Лежнин, Н. А. Прибатурин, А. Л. Сорокин, Влияние вязкости на образование пузырьков при декомпрессии водонасыщенной магмы, *Прикл. мех. техн. физ.*, 2005, том 46, выпуск 1, 21–28

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.173

11 февраля 2025 г., 15:09:32



УДК 532.526.5+551.213.3

ВЛИЯНИЕ ВЯЗКОСТИ НА ОБРАЗОВАНИЕ ПУЗЫРЬКОВ ПРИ ДЕКОМПРЕССИИ ВОДОНАСЫЩЕННОЙ МАГМЫ

С. И. Лежнин, Н. А. Прибатурин, А. Л. Сорокин

Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mail: lezhnin@itp.nsc.ru

На основе классической теории нуклеации исследовано влияние вязкости на процесс образования пузырьков в водонасыщенной магме. Сравнение с экспериментальными данными подтверждает заметное влияние вязкости на скорость гомогенной нуклеации в магме.

Ключевые слова: гомогенная нуклеация, пересыщение, пузырьки, вязкость, магма.

Характер вулканических извержений в значительной мере определяется образованием и ростом пузырьков растворенных в магме газов, среди которых доминируют H_2O и CO_2 [1]. Динамика дегазации магмы зависит от количества образовавшихся пузырьков, для определения которого используются теоретические зависимости для скорости нуклеации [2, 3]. Однако эти зависимости не учитывают влияние вязкости магмы, которое очень велико [4].

Целью данной работы является вычисление скорости гомогенной нуклеации в водонасыщенной магме на основе классической теории нуклеации [5] с учетом влияния вязкости. Для случая кипения чистой жидкости скорость гомогенной нуклеации была вычислена с учетом влияния вязкости и теплопроводности в работе [6]. Предложенный в [6] метод используется в данной работе, причем для удобства сравнения результатов основные обозначения сохранены.

Напомним кратко основные положения классической теории нуклеации [5]. Предполагается, что зародыши новой фазы являются макроскопическими и функция распределения их по размеру $f(t, r)$ определяется из уравнения типа Фоккера — Планка

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} \left(Af - B \frac{\partial f}{\partial r} \right) = 0. \quad (1)$$

Здесь A — скорость роста зародышей; B — коэффициент диффузии в “пространстве размеров”; J — скорость нуклеации. Для вычисления скорости роста закритических зародышей используется решение соответствующей континуальной задачи (теплопроводности, диффузии). При построении стационарного решения уравнения (1) граничное условие при $r \rightarrow 0$ имеет вид $f(r) = f_0(r)$, где $f_0(r)$ — функция распределения зародышей по размерам, определяемая согласно термодинамической теории флуктуаций. Граничное условие при $r \rightarrow \infty$ $J = \text{const}$. Из этих условий следует [5]

$$B = -A \left(\frac{d \ln f_0}{dr} \right), \quad J = 2 \sqrt{\frac{\sigma}{kT}} B(r_k) f_0(r_k),$$

где r_k — радиус критического зародыша; σ — поверхностное натяжение на границе фаз; k — постоянная Больцмана; T — температура среды.

Для условий дегазации водонасыщенной магмы по описанной схеме в [2] получено выражение

$$J = \frac{D_c C_0^2}{8\pi} \sqrt{\frac{kT}{\sigma}} \frac{2\sigma}{r_k P_0} \exp\left(\frac{V_m \Delta P}{kT}\right) \exp\left(-\frac{4\pi\sigma}{3kT} r_k^2\right). \quad (2)$$

Здесь C_0 — начальная концентрация воды в магме; D_c — коэффициент диффузии; P_0 — начальное давление при концентрации C_0 ; ΔP — перепад давления, соответствующий r_k ; V_m — объем молекулы воды в расплаве. При выводе зависимости (2) предполагалось выполнение условия механического равновесия околоскритических зародышей $p = p_0 + 2\sigma/r$, что позволило определить A из решения диффузионной задачи (p — давление пара в пузырьке радиуса r ; p_0 — давление в расплаве).

В рамках классической теории нуклеации предэкспоненциальный множитель не определяется однозначно [5]. На основе модели “частоты перехода молекул” в [3] для скорости нуклеации получена зависимость

$$J = 2 \frac{n_0^2 V_m D_c}{a_0} \sqrt{\frac{\sigma}{kT}} \exp\left(-\frac{4\pi}{3} \frac{\sigma}{kT} \left(\frac{2\sigma}{\Delta P}\right)^2\right). \quad (3)$$

Здесь n_0 — концентрация (недиссоциированных) молекул воды; a_0 — расстояние между молекулами воды в расплаве. Сравнение зависимостей (2) и (3), проведенное в работе [7], показало, что в области интенсивной нуклеации предэкспоненциальные множители различаются не более чем на порядок. Отметим, что зависимости (2) и (3) не содержат явно вязкость магмы.

Перейдем к решению поставленной задачи. Вместо уравнения (1) в [6] используется эквивалентное уравнение

$$\frac{\partial f_n}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial n} = \frac{\partial f_n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial n} (\dot{n} f_n - D \frac{\partial f_n}{\partial n}) = 0$$

для функции распределения зародышей f_n по числу молекул n с нормировкой $\int_1^{\infty} f_n dn = N_b$

(N_b — число зародышей в единице объема). Здесь и далее точкой обозначена производная по времени. Построение решения этого уравнения по схеме [5] приводит к выражению

$$J = \frac{C_0 k T}{4\pi\sigma} \left(\frac{d\dot{n}}{dr}\right)_k \sqrt{\frac{\sigma}{kT}} \exp\left(-\frac{4}{3} \frac{\pi\sigma r_k^2}{kT}\right). \quad (4)$$

Используя формулу Герца — Кнудсена, запишем выражение для скорости изменения числа молекул в пузырьке

$$\dot{n} = \pi\beta u_t r^2 [p_r - p] / (kT), \quad (5)$$

где p_r — равновесное давление пара на поверхности пузырька; $u_t = \sqrt{8kT/(\pi m)}$ — средняя тепловая скорость молекул пара; β — коэффициент конденсации. Процесс диффузии в окрестности пузырька определяется решением стационарного уравнения $\Delta C = 0$ с граничными условиями $C(r) = C_r$, $C(\infty) = C_m$, которое имеет вид

$$C(\bar{r}) = C_m + (C_r - C_m) r / \bar{r}$$

(\bar{r} — расстояние от центра пузырька). Используя это решение, получим

$$\dot{n} = 4\pi r^2 \left(\frac{\partial C}{\partial \bar{r}}\right)_{\bar{r}=r} = 4\pi r D_c (C_m - C_r), \quad C_r = C_m - \frac{\dot{n}}{4\pi r D_c}.$$

При локальном термодинамическом равновесии на поверхности пузырька связь p_r с концентрацией молекул воды определяется законом Генри $p_r = AC_r^2$. Подставляя эти выражения в (5), получим

$$\dot{n} = \frac{\pi\beta u_t r^2}{kT} \left[A \left(C_m - \frac{\dot{n}}{4\pi r D_c} \right)^2 - p \right].$$

Для околоритических пузырьков достаточно точным является приближение

$$\dot{n} = \frac{\pi\beta u_t r^2}{kT} \left[AC_m^2 - 2AC_m \frac{\dot{n}}{4\pi r D_c} - p \right].$$

После преобразований получим

$$\dot{n} = \pi\beta u_t r^2 [AC_m^2 - p] / (kT(1 + \delta)), \quad (6)$$

где $\delta = \beta u_t r AC_m / (2D_c kT)$. Для вычисления производной $(d\dot{n}/dr)_k$ в [6] использовалось уравнение Рэлея — Ламба

$$\rho r \ddot{r} + 3(\dot{r})^2/2 = p - p_0 - 2\sigma/r - 4\eta\dot{r}/r,$$

описывающее динамику сферического пузырька в вязкой жидкости. Выражая давление в пузырьке из этого уравнения, пренебрегая членом $3(\dot{r})^2/2$ ($\dot{r} = 0$ при $r = r_k$) и используя $\ddot{r} = \dot{r} d\dot{r}/dr$, после подстановки в (6) придем к выражению

$$\dot{n} = \frac{\pi\beta u_t r^2}{kT(1 + \delta)} \left[AC_m^2 - p_0 - \frac{2\sigma}{r} - 4\eta \frac{\dot{r}}{r} - \rho r \dot{r} \frac{d\dot{r}}{dr} \right].$$

Вычислим производную $d\dot{n}/dr$, пренебрегая производной первого сомножителя и всеми членами, содержащими $(\dot{r})^2$. После громоздких, но простых преобразований получим при $r = r_k$

$$\left(\frac{d\dot{n}}{dr} \right)_k = \frac{\pi\beta u_t r_k^2}{kT(1 + \delta_k)} \left\{ \frac{2\sigma}{r^2} - \frac{4\eta}{r} \frac{d\dot{r}}{dr} - \rho r \left(\frac{d\dot{r}}{dr} \right)^2 \right\}_k. \quad (7)$$

Пренебрегая неидеальностью пара в пузырьке, запишем

$$\dot{n} = \frac{d}{dt} \left(\frac{4}{3} \frac{\pi r^3 p}{kT} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{4}{3} \frac{\pi r^3}{kT} \left[\rho r \ddot{r} + p_0 + \frac{2\sigma}{r} + 4\eta \frac{\dot{r}}{r} \right] \right).$$

Дифференцируя это выражение так же, как и в предыдущем случае, и вычисляя производную при $r = r_k$, получим

$$\left(\frac{d\dot{n}}{dr} \right)_k = \frac{4\pi r_k^2}{kT} \left(\frac{d\dot{r}}{dr} \right)_k \left[p_0 + \frac{4\sigma}{3r_k} + \frac{\gamma\eta}{3} \left(\frac{d\dot{r}}{dr} \right)_k + \frac{1}{3} \rho r^2 \left(\frac{d\dot{r}}{dr} \right)_k^2 \right]. \quad (8)$$

Приравняв правые части (7) и (8) друг к другу, получим кубическое уравнение относительно $d\dot{r}/dr$

$$\frac{\rho r_k^2}{3} \left(\frac{d\dot{r}}{dr} \right)_k^3 + \left(\frac{4\eta}{3} + \frac{\beta u_t \rho r_k}{4(1 + \delta_k)} \right) \left(\frac{d\dot{r}}{dr} \right)_k^2 + \left(p_0 + \frac{4\sigma}{3r_k} + \frac{\eta\beta u_t}{(1 + \delta_k)r_k} \right) \left(\frac{d\dot{r}}{dr} \right)_k - \frac{\sigma\beta u_t}{2(1 + \delta_k)r_k^2} = 0.$$

Вводя безразмерные переменные

$$z = \frac{(1 + \delta_k)r_k}{\beta u_t} \left(\frac{d\dot{r}}{dr} \right)_k, \quad \omega = \frac{3}{2} \frac{\beta u_t \eta}{\sigma(1 + \delta_k)}, \quad \omega' = \frac{1}{3} \frac{(\beta u_t)^2 \rho r_k}{\sigma(1 + \delta_k)^2}, \quad b = \frac{2\sigma}{p_k r_k},$$

приведем уравнение к безразмерному виду

$$\omega' z^3 + \frac{8}{9} \omega \left(1 + \frac{27}{32} \frac{\omega'}{\omega} \right) z^2 + \frac{2}{3} \left(\frac{3 - b}{b} + \omega \right) z - \frac{1}{2} = 0.$$

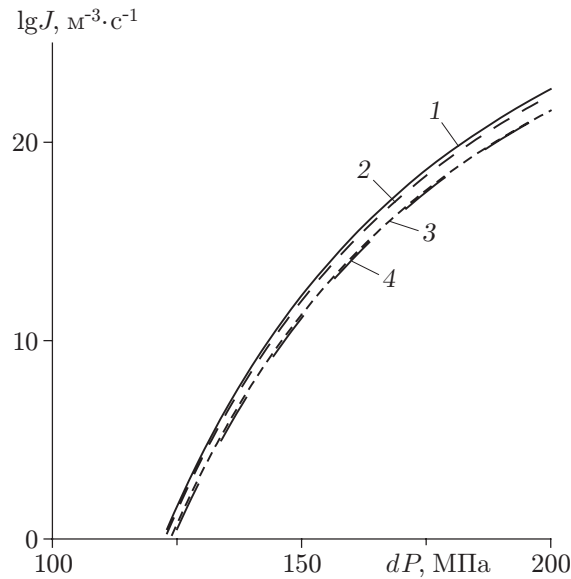


Рис. 1. Зависимость скорости нуклеации от давления пересыщения при различных значениях β :

1-3 — расчет по формуле (9) (1 — $\beta = 1$; 2 — $\beta = 10^{-5}$; 3 — $\beta = 10^{-6}$); 4 — расчет по формуле (2)

Предполагая $\omega'/\omega^2 \ll 1$ (пренебрегая инерционными членами), получим уравнение

$$z^2 + \frac{3}{4} \frac{1}{\omega} \left(\frac{3-b}{b} + \omega \right) z - \frac{9}{16} \frac{1}{\omega} = 0.$$

Подставляя положительное решение этого уравнения в (7), а полученный результат — в (4), приходим к следующему выражению для скорости нуклеации:

$$J = 3C_0 \frac{\beta u_t}{1 + \delta_k} \sqrt{\frac{\sigma}{kT}} \frac{1}{b} \left(\omega + \frac{3+b}{b} + \sqrt{\left(\omega + \frac{3-b}{b} \right)^2 + 4\omega} \right)^{-1} \exp \left(- \frac{4\sigma r_k^2}{3kT} \right). \quad (9)$$

Кроме коэффициентов вязкости, диффузии и постоянной закона Генри в предэкспоненту (9) входит коэффициент конденсации, который должен вычисляться методами кинетической теории газов. На рис. 1 представлено сравнение полученной зависимости при различных значениях β с зависимостью (2). Расчеты проведены при следующих значениях физических параметров: $C_0 = 3,45 \cdot 10^{27} \text{ м}^{-3}$, $P_0 = 200 \text{ МПа}$, $T = 1173 \text{ К}$, $D_c = 2,3 \cdot 10^{-11} \text{ м}^2/\text{с}$ (соответствующих условиям экспериментов [8]), $\sigma = 0,08 \text{ Н/м}$, $\eta = 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}$. Изменение β от 1 до 10^{-5} слабо влияет на скорость нуклеации, а при $\beta = 10^{-6}$ зависимости (2) и (9) практически совпадают.

В общем случае коэффициент конденсации может зависеть от кривизны поверхности, пересыщения и т. д. Все величины, входящие в (9), вычисляются для критического зародыша. Предполагая, что при малой вязкости зависимости (2) и (9) различаются незначительно и для околоскритических пузырьков приближенно выполняется условие механического равновесия (как в [2]), определим β из условия равенства диффузионного и кинетического потоков молекул на поверхности околоскритического пузырька:

$$\dot{n} = \pi \beta u_t r^2 (p_r - p) / (kT) = 4\pi r D_c (C_m - C_r)$$

и

$$\beta = \frac{4D_c kT}{u_t r} \frac{C_m - C_r}{p_r - p}.$$

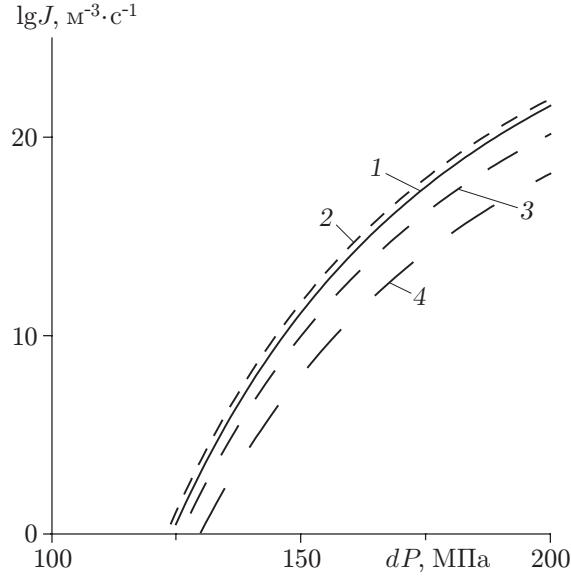


Рис. 2. Зависимость скорости нуклеации от давления пересыщения:
 1 — расчет по формуле (2); 2–4 — расчет по формуле (10) (2 — $\eta = 10^2$ Па·с; 3 — $\eta = 10^4$ Па·с; 4 — $\eta = 10^6$ Па·с)

При $r \rightarrow r_k$ имеем $C_r \rightarrow C_m$, $p \rightarrow p_r(C_m)$. С учетом этого получим выражение для коэффициента конденсации

$$\beta = \frac{4D_c k T}{u_t r_k} \left(\frac{dP}{dC} \right)_{C_m}^{-1}.$$

При таком выборе β формулы для безразмерных параметров и полученная зависимость принимают следующий вид:

$$\omega = \frac{3}{2} \frac{\eta D_c k T}{\sigma r_k A C_m}, \quad \omega' = \frac{1}{3} \left(\frac{D_c k T}{A C_m} \right)^2 \frac{\rho}{r_k \sigma}, \quad b = \frac{2\sigma}{p_k r_k},$$

$$J = \frac{3C_0^2 D_c k T}{r_k p_0} \sqrt{\frac{\sigma}{kT}} \frac{1}{b} \left(\omega + \frac{3+b}{b} + \sqrt{\left(\omega + \frac{3-b}{b} \right)^2 + 4\omega} \right)^{-1} \exp \left(- \frac{4\sigma r_k^2}{3kT} \right), \quad (10)$$

а условие $\omega'/\omega^2 \ll 1$ сводится к условию $\omega'/\omega^2 = 4\rho\sigma r_k/(27\eta^2) \ll 1$, которое выполняется с высокой точностью для характерных значений физических параметров магмы. Таким образом, при вычислении предэкспоненциального множителя учтен вклад давления и вязких сил в динамику пузырька, а условие механического равновесия пузырька использовано только для приближенного вычисления коэффициента конденсации.

Сравнение зависимостей (10) и (2) при различных значениях вязкости представлено на рис. 2. Расчеты выполнены для следующих параметров: $C_0 = 3,45 \cdot 10^{27}$ м⁻³, $P_0 = 200$ МПа, $T = 1173$ К, $D_c = 2,3 \cdot 10^{-11}$ м²/с, $\sigma = 0,08$ Н/м. При малой вязкости зависимости практически совпадают, а при $\eta = 10^4$ Па·с скорость нуклеации уменьшается на один–два порядка в зависимости от пересыщения. Наиболее значительно влияние вязкости при $\eta = 10^6$ Па·с.

Для изучения механизма гомогенного зародышеобразования в магме проведены экспериментальные исследования при высоких температурах и давлениях [8, 9], соответствующих условиям в канале вулкана. Эксперименты [9] проводились при начальном давлении 200 МПа и температуре 1073 К. Однако режим гомогенного зародышеобразования в этих экспериментах наблюдался только для образцов, содержащих (кроме Н₂О) значительное

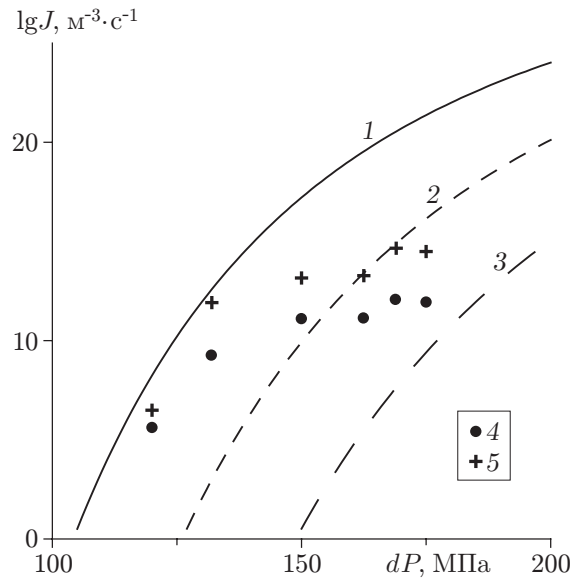


Рис. 3. Зависимость скорости нуклеации от давления пересыщения при различных значениях поверхностного натяжения:

1-3 — расчеты по зависимости (10) (1 — $\sigma = 0,07$ Н/м; 2 — $\sigma = 0,08$ Н/м; 3 — $\sigma = 0,09$ Н/м); 4 — экспериментальные данные [9]; 5 — данные [9] с учетом корректировки

количество CO_2 . Впервые режим гомогенного зародышеобразования для водонасыщенных образцов наблюдался в экспериментах [8], проведенных при более высокой температуре (1173 К).

Сравнение результатов расчетов по (10) с экспериментальными данными [8] для различных значений поверхностного натяжения представлено на рис. 3, где приведены также результаты корректировки экспериментальных данных по зависимости для длительности нуклеации, полученной в [10]. Скорость нуклеации определялась в [8] по полному времени декомпрессии. Однако интервал времени, на котором происходит интенсивная нуклеация, мал по сравнению с полным временем декомпрессии. Для корректировки скорости нуклеации измеренная в [8] числовая концентрация пузырьков делилась на длительность нуклеации, вычисленную по зависимости из [10]. Как следует из рис. 3, в результате корректировки скорость нуклеации увеличивается на два-три порядка. При сравнении необходимо учитывать, что на экспериментальные данные при умеренной скорости декомпрессии (0,025 МПа/с) может влиять гетерогенная нуклеация на стенках капсулы. Это отмечено в [8], где обработка данных этих опытов проводилась с учетом остаточного содержания воды в образцах. Результаты, полученные при скорости декомпрессии 8,5 МПа/с, не имеют таких погрешностей. С учетом этих замечаний можно сделать вывод, что $\sigma = 0,08$ Н/м. Это значение близко к значению $\sigma = 0,076$ Н/м, для которого в [11] получено хорошее соответствие результатов расчета экспериментальным данным [3]. Отличие $\sigma = 0,08$ Н/м от значения $\sigma = 0,10 \div 0,11$ Н/м, полученного в [8] с использованием (3), связано с учетом влияния вязкости в зависимости (10).

Возможным подтверждением влияния вязкости на скорость нуклеации является различие результатов экспериментов [8] и [9]. Значения температуры в этих экспериментах различаются на 100 К. Это, по-видимому, является причиной того, что для близких начального содержания воды и давления гомогенная нуклеация в [9] не наблюдалась (для образцов без CO_2). Уменьшение массовой концентрации на 1 % и температуры на 100 К в этой области параметров приводит к увеличению вязкости на порядок [4]. Вычисленные с

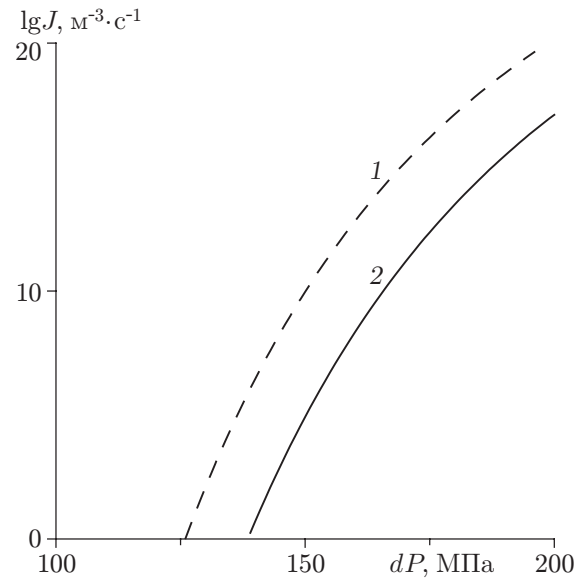


Рис. 4. Зависимость (10) скорости нуклеации от давления пересыщения при $\sigma = 0,08$ Н/м для условий экспериментов:

1 — $T = 1173$ К, $C = 5,2$ % [8]; 2 — $T = 1073$ К, $C = 4,6$ % [9]

Образец	dP , МПа	J_1 , м ³ /с	J_2 , м ³ /с
VGD6	160	$6,5 \cdot 10^{11}$	$2,18 \cdot 10^8$
VGD10	178	$1,2 \cdot 10^{16}$	$1,12 \cdot 10^{13}$
VGD13	190	$1,9 \cdot 10^{18}$	$2,81 \cdot 10^{15}$

учетом различия температур и содержания воды по зависимости (10) значения скорости нуклеации при $\sigma = 0,08$ Н/м различаются на пять–шесть порядков (рис. 4). Результаты расчета скорости нуклеации J_1 по формуле (3) и J_2 по формуле (10) для типичных условий экспериментов [9] представлены в таблице (где dP — уменьшение давления в эксперименте с указанным образцом). Расчеты J_1 проводились для $\sigma = 0,105$ Н/м (использованного в [9] для проведения оценок по (3)), а величина J_2 вычислялась при $\sigma = 0,08$ Н/м. При указанных пересыщениях J_2 на три порядка меньше J_1 даже при значительно меньшей величине поверхностного натяжения, что определяется влиянием вязкости. Однако полученные оценки скорости нуклеации значительно превышают порог чувствительности $J_0 = 10^4$ м³/с, указанный в [9], и не дают однозначного объяснения отсутствия гомогенной нуклеации в этих экспериментах.

Полученная в данной работе зависимость учитывает влияние вязкости на скорость гомогенной нуклеации при декомпрессии водонасыщенной магмы. С соответствующей корректировкой эта зависимость может применяться для расчета влияния вязкости на скорость гетерогенной нуклеации. Проведенное сравнение с экспериментальными данными подтверждает заметное влияние вязкости на скорость гомогенной нуклеации в магме.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Слезин Ю. Б.** Механизм вулканических извержений. М.: Научный мир, 1998.
2. **Toramaru A.** Vesiculation process and bubble size distributions in ascending magmas with constant velocities // J. Geophys. Res. 1989. V. 94, N B12. P. 17.523–17.542.

3. **Hurwitz S., Navon O.** Bubble nucleation in rhyolitic melt: Experiments at high pressure, temperature, and water content // *Earth Planet. Sci. Lett.* 1994. V. 122. P. 267–280.
4. **Hess K.-U., Dingwell D. B.** Viscosities of hydrous leucogranitic melts: A non-Arrhenian model // *Amer. Mineral.* 1996. V. 81. P. 1297–1300.
5. **Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П.** Физическая кинетика. М.: Наука, 1979.
6. **Каган Ю.** К кинетике кипения чистой жидкости // *Журн. физ. химии.* 1960. Т. 34, № 2. С. 92–101.
7. **Navon O., Lyakhovsky V.** Vesiculation processes in silicic magmas // *The physics of explosive volcanic eruptions* / Eds by J. S. Gilbert, R. S. J. Sparks. L.: Geol. Soc. London Spec. Publ., 1998. V. 145. P. 27–50.
8. **Mangan M., Sisson T.** Delayed, disequilibrium degassing in rhyolite magma: Decompression experiments and implications for explosive volcanism // *Earth Planet. Sci. Lett.* 2000. V. 183. P. 441–455.
9. **Mourtada-Bonnefoi C., Laporte D.** Experimental study of homogenous bubble nucleation in rhyolite magmas // *Geophys. Res. Lett.* 1999. V. 26. P. 3505–3508.
10. **Toramaru A.** Numerical study of nucleation and growth of bubbles in a viscous magmas // *J. Geophys. Res.* 1995. V. 100, N B2. P. 1913–1931.
11. **Чернов А. А., Кедринский В. К., Давыдов М. Н.** Спонтанное зарождение пузырьков в газонасыщенном расплаве при его мгновенной декомпрессии // *ПМТФ.* 2004. Т. 45, № 2. С. 162–168.

*Поступила в редакцию 30/III 2004 г.,
в окончательном варианте — 11/V 2004 г.*
