А. В. Булинский, М. А. Лифшиц, Наилучшая скорость сходимости в законе Штрассена для случайных ломаных,
Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 1995, номер 5, 37–42

УДК 519.21

А. В. Булинский, М. А. Лифшиц

НАИЛУЧШАЯ СКОРОСТЬ СХОДИМОСТИ В ЗАКОНЕ ШТРАССЕНА ДЛЯ СЛУЧАЙНЫХ ЛОМАНЫХ

К числу замечательных результатов теории случайных процессов относится принцип инвариантности, означающий, что при определенных условиях динамика поведения сумм независимых или слабо зависимых величин близка к характеру флуктуаций сумм независимых гауссовских слагаемых (см., например, [1—5]). Данная работа посвящена анализу нового эффекта, демонстрирующего качественное *различие* между поведением сумм в гауссовском и негауссовском случаях. Это различие проявляется при изучении возможных скоростей сходимости в функциональном законе повторного логарифма (ФЗПЛ). В связи с этим нас интересует выявление максимально достижимых скоростей.

Напомним, что основной результат классической работы Штрассена [6], получивший название ФЗПЛ, можно сформулировать следующим образом. Обозначим через $\{W(t)=W(t,\omega), t\geqslant 0\}$ стандартный винеровский процесс на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ и положим $L_r=L(r)=2\log\log r$, $r\geqslant 3$. Рассмотрим в пространстве $\mathbf{C}[0,1]$ семейство случайных функций

$$f_n(t,\omega)=W(nt,\omega)/(nL_n)^{1/2},\quad t\in[0,1],\quad n\geqslant 3. \tag{1}$$

Пусть $\mathbf{U}$ — единичный шар пространства $\mathbf{C}[0,1]$, снабженного равномерной метрикой ρ, $\mathbf{K}$ — множество (шар) Штрассена, состоящее из абсолютно непрерывных функций $f(t)$, $t\in[0,1]$, таких, что $f(0)=0$ и

$$\int_0^1 f'(t)^2\,dt\leqslant 1.$$

Тогда ФЗПЛ утверждает, что для любого $\varepsilon>0$ и $\mathbf{P}$-почти всех ($\mathbf{P}$-п. в.) $\omega\in\Omega$

$$f_n(\cdot,\omega)\in\mathbf{K}+\varepsilon\mathbf{U} \text{ при } n>N(\omega,\varepsilon), \tag{2}$$

а также что для любого $\varepsilon>0$ и каждой функции $f\in\mathbf{K}$ при п. в. $\omega\in\Omega$

$$f_n(\cdot,\omega)\in f+\varepsilon\mathbf{U} \text{ бесконечно часто (б. ч.)}, \tag{3}$$

т. е. $f_{n_j}(\cdot,\omega)\in f+\varepsilon\mathbf{U}$ для некоторой подпоследовательности $\{n_j=n_j(\omega, f, \varepsilon)\}_{j=1}^{\infty}$.

ФЗПЛ означает, что п. н. множество предельных точек $\{f_n\}$ в пространстве $(\mathbf{C}[0,1], \rho)$ (о других пространствах см. в [7]) совпадает с $\mathbf{K}$. Это же утверждение справедливо (см. [6]), если в (2) и (3) заменить функции f_n на случайные ломаные

$$S_n(t)=S(nt)/(nL_n)^{1/2},\quad t\in[0,1],\quad n\geqslant 3, \tag{4}$$

где

$$S(t)=\sum_{j\leqslant t}X_j+(t-[t])\,X_{[t]+1},\quad t\geqslant 0, \tag{5}$$

а X, X_1, X_2, ... — независимые одинаково распределенные величины с нулевым средним и единичной дисперсией, $[\cdot]$ — целая часть числа; сумма по пустому множеству считается равной нулю.

Среди работ, посвященных дальнейшему развитию ФЗПЛ, нас будут интересовать те, в которых изучается оценка скорости сближения функций f_n с множеством **K**. Речь идет об усилении (3), когда в этом соотношении вместо произвольного фиксированного $\varepsilon>0$ можно брать $\varepsilon_n\to 0$, т. е. рассматривать семейство сжимающихся окрестностей шара Штрассена **K**. Первые оценки такого типа получены в 1978 г. Е. Болтхаузеном [8] (см. также [9—12]). В 1992 г. в работах К. Грилла [13] и М. Талаграна [14] было показано, что существуют константы $\gamma_1, \gamma_2>0$, такие, что с вероятностью единица

$$f_n \in \mathbf{K}+\gamma_1 L_n^{-2/3}\mathbf{U} \text{ при } n>N(\omega) \tag{6}$$

и в то же время

$$f_n \notin \mathbf{K}+\gamma_2 L_n^{-2/3}\mathbf{U} \text{ б. ч.} \tag{7}$$

В недавней работе У. Айнмаля и Д. Мейсона [15] рассмотрен вопрос о скорости приближения к множеству **K** случайных ломаных, определенных в (4). Установлено, что при любом $\beta\in[1/2, 2/3]$ и некотором $\gamma>0$ для **P**-п. в. $\omega\in\Omega$

$$S_n \in \mathbf{K}+\gamma L_n^{-\beta}\mathbf{U} \text{ при } n>N(\omega, \beta, \gamma) \tag{8}$$

тогда и только тогда, когда $\mathbf{E}X^2(L(|X|))^{2\beta-1}<\infty$.

В частности, «гауссовская» скорость сходимости $L_n^{-2/3}$ из (6), (7) обеспечивается для S_n моментным условием $\mathbf{E}X^2(L(|X|))^{1/6}<\infty$. Удивительный факт состоит, однако, в том, что эта скорость оказывается не лучшей возможной. В [15] показано, что существует такая величина X, что $\mathbf{E}X=0$, $\mathbf{E}X^2=1$, и с вероятностью единица для любого $\beta\in\in(2/3, 3/4)$ при достаточно больших n выполнено условие (8) с $\gamma=1$. Более того, в [15] утверждается, что соответствующая скорость сходимости допускает оценку вида

$$\varepsilon_n=\gamma(\log L_n)L_n^{-3/4}, \quad \gamma>0. \tag{9}$$

Цель настоящей работы — полностью выяснить вопрос *о возможных скоростях сходимости ломаных S_n к шару* **K**. Мы предлагаем простой интегральный тест, отличающий «возможные» скорости от «невозможных». Решение поставленной задачи базируется на недавно полученных авторами (см. [18, 19] и предложение ниже) оценках скорости сближения с **K** *неклассически нормированных* (см. [16, 17]) траекторий винеровского процесса.

Рассмотрим класс $\mathscr{M}$ неубывающих положительных непрерывных функций, определенных на $[0, \infty)$. Для функции $G\in\mathscr{M}$ определим функционал

$$I_G=\int_1^\infty \frac{dx}{xG(x)^4}\leqslant\infty.$$

Теорема 1. *Пусть $G\in\mathscr{M}$ и $I_G<\infty$. Тогда на некотором вероятностном пространстве найдется такая последовательность независимых одинаково распределенных величин $X, X_1, X_2, \ldots$ с $\mathbf{E}X=0$, $\mathbf{E}X^2=1$, что с вероятностью единица для ломаных S_n, определенных в* (4), *верно соотношение*

$$S_n \in \mathbf{K}+L_n^{-3/4}G(L_n)\mathbf{U}, \quad n>N(\omega). \tag{10}$$

Оценка (9) получается из (10) при $G(x)=\gamma\log x$.

Наш результат неулучшаем в следующем смысле.

Теорема 2. *Если* $G \in \mathscr{M}$, $G(x)=o(x^{1/12})$, $x/G(x)^4$ *не убывает и для некоторой последовательности* X, X_1, X_2, ... , *описанной в теореме* 1, *выполнено условие* (10), *то* $I_G<\infty$.

В частности, скорость сходимости $L_n^{-3/4}(\log L_n)^{\alpha}$ достигается для некоторых ломаных S_n при $\alpha>1/4$ и недостижима при любом $\alpha\leqslant 1/4$.

Теперь мы наметим доказательства теорем 1 и 2.

Доказательство теоремы 1. Распределение искомой случайной величины X выберем таким образом, чтобы соответствующая плотность имела вид

$$p(x)=\begin{cases} a_0, & |x|\leqslant a_1; \\ |x|^{-3}(\log|x|)^{-1}(L(|x|)^{-3/2}G(L(|x|))^{-2}, & |x|\geqslant a_1. \end{cases} \tag{11}$$

В силу симметрии $\mathbf{E}X=0$, а за счет выбора параметров a_0, a_1 можно добиться выполнения условия $\mathbf{E}X^2=1$. Положим $H(x)=x^2L(x)^{1/2}G(L(x))^{-2}$. Из условия $L_G<\infty$ и формулы (11) следует, что $\mathbf{E}H(X)<\infty$.

В [15] на основе результатов [20] доказана следующая форма принципа инвариантности: если функция $H:[0,\infty)\to[0,\infty)$ непрерывна и возрастает, причем функции $H(x)/x^2$ и $x^3/H(x)$ не убывают при больших x и $\mathbf{E}H(X)<\infty$, то величины $\{X_j\}$ можно так реализовать на одном вероятностном пространстве с винеровским процессом W, что

$$\rho(S_n,\ \sigma_n f_n)=o\left(\frac{H^{-1}(n)}{(nL_n)^{1/2}}\right), \tag{12}$$

где элементы f_n определены в (1), и

$$\sigma_n^2=\mathbf{E}X^2\mathbf{1}_{\{|X|\leqslant H^{-1}(n)\}};$$

здесь $H^{-1}(\cdot)$ — функция, обратная $H(\cdot)$, а $\mathbf{1}_{\{\cdot\}}$ обозначает индикатор. Предположим, что функция $x/G(x)^4$ не убывает. Тогда выполнены все вышеперечисленные предпосылки для (12), откуда с учетом соотношения

$$H^{-1}(n)\sim n^{1/2}L_n^{-1/4}G(L_n)$$

в свою очередь получаем

$$\rho(S_n,\ \sigma_n f_n)=o(L_n^{-3/4}G(L_n)). \tag{13}$$

Далее, из явной формулы (11) и в силу монотонности $x/G(x)^4$ при больших n имеем оценку

$$1-\sigma_n^2=\int\limits_{H^{-1}(n)}^{\infty}x^2p(x)\,dx\geqslant L_n^{-1/2}G(L_n)^{-2}/32.$$

Положим $d_n^2=1-L_n^{-1/2}G(L_n)^{-2}/32$. Тогда $d_n\geqslant\sigma_n$, и поскольку $\mathbf{K}$ — звездное множество (если $z\in\mathbf{K}$, то $cz\in\mathbf{K}$ для $c\in[0,1]$), имеем

$$\rho(\sigma_n f_n,\ \mathbf{K})\leqslant\rho(d_n f_n,\ \mathbf{K}). \tag{14}$$

Вектор d_nf_n запишем в виде $d_nf_n=W(n\cdot)n^{-1/2}\varphi_n$, где $\varphi_n=L_n^{1/2}d_n^{-1}$ — неубывающая функция, и применим к правой части (14) оценку из [18], которая в нашем случае имеет вид

$$\rho(d_nf_n,\ \mathbf{K})\leqslant A\Psi_n,\quad n>N(\omega), \tag{15}$$

где A — абсолютная константа и

$$\Psi_n = \begin{cases} L_n^{-2/3} \text{ при } L_n^{1/2} \leqslant \varphi_n \leqslant L_n^{1/2} + L_n^{-1/6}, \\ (\varphi_n - L_n^{1/2})\, \varphi_n^{-3/2} \text{ при } \varphi_n > L_n^{1/2} + L_n^{-1/6}. \end{cases} \tag{16}$$

Из определения φ_n и d_n следует неравенство

$$\varphi_n - L_n^{1/2} = L_n^{1/2}\,(d_n^{-1} - 1) \geqslant G\,(L_n)^{-2}/64.$$

Поэтому, если $\varphi_n \geqslant L_n^{1/2} + L_n^{-1/6}$, имеем

$$\Psi_n \leqslant [G\,(L_n)^{-2}/64]^{-1/2}\,(L_n^{1/2})^{-3/2} \leqslant 8L_n^{-3/4} G\,(L_n),$$

а если $\varphi_n \leqslant L_n^{1/2} + L_n^{-1/6}$, то тоже

$$\Psi_n = L_n^{-2/3} = L_n^{-3/4}\,(L_n^{-1/6})^{-1/2} \leqslant L_n^{-3/4}\,(\varphi_n - L_n^{1/2})^{-1/2} \leqslant 8L_n^{-3/4} G\,(L_n).$$

Соединяя полученные оценки с (13), (15) и (14), имеем

$$\rho\,(S_n,\ \mathbf{K}) \leqslant \rho\,(S_n,\ \sigma_n f_n) + \rho\,(\sigma_n f_n,\ \mathbf{K}) \leqslant \rho\,(S_n,\ \sigma_n f_n) +$$

$$+ \rho\,(d_n f_n,\ \mathbf{K}) \leqslant \rho\,(S_n,\ \sigma_n f_n) + A\Psi_n \leqslant (8A + o\,(1))\, L_n^{-3/4} G\,(L_n).$$

Таким образом, теорема 1 доказана при дополнительном предположении о монотонности функции $x/G\,(x)^4$. Однако для произвольной функции $G \in \mathscr{M}$ с $I_G < \infty$ нетрудно построить такую функцию $\tilde{G} \in \mathscr{M}$, что $\tilde{G} \leqslant G$, $x/\tilde{G}\,(x)^4$ не убывает и $I_{\tilde{G}} < \infty$. Применяя уже доказанный результат к $\tilde{G}$, убеждаемся, что он верен и для G. ■

Доказательство теоремы 2. Из (10) следует, что при больших n

$$|X_n| = (nL_n)^{1/2} \left| S_n(1) - S_n\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant (nL_n)^{1/2} \left\{ 2\rho\,(S_n,\ \mathbf{K}) + \sup_{h \in \mathbf{K}} \left| h\,(1) - h\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right|\right\} =$$

$$= (nL_n)^{1/2}\,\{2\rho\,(S_n,\ \mathbf{K}) + n^{-1/2}\} \leqslant 3n^{1/2} L_n^{-1/4} G\,(L_n).$$

Применяя лемму Бореля—Кантелли к независимым событиям $\{|X_n| \geqslant 3n^{1/2} L_n^{-1/4} G\,(L_n)\}$, легко убедиться в том, что для функции $H\,(x) = x^2 L\,(x)^{1/2}\, G\,(L\,(x))^{-2}$ верно $\mathbf{E}H\,(|X|) < \infty$.

Положим $R\,(x) = \mathbf{E}\,|X|^2\, \mathbf{1}_{\{|X| \leqslant x\}}$ и рассмотрим следующую дополнительную гипотезу.

(C) Существуют такие $a > 0$ и $x_0 > 0$, что при всех $x > x_0$ найдется такое число $y_x \in [x,\ x^{\log x}]$, что

$$1 - R\,(y_x) \geqslant aL\,(y_x)^{-1/2}\, G\,(L\,(y_x))^{-2}. \tag{17}$$

Выведем утверждение теоремы из гипотезы (C). Во-первых, заметим, что при $x > x_0$

$$1 - R\,(x) \geqslant 1 - R\,(y_x) \geqslant aL\,(y_x)^{-1/2}\, G\,(L\,(y_x))^{-2} \geqslant$$

$$\geqslant aL\,(y_x)^{-1}\, L\,(x)^{1/2}\, G\,(L\,(x))^{-2} \geqslant aL\,(x)^{-1/2}\, G\,(L\,(x))^{-2}, \tag{18}$$

т. е. мы имеем неравенство, аналогичное (17), но уже для всех достаточно больших x. Далее, дважды интегрируя по частям и пользуясь конечностью $\mathbf{E}H\,(|X|)$, получаем при $D > x_0$

$$\infty > \mathbf{E}|X|^2 L(|X|)^{1/2} G(L(|X|))^{-2} \geqslant \int_D^\infty L(x)^{1/2} G(L(x))^{-2} d(R(x)-1) \geqslant$$

$$\geqslant \int_D^\infty (1-R(x))\, d\{L(x)^{1/2} G(L(x))^{-2}\} \geqslant$$

$$\geqslant (a/4) \int_D^\infty L(x)^{-1} d\{L(x) G(L(x))^{-4}\} =$$

$$= (a/4)\left[\int_D^\infty L(x)^{-1} G(L(x))^{-4} d(L(x)) - G(L(D))^{-4}\right] =$$

$$= (a/4)\left[\int_{L(D)}^\infty y^{-1} G(y)^{-4}\, dy - G(L(D))^{-4}\right].$$

Отсюда следует, что $\int_{L(D)}^\infty y^{-1} G(y)^{-4}\, dy < \infty$, т. е. $I_G < \infty$, и теорема доказана. Остается вывести гипотезу (C). Покажем, что дополнительная к (C) гипотеза (C') приводит к противоречию при малых a. Гипотеза (C') имеет следующий вид.

(C'). *Для любого $a>0$ существует такая последовательность $\{x_k\} \to \infty$, что при всех $y \in [x_k,\ x_k^{\log x_k}]$ верно*

$$1 - R(y) \leqslant aL(y)^{-1/2} G(L(y))^{-2}.$$

Как и в теореме 1, применяя (12) с $H(x) = x^2 L(x)^{1/2} G(L(x))$ и учитывая (10), находим, что при больших n

$$\sigma_n f_n \in \mathbf{K} + 2L_n^{-3/4} G(L_n)\,\mathbf{U}.$$

Положим $v_n^0 = \{1 - aL(H^{-1}(n)) G(L(H^{-1}(n)))\}$, $v_n = v_n^0 \{L_n / L(H^{-1}(n))\}^{1/2}$. Тогда по определению $\{x_k\}$ на множестве $\Theta = \{n : H^{-1}(n) \in \bigcup_k [x_k,\ x_k^{\log x_k}]\}$ выполнено

$$1 - \sigma_n^2 = 1 - R(H^{-1}(n)) \leqslant aL(H^{-1}(n))^{-1/2} G(L(H^{-1}(n)))^{-2} = 1 - (v_n^0)^2.$$

Следовательно, $\sigma_n \geqslant v_n^0$ и при больших n верно $v_n^0 f_n \in \mathbf{K} + 2L_n^{-3/4} G(L_n)\,\mathbf{U}$. Учитывая, что $v_n / v_n^0 \leqslant 1 - 3L_n^{-1}$, имеем

$$v_n f_n \in \mathbf{K} + 3L_n^{-3/4} G(L_n)\,\mathbf{U}. \tag{19}$$

С другой стороны, к последовательности $v_n f_n$ можно применить следующую оценку, которая является небольшим уточнением результатов из [18, 19].

Предложение. *Существует такая абсолютная константа B, что для любой неубывающей последовательности φ_n такой, что*

$$\varphi_n \geqslant L_n^{1/2} + L_n^{-1/6},\quad \varphi_n \leqslant 2L_n^{1/2},\quad \textit{верно}$$

$$\lim_{r\to\infty} \mathbf{P}\left\{ \sup_{n \in [r,\, r^{\log r}]} \rho\left(\frac{L_n^{1/2} f_n}{\varphi_n},\ \mathbf{K}\right) \Big/ \Psi_n > B \right\} = 1, \tag{20}$$

где $\Psi_n = (\varphi_n - L_n^{1/2})^{-1/2} \varphi_n^{-3/2}$.

Из (20) следует, что для любой последовательности $x_k \to \infty$ с положительной вероятностью при достаточно больших k найдется такое $n \in ([x_k,\ x_k^{\log x_k}])$, что

$$L_n^{1/2} f_n/\varphi_n \notin \mathbf{K} + B\Psi_n \mathbf{U}. \tag{21}$$

Воспользуемся оценкой (21) применительно к $\varphi_n = L_n^{1/2} v_n^{-1}$. Нетрудно проверить, что φ_n действительно не убывает, а из условия $G(x) = o(x^{1/12})$ следует, что $\varphi_n \geqslant L_n^{1/2} + L_n^{-1/6}$. Соотношение (21) дает:

$$v_n f_n \notin \mathbf{K} + B\Psi_n \mathbf{U}.$$

Из определения v_n и v_n^0 нетрудно вывести, что $\varphi_n \sim L_n^{1/2}$ и $\Psi_n \geqslant a^{-1/2} L_n^{-3/4} G(L_n)/5$. Поэтому

$$v_n f_n \notin \mathbf{K} + (a^{-1/2} B L_n^{-3/4} G(L_n)/5)\,\mathbf{U}. \tag{22}$$

При $a < (B/15)^2$ между (19) и (22) возникает противоречие. Оно показывает, что гипотеза (C') не может иметь места. Следовательно, справедлива гипотеза (C), при выполнении которой теорема 2 уже была доказана.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 93-011-1454.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. М., 1977.
2. Саханенко А. И. Скорость сходимости в принципе инвариантности для разнораспределенных величин с экспоненциальными моментами//Тр. Ин-та матем. СО АН СССР. 1984. **3**. 4—49.
3. Komlos J., Major P., Tusnady G. An approximation of partial sums of independent rv's and the sample df, I, II//Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb. 1975. **32**, N 2. 111—131; 1976. **34**, N 1. 33—58.
4. Lifshits M. A. Gaussian random functions. Kluwer, 1995.
5. Philipp W., Stout W. F. Almost sure convergence//Mem. AMS. 1974. **145**.
6. Strassen V. An invariance principle for the law of the iterated logarithm//Z. Wahrsheinlichkeitstheor. und verw. Geb. 1964. **3**. 211—226.
7. Deheuvels P., Lifshits M. A. Strassen-type functional laws for strong topologies//Probab. Theor. Rel. Fields. 1993. **97**. 151—167.
8. Bolthausen E. On the speed of convergence in Strassen law of the iterated logarithm//Ann. Probab. 1978. **6**, N 3. 668—672.
9. Булинский А. В. О скорости сходимости в функциональном законе повторного логарифма//Докл. АН СССР. 1982. **263**, № 2. 274—276.
10. Goodman V., Kuelbs J. Rates of clustering for some Gaussian self-similar processes//Probab. Theor. Rel. Fields. 1991. **88**. 47—75.
11. Goodman V., Kuelbs J. Rates of clustering in Strassen's LIL for Brownian motion//J. Theor. Probab. 1991. **4**, N 2. 285—310.
12. Mijnheer J. A new lower bound for the rate of convergence in Strassen's functional law of the iterated logarithm. Preprint. Leiden, 1993.
13. Grill K. Exact rate of convergence in Strassen's law of iterated logarithm//J. Theor. Probab. 1992. **5**, N 1. 197—205.
14. Talagrand M. On the rate of clustering in Strassen's LIL for Brownian motion//Proc. Conf. Probability in Banach Spaces, VIII. Basel, 1993. 339—347.
15. Einmal U., Mason D. Rates of clustering in Strassen's LIL for partial sum processes. Preprint. 1993.
16. Булинский А. В. О функциональном законе повторного логарифма//Докл. АН СССР. 1978. **238**, № 5. 1025—1027.
17. Булинский А. В. Новый вариант функционального закона повторного логарифма//Теор. вероятн. и ее применен. 1980. **25**, № 3. 493—503.
18. Булинский А. В., Лифшиц М. А. О скорости сходимости в функциональном законе повторного логарифма для нестандартных нормирующих множителей//Докл. РАН. 1994. **335**, № 3. 279—280.
19. Булинский А. В., Лифшиц М. А. Скорость сходимости в функциональном законе повторного логарифма для нестандартных нормирующих множителей//Успехи матем. наук. 1995 (в печати).
20. Einmal U. Strong invariance principles for partial sums of independent random vectors//Ann. Probab. 1987. **15**. 1419—1440.

Поступила в редакцию
30.09.94