А. Л. Кузьмина

О НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНАХ НАИМЕНЕЕ УКЛОНЯЮЩИХСЯ ОТ НУЛЯ В $C[-1,1]$

В этой заметке дается решение двух задач:

Найти
$$\min_{P_n \in \mathcal{P}^{\pm}} \|P_n\|_C , \tag{1}$$

где $\mathcal{P}^{\pm}_n$ – множества неотрицательных на $[-1,1]$ многочленов $P_n(x) = \pm x^n + \ldots$, соответственно, и многочлены $P^{\pm}_n(x) \in \mathcal{P}^{\pm}_n$ такие, что
$$\|P^{\pm}_n\|_C = \min_{P_n \in \mathcal{P}^{\pm}_n} \|P_n\|_C . \tag{2}$$

$P^{\pm}_n(x)$ есть неотрицательный на $[-1,1]$ многочлен со старшим коэффициентом равным 1 или – 1, наименее уклоняющийся от нуля в $C[-1,1]$.

1. Будем исследовать сразу обе задачи (1) – (2).

Известно (см. [1], с. 88), что любой многочлен $P_n(x)$, $P_n(x) \geqslant 0$ на $[-1,1]$ представим в виде:

$$P_n(x) = A^2_k(x) + (1-x^2)B^2_{k-1}(x) , \ n = 2k ,$$

и

$$P_n(x) = (1+x)C^2_k(x) + (1-x)\mathcal{D}^2_k(x) , \ n = 2k+1 ,$$

где

$$A_k(x) = a_k x^k + \ldots \quad \text{и} \quad B_{k-1}(x) = b_{k-1} x^{k-1} + \ldots ,$$

$$C_k(x) = c_k x^k + \ldots \quad \text{и} \quad \mathcal{D}_k(x) = d_k x^k + \ldots$$

– многочлены, степени не превосходящей k , при этом

$$a^2_k - b^2_{k-1} = \pm 1 , \ c^2_k - d^2_k = \pm 1 ,$$

соответственно, для $P_n(x) \in \mathcal{P}^{\pm}_n$.

Если $n=2k$, то

$$\min_{P_n\in\varphi_n^+}\|P_n\|_C=\min_{(A_k)}\left\|\frac{A_k^2}{a_k^2}\right\|_C,$$

так как

$$\|P_n\|_C\geqslant a_k^2\left\|\frac{A_k^2}{a_k^2}\right\|_C\geqslant\left\|\frac{A_k^2}{a_k^2}\right\|_C\geqslant\min_{(A_k)}\left\|\frac{A_k^2}{a_k^2}\right\|_C$$

и

$$\min_{P_n\in\varphi_n^+}\|P_n\|_C\geqslant\min_{(A_k)}\left\|\frac{A_k^2}{a_k^2}\right\|_C,$$

с другой стороны,

$$\min_{P_n\in\varphi_n^+}\|P_n\|_C\leqslant\min_{(A_k)}\left\|\frac{A_k^2}{a_k^2}\right\|_C.$$

Значит,

$$\min_{P_n\in\varphi_n^+}\|P_n\|_C=\left(\min_{(A_k)}\left\|\frac{A_k}{a_k}\right\|_C\right)^2=\frac{1}{2^{2k-2}}=\frac{1}{2^{n-2}},$$

при этом

$$P_n^+(x)=\frac{T_k^2(x)}{2^{2k-2}},$$

где $T_k(x)=\cos k\arccos x$.

Так же найдем, что

$$\min_{P_n\in\varphi_n^-}\|P_n\|_C=\min_{(B_{k-1})}\left\|(1-x^2)\frac{B_{k-1}^2}{b_{k-1}^2}\right\|_C$$

и если $n=2k+1$, то

$$\min_{P_n\in\varphi_n^+}\|P_n\|_C=\min_{(C_k)}\left\|(1+x)\frac{C_k^2}{c_k^2}\right\|_C$$

и

$$\min_{P_n \in \mathcal{P}_n^-} \|P_n\|_C = \min_{(\mathcal{D}_k)} \left\|(1-x)\frac{\mathcal{D}_k^2}{d_k^2}\right\|_C .$$

Таким образом, задача (1) - (2) сведена к следующей:

Найти

$$\min_{(Q_k)} \|\sigma Q_k\|_C , \tag{3}$$

где $\sigma(x)=\sqrt{1-x^2}$, $\sigma(x)=\sqrt{1+x}$ и $\sigma(x)=\sqrt{1-x}$,

$Q_k(x)=x^k+\ldots$ и многочлен $Q_k^*(x)$ такой, что

$$\|\sigma Q_k^*\|_C = \min_{(Q_k)} \|\sigma Q_k\|_C . \tag{4}$$

2. Установим критерий многочлена, наименее уклоняющегося от нуля в $C_\sigma[-1,1]$.

Пусть функция $\sigma(x)$ непрерывна, неотрицательна на $[-1,1]$ и $\sigma(x)>0$ в $(-1,1)$. $C_\sigma[-1,1]$ – пространство функций $f(x)$, непрерывных на $[-1,1]$ и

$$\|f\|_{C_\sigma} = \max_{-1\le x\le 1} [\sigma(x)|f(x)|].$$

$Q_k^*(x)=q_k^* x^k+\ldots$ есть многочлен наилучшего приближения $f(x)$ в $C_\sigma[-1,1]$, если

$$\|f-Q_k^*\|_{C_\sigma} = \min_{(Q_k)} \|f-Q_k\|_{C_\sigma} , \quad Q_k(x)=q_k x^k+\ldots .$$

Так же, как и в $C[-1,1]$ (см. [2], с. 21 - 25), можно доказать, что имеет место

Теорема (об альтернансе). Для того, чтобы многочлен степени не выше k $Q_k^*(x)$ был многочленом наилучшего приближения $f(x)$ в $C_\sigma[-1,1]$ ($f(x)$ не есть многочлен степени k) необходимо и достаточно, чтобы нашлись такие $k+2$ точки $x_1, x_2, \ldots, x_{k+2}$,

$$-1\le x_1 < x_2 < \ldots < x_{k+2} \le 1 ,$$

что

1) $\sigma(x_i)|f(x_i)-Q_k^*(x_i)| = \|f-Q_k^*\|_{C_\sigma}$, $i=\overline{1,k+2}$,

2) знаки значений $\sigma(x_i)[f(x_i)-Q_k^*(x_i)]$ чередуются.

Отсюда следует, что:

Для того, чтобы многочлен $Q_k^*(x)$ степени k со старшим коэффициентом равным единице был наименее уклоняющимся от нуля в $C_\sigma[-1,1]$ необходимо и достаточно, чтобы нашлась такая система из $k+1$ точек $-1\leq x_1<x_2<\ldots<x_{k+1}\leq 1$, что

1) $\sigma(x_i)|Q_k^*(x_i)|=\|Q_k^*\|_{C_\sigma}$, $i=\overline{1,k+1}$,

и

2) значения $\sigma(x_i)Q_k^*(x_i)$ были с чередующимися знаками.

3) Будем решать задачу (3)-(4) - задачу нахождения многочленов, наименее уклоняющихся от нуля в $C_\sigma[-1,1]$, $\sigma(x)=\sqrt{1-x^2}$, $\sigma(x)=\sqrt{1-x}$ и $\sigma(x)=\sqrt{1+x}$.

Пусть $\sigma(x)=\sqrt{1-x^2}$.

Покажем, что

$$Q_k^*(x)=\frac{U_k(x)}{2^k}, \quad U_k(x)=\frac{\sin(k+1)\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Так как

$$\sqrt{1-x^2}\,\frac{U_k(x)}{2^k}=\frac{1}{2^k}\sin(k+1)\arccos x,$$

то

$$\left\|\frac{U_k}{2^k}\right\|_{C_\sigma}=\frac{1}{2^k}$$

и точки $x_i=\cos\theta_i$, $\theta_i=\frac{2i+1}{2k+2}\pi$, $i=\overline{0,k}$,

таковы, что

$$\sigma(x_i)\frac{U_k(x_i)}{2^k}=\frac{(-1)^i}{2^k}, \quad i=\overline{0,k}.$$

Пусть $\sigma(x)=\sqrt{1-x}$. Покажем, что

$$Q_k^*(x)=\tilde{J}_k^{(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}(x),$$

где

$$\tilde{J}_k^{(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}(x)=\frac{\sin\frac{2k+1}{2}\theta}{2^k\sin\frac{\theta}{2}}, \quad \theta=\arccos x;$$

– многочлены Якоби со старшим коэффициентом равным единице, ортогональные с весом $(1-x)^{1/2}(1+x)^{-1/2}$ (см. [3], с. 429).

Так как

$$\sqrt{1-x}\,\tilde{J}_k^{(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}(x)=\frac{\sin\frac{2k+1}{2}\theta}{2^{k-1/2}}\ ,\ \theta=\arccos x\ ,$$

то

$$\|\tilde{J}_k^{(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}\|_{C_\sigma}=\frac{1}{2^{k-1/2}}$$

и точки $x_i=\cos\theta_i\ ,\ \theta_i=\frac{2i+1}{2k+1}\pi\ ,\ i=\overline{0,k}\ ,$

таковы, что

$$\sigma(x_i)\tilde{J}_k^{(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}(x_i)=\frac{(-1)^i}{2^{k-1/2}}\ ,\ i=\overline{0,k}\ .$$

Пусть $\sigma(x)=\sqrt{1+x}$. Покажем, что

$$Q_k^*(x)=\tilde{J}_k^{(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})}(x),$$

где

$$\tilde{J}_k^{(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})}(x)=(-1)^k\tilde{J}_k^{(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}(x)=\frac{\cos\frac{2k+1}{2}\theta}{2^k\cos\frac{\theta}{2}}\ ,\ \theta=\arccos x,$$

– многочлены Якоби со старшим коэффициентом равным единице, ортогональные с весом $(1-x)^{-1/2}(1+x)^{1/2}$ (см. [4], с. 71).

Так как

$$\sqrt{1+x}\,\tilde{J}_k^{(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})}(x)=\frac{\cos\frac{2k+1}{2}\theta}{2^{k-1/2}}\ ,\ \theta=\arccos x\ ,$$

то

$$\|\tilde{J}_k^{(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})}\|_{C_\sigma}=\frac{1}{2^{k-1/2}}$$

и точки $x_i=\cos\theta_i\ ,\ \theta_i=\frac{2i\pi}{2k+1}\ ,\ i=\overline{0,k}$

таковы, что

$$\sigma(x_i)\tilde{J}_k^{(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})}(x_i)=\frac{(-1)^i}{2^{k-1/2}}\ ,\ i=\overline{0,k}\ .$$

4. Приведем полностью решение задачи (1)-(2).

При $n=2k$

$$\min_{P_n\in\Phi_n^+}\|P_n\|_C=\frac{1}{2^{n-2}}\ ,$$

при этом

$$P_n^+(x)=\frac{T_k^2(x)}{2^{2k-2}}\quad, T_k(x)=\cos k\arccos x$$

и

$$\min_{P_n\in\Phi_n^-}\|P_n\|_C=\min_{(B_{k-1})}\left\|(1-x^2)\frac{B_{k-1}^2}{b_{k-1}^2}\right\|_C=$$

$$=\left(\min_{(B_{k-1})}\left\|\sqrt{1-x^2}\,\frac{B_{k-1}}{b_{k-1}}\right\|_C\right)^2=\left(\min_{(B_{k-1})}\left\|\frac{B_{k-1}}{b_{k-1}}\right\|_{C\sqrt{1-x^2}}\right)^2=\frac{1}{2^{2k-2}}=\frac{1}{2^{n-2}}\ ,$$

при этом

$$P_n^-(x)=(1-x^2)\frac{U_{k-1}^2(x)}{2^{2k-2}}\ ,\ U_{k-1}(x)=\frac{\sin k\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\ .$$

При $n=2k+1$

$$\min_{P_n\in\Phi_n^+}\|P_n\|_C=\min_{(C_k)}\left\|(1+x)\frac{C_k^2}{c_k^2}\right\|_C=$$

$$=\left(\min_{(C_k)}\left\|\sqrt{1+x}\,\frac{C_k}{c_k}\right\|_C\right)^2=\left(\min_{(C_k)}\left\|\frac{C_k}{c_k}\right\|_{C\sqrt{1+x}}\right)^2=\frac{1}{2^{2k-1}}=\frac{1}{2^{n-2}}\ ,$$

при этом

$$P_n^+(x)=(1+x)\left[\tilde{J}_k^{(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})}(x)\right]^2,$$

$$\tilde{J}_k^{(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})}(x)=\frac{\cos\frac{2k+1}{2}\theta}{2^k\cos\frac{\theta}{2}}\ ,\ \theta=\arccos x\ ,$$

и

$$\min_{P_n\in\Phi_n^-}\|P_n\|_C=\min_{(D_k)}\left\|(1-x)\frac{D_k^2}{d_k^2}\right\|_C=$$

$$=\left(\min_{(D_k)}\left\|\sqrt{1-x}\,\frac{D_k}{d_k}\right\|_C\right)^2=\left(\min_{(D_k)}\left\|\frac{D_k}{d_k}\right\|_{C\sqrt{1-x}}\right)^2=\frac{1}{2^{2k-1}}=\frac{1}{2^{n-2}}\ ,$$

при этом

$$P_n^-(x) = (1-x)\left[\tilde{J}_k^{(\frac12,-\frac12)}(x)\right]^2,$$

$$\tilde{J}_k^{(\frac12,-\frac12)}(x) = \frac{\sin\frac{2k+1}{2}\theta}{2^k\sin\frac{\theta}{2}}, \quad \theta = \arccos x.$$

Итак, доказана

<u>Теорема</u>. Для всех n

$$\min_{P_n\in\mathcal{P}_n^{\pm}} \|P_n\|_C = \frac{1}{2^{n-2}},$$

при $n=2k$

$$P_n^+(x) = \frac{T_k^2(x)}{2^{2k-2}}, \quad T_k(x) = \cos k\arccos x,$$

$$P_n^-(x) = (1-x^2)\frac{U_{k-1}^2(x)}{2^{2k-2}}, \quad U_{k-1}(x) = \frac{\sin k\arccos x}{\sqrt{1-x^2}},$$

при $n=2k+1$

$$P_n^+(x) = (1+x)\left[\tilde{J}_k^{(-\frac12,\frac12)}(x)\right]^2,$$

$$\tilde{J}_k^{(-\frac12,\frac12)}(x) = \frac{\cos\frac{2k+1}{2}\theta}{2^k\cos\frac{\theta}{2}}, \quad \theta = \arccos x,$$

$$P_n^-(x) = (1-x)\left[\tilde{J}_k^{(\frac12,-\frac12)}(x)\right]^2,$$

$$\tilde{J}_k^{(\frac12,-\frac12)}(x) = \frac{\sin\frac{2k+1}{2}\theta}{2^k\sin\frac{\theta}{2}}, \quad \theta = \arccos x.$$

Замечание 1. Если $-\mathcal{P}_n^- = \{P_n(x) = x^n + \ldots \mid P_n(x) \le 0,$ $-1 \le x \le 1\},$ то из доказанного выше следует, что

$$\min_{P_n \in -\mathcal{P}_n^-} \|P_n\|_C = \frac{1}{2^{n-2}}$$

и

$$-P_n^-(x) = (x^2-1)\frac{U_{k-1}^2(x)}{2^{2k-2}}, \quad U_{k-1}(x) = \frac{\sin k \arccos x}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$n=2k,$$

$$-P_n^-(x) = (x-1)\left[\tilde{J}_k^{(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}(x)\right]^2,$$

$$\tilde{J}_k^{(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}(x) = \frac{\sin\frac{2k+1}{2}\theta}{2^k \sin\frac{\theta}{2}}, \quad \theta = \arccos x,$$

$$n=2k+1,$$

есть положительные на $[-1,1]$ многочлены со старшим коэффициентом равным единице, наименее уклоняющиеся от нуля в $C[-1,1]$.

Замечание 2. Задача (2) во взвешенных пространствах $L_{p,\sigma}[-1,1]$ $(1 \le p < \infty)$ может быть решена изложенным методом, использующим представление знакопостоянных на $[-1,1]$ многочленов, значительно проще, чем в [5].

Примечание. Задача (1) может быть решена также следующим образом.

Пусть

$$P_n(x) = \tilde{T}_n(x) + \|\tilde{T}_n\|_C,$$

где

$$\tilde{T}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x).$$

Тогда $P_n(x) \in \mathcal{P}_n^+$ и

$$\|P_n\|_C = 2\|\tilde{T}_n\|_C .$$

И, следовательно,

$$\Delta_n = \min_{P_n \in \mathcal{P}_n^+} \|P_n\|_C \leq 2\|\tilde{T}_n\|_C .$$

Но $\Delta_n < 2\|\tilde{T}_n\|_C$ быть не может, так как тогда многочлен

$$P_n^*(x) - \frac{1}{2}\|P_n^*\|_C \ , \ \|P_n^*\|_C = \Delta_n$$

со старшим коэффициентом равным единице имел бы норму, равную $\frac{1}{2}\Delta_n < \|\tilde{T}_n\|_C$, что невозможно.

Аналогично для множества многочленов $\mathcal{P}_n^-$.

Это решение было сообщено Теляковским С. А. , за что ему автор искренне признателен.

Литература

1. Крейн М. Г. , Нудельман А. А. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. – М. : Наука, 1973. – 551 с.

2. Даугавет И. К. Введение в теорию приближения функций. – Л. : Изд-во Ленинградского ун-та, 1977. – 184 с.

3. Натансон И.П. Конструктивная теория функций. – М. – Л. : ГИТТЛ, 1949. – 688 с.

4. Сеге Г. Ортогональные многочлены. – М. : ГИФМЛ, 1962. – 500 с.

5. Бабенко В. Ф. , Кофанов В. А. О знакопостоянных полиномах, наименее уклоняющихся от нуля в пространствах L_p . – Математические заметки, т. 37, вып. 2, с. 176–185.