Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

V. L. Kalinin, An explicit trace formula for Brandt matrices,
Zap. Nauchn. Sem. LOMI, 1976, Volume 63, 67–94

https://www.mathnet.ru/eng/znsl2051

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
https://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 18.97.14.91
December 12, 2025, 16:15:19

ЯВНАЯ ФОРМУЛА СЛЕДА МАТРИЦ БРАНДТА

В.Л.Калинин

Вопрос о явном вычислении следов матриц Брандта (аналогов операторов Гекке для кватернионных алгебр с делением над полем рациональных чисел, неразложимых в бесконечной точке) впервые был поставлен в работах Эйхлера [6-8] в связи с проблемой представимости модулярных форм тэта-рядами, ассоциированными с кватернарными квадратичными формами. В этих работах Эйхлер получил формулу следа матриц Брандта, отвечающих формам свободного от квадратов уровня.

В данной работе на основе работ Хиджикаты [4], улучшающих локальные арифметические аспекты работы Эйхлера, производится явное вычисление следа операторов Гекке - Брандта, соответствующих произвольному конечномерному представлению группы единиц некоторых порядков в кватернионной алгебре, при более слабых ограничениях: снято условие бесквадратности делителей ступени, взаимно простых с дискриминантом алгебры кватернионов *).

Работа состоит из трех частей. В первом параграфе приведены основные арифметические сведения, используемые в дальнейшем. В § 2 вводится кольцо операторов Гекке - Брандта (с использованием языка аделей) и проверяется согласование данного определения с определением Эйхлера. Наконец, третий параграф посвящен непосредственно вычислению следа матриц Брандта.

Автор считает приятным долгом выразить свою благодарность А.Н.Андрианову за постановку задачи и внимание к выполняемой работе.

§ 1. Порядки в кватернионных алгебрах

В этом параграфе мы соберем основные сведения по арифметике кватернионных алгебр, используемые в дальнейшем. Большая часть приведенных здесь определений и результатов может быть найдена в монографиях А.Вейля [1], М.Дойринга [2], а также в статье Д.К. Фаддеева [3].

---

*) Формула следа матриц Брандта, соответствующих тривиальному представлению группы единиц, при данных ограничениях на ступень ранее была приведена (без доказательства) в работе Хиджикаты и Сайто [5].

Пусть $\mathcal{D}/\mathbb{Q}$ – алгебра определенных кватернионов. Для всякого конечного простого числа p через $\mathbb{Q}_p$, v_p, $|\ |_p$ обозначим, соответственно, поле p-адических чисел, нормализованное показательное нормирование на $\mathbb{Q}_p$ и p-адическую норму ($|x|_p = p^{-v_p(x)}$ при $x \in \mathbb{Q}_p$). При $p = \infty$ положим $\mathbb{Q}_p = \mathbb{Q}_\infty = \mathbb{R}$.

Если A – алгебра над $\mathbb{Q}$, через A_p обозначим алгебру $A \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p$ над $\mathbb{Q}_p$. Если M – модуль в A, для всякого простого $p<\infty$ положим $M_p = M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$, где $\mathbb{Z}$ (соответственно, $\mathbb{Z}_p$) – кольцо целых рациональных (соответственно, p-адических) чисел. Наконец, для любого подкольца $R \subset A$ через $R^\times$ будем обозначать группу единиц R.

Через ν, τ (соответственно, ν_p, τ_p) обозначим приведенную норму и приведенный след на $\mathcal{D}$ (соответственно, $\mathcal{D}_p$). Поскольку $\mathcal{D}$ – алгебра определенных кватернионов, квадратичная форма ν положительно определена.

Говорят, что простое число p разветвлено в $\mathcal{D}$, если $\mathcal{D}_p$ является алгеброй с делением над $\mathbb{Q}_p$. Через $S_\mathcal{D}$ обозначим множество (конечное) простых $p \in \mathbb{Z}$, разветвленных в $\mathcal{D}$. Пусть $d = \prod_{p \in S_\mathcal{D}} p$ – корень квадратный из дискриминанта алгебры $\mathcal{D}$.

Решеткой в алгебре $\mathcal{D}$ называется конечно порожденный $\mathbb{Z}$-модуль, содержащий $\mathbb{Q}$-базис $\mathcal{D}$. Если решетка в $\mathcal{D}$ является подкольцом, содержащим единицу, то она называется порядком. Аналогично определяются решетки и порядки в $\mathcal{D}_p$ при $p<\infty$. Существует локально-глобальное соответствие между решетками: с решеткой $L \subset \mathcal{D}$ свяжем набор решеток $L_p = L \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p \subset \mathcal{D}_p$ для всякого $p<\infty$. Обратно, если имеется набор решеток $L(p) \subset \mathcal{D}_p$ при всех $p<\infty$, и, если существует такая решетка $M \subset \mathcal{D}$, что $L(p) = M_p$ при почти всех p, то существует единственная решетка $L \subset \mathcal{D}$ такая, что $L(p) = L_p$ при всех $p<\infty$. При этом

$$L = \bigcap_{p<\infty} (\mathcal{D} \cap L(p)) = \bigcap_{p<\infty} (\mathcal{D} \cap L_p). \qquad (1.1)$$

Здесь мы предполагаем, что алгебра $\mathcal{D}$ естественным образом вложена в $\mathcal{D}_p$.

Аналогичные свойства имеют место и для порядков.

Порядок M в $\mathcal{D}$ (соответственно, $\mathcal{D}_p$) называется максимальным, если он не содержится ни в одном другом порядке из $\mathcal{D}$ (соответственно, $\mathcal{D}_p$). Если $\mathcal{D}_p$ ($p<\infty$) – алгебра с делением над $\mathbb{Q}_p$, то существует единственный максимальный порядок R_p в $\mathcal{D}_p$:

$$R_p = \{ x \in D_p \mid \nu_p(x) \in \mathbb{Z}_p \}. \qquad (1.2)$$

Пусть M – произвольный максимальный порядок в D. Для расщепимых p алгебра D_p изоморфна $M_2(\mathbb{Q}_p)$, и, выбирая подходящий изоморфизм, мы можем считать, что $M_p = \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p \\ \mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p \end{pmatrix}$. Таким образом, раз и навсегда мы предполагаем, что для расщепимых p алгебра D_p так отождествлена с $M_2(\mathbb{Q}_p)$, что существует максимальный порядок $M \subset D$ (один для всех p) такой, что

$$M_p = \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p \\ \mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p \end{pmatrix} \qquad (1.3)$$

при всех расщепимых p.

Пусть теперь m – положительное целое число, взаимно простое с d. Положим

$$S_m = \{ p \text{ – простое} \mid p \mid m \}. \qquad (1.4)$$

Порядок $L \subset D$ назовем расщепимым порядком ступени m в D, если порядок L_p максимален для всех $p \in S_m$ и L_p изоморфен (то есть, сопряжен) порядку $\begin{pmatrix} \mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p \\ m\mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p \end{pmatrix}$ для всех $p \notin S_m, p < \infty$.

Из сделанных выше предположений следует, что существует единственный расщепимый порядок R ступени m такой, что

$$R_p = \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p \\ m\mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p \end{pmatrix} \qquad (1.5)$$

для всех $p \in S_m$ ("канонический" расщепимый порядок ступени m в D). В дальнейшем мы фиксируем этот порядок R.

Напомним, что группой иделей $D_{\mathbb{A}}^{\times}$ алгебры D называется группа

$$D_{\mathbb{A}}^{\times} = \{ x = (x_p) \in \prod_p D_p^{\times} \mid x \in R_p^{\times} \quad \text{для почти всех } p \} \qquad (1.6)$$

Группа $D_{\mathbb{A}}^{\times}$ локально компактна в ее естественной топологии.

Для всякого $x = (x_p) \in D_{\mathbb{A}}^{\times}$ через $v(x) = \prod_p |\nu_p(x_p)|$ обозначим объем иделя x. Положим

$$D_{\mathbb{A}}^{1} = \{ x \in D_{\mathbb{A}}^{\times} \mid v(x) = 1 \} \qquad (1.7)$$

Локально компактная группа $\mathcal{D}^1_{\mathbb{A}}$ унимодулярна, и, следовательно, несколько более удобна для предстоящего рассмотрения в рамках теории представлений, чем группа иделей $\mathcal{D}^\times_{\mathbb{A}}$; к тому же $\mathcal{D}^1_{\mathbb{A}}$ содержит ту же арифметическую информацию об алгебре $\mathcal{D}$, что и группа $\mathcal{D}^\times_{\mathbb{A}}$.

Предложение 1.1 [2].

1) Группа $\mathcal{D}^\times$ вложена в $\mathcal{D}^1_{\mathbb{A}}$ по диагонали и является дискретной подгруппой в $\mathcal{D}^1_{\mathbb{A}}$.

2) Группа

$$\mathcal{U}^* = \left\{ x = (x_p) \in \mathcal{D}^1_{\mathbb{A}} \mid x_p \in R_p^\times \text{ для всех } p < \infty \right\} \quad (1.8)$$

является открытой компактной подгруппой $\mathcal{D}^1_{\mathbb{A}}$.

3) Пространство двойных классов смежности $\mathcal{U}^* \backslash \mathcal{D}^1_{\mathbb{A}} / \mathcal{D}^\times$ конечно.

Пусть теперь $M \subset \mathcal{D}$ – порядок ступени m. Левым M-идеалом (локально главным) называется решетка $I \subset \mathcal{D}$ такая, что

$$I = \bigcap_{p<\infty} (\mathcal{D} \cap M_p x_p), \quad (1.9)$$

где $x_p \in \mathcal{D}_p^\times$ и $x_p \in R_p^\times$ для почти всех p. Правым порядком для такого идеала I является порядок

$$N = \bigcap_{p<\infty} (\mathcal{D} \cap x_p^{-1} M_p x_p). \quad (1.10)$$

Если I – левый M-идеал с правым порядком N и J – левый N-идеал, то определено произведение $I \cdot J$, являющееся левым M-идеалом, причем

$$I \cdot J = \bigcap_{p<\infty} (\mathcal{D} \cap M_p x_p y_p), \quad (1.11)$$

где $I = \bigcap_{p<\infty} (\mathcal{D} \cap M_p x_p)$ и $J = \bigcap_{p<\infty} (\mathcal{D} \cap N_p y_p)$. Относительно такого произведения идеалов (решеток) определен идеал I^{-1} с левым порядком N и правым M:

$$I^{-1} = \bigcap_{p<\infty} (\mathcal{D} \cap x_p^{-1} M_p). \quad (1.12)$$

Нормой левого M-идеала I называется

$$N(I) = \text{Н.О.Д.} \left\{ \nu(x) \mid x \in I \right\}. \quad (1.13)$$

Левый M-идеал I называется целым, если $I \subset M$. Далее, говорят, что два левых M-идеала I_i $(i=1,2)$ принадлежат одному классу, если $I_2 = I_1 x$ для некоторого $x \in \mathcal{D}^\times$.

Предложение 1.2 [3]. Множество двойных классов смежности $\mathcal{U}^* \backslash \mathcal{D}^1_{\mathbb{A}} / \mathcal{D}^\times$ находится в биективном соответствии с классами левых R-идеалов, относительно отображения

$$Cl(I) \leftrightarrow \left\{ I_p = R_p x_p \mid p < \infty \right\} \leftrightarrow (\mathcal{U}^* x \mathcal{D}^\times), \qquad (1.14)$$

где $x = (x_p) \in \mathcal{D}^1_{\mathbb{A}}$ и $Cl(I)$ - класс идеалов, содержащий I.

Из предложения 1.1 следует конечность числа классов $h(R) = h(\mathcal{U}^*)$ левых R-идеалов.

Пусть $I_1, \ldots, I_{h(\mathcal{U}^*)}$ - полная система представителей классов левых R-идеалов. Будем считать, что $I_1 = R$. Через R_j обозначим правый порядок идеала I_j. Положим

$$\mathcal{D}^1_{\mathbb{A}} = \bigcup_{j=1}^{h(\mathcal{U}^*)} \mathcal{U}^* \alpha_j \mathcal{D}^\times, \qquad (1.15)$$

где

$$I_j = \bigcap_{p<\infty} (\mathcal{D} \cap R_p \alpha_{j,p}). \qquad (1.16)$$

Предложение 1.3 [3]. Представители I_j $(j = 1, \ldots, h(\mathcal{U}^*))$ левых R-идеалов могут быть выбраны следующим образом:

1) I_j - целый левый R-идеал;

2) $I_{j,p} = R_p$ при всех $p \in S_k \cup S_m$.

Отсюда следует, что $\alpha_{j,p} = 1$ для всех $p \in S_k \cup S_m$. Наконец, заметим, что

$$N(I_j) = n_j = \nu_\infty(\alpha_{j,\infty}) > 0. \qquad (1.17)$$

Поэтому можно считать, что $\alpha_{j,\infty} = \sqrt{n_j} \in \mathbb{R}^\times$. (Здесь мы отождествляем центр алгебры $\mathcal{D}_\infty$ с $\mathbb{R}$).

§ 2. Кольцо Гекке кватернионной алгебры

В этом параграфе мы построим кольцо операторов Гекке, ассоциированных с неприводимым унитарным представлением π некоторого нормального делителя $\mathcal{U}$ конечного индекса в группе $\mathcal{U}^*$. Группу $\mathcal{U}$ и ее представление π мы определим, рассматривая каждую p-компоненту группы $\mathcal{D}^1_{\mathbb{A}}$ в отдельности.

1) $p = \infty$. Отождествим $\mathcal{D}_\infty$ с алгеброй комплексных квадрат-

ных матриц вида

$$z = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $\pi_{\infty,1}$ двумерное представление группы $D_\infty^\times$, ассоциированное с этим отождествлением; пусть $\pi_{\infty,\ell}$ есть ℓ-ая симметрическая степень представления $\pi_{\infty,1}$, $W = W_\ell$ – пространство представления $\pi_{\infty,\ell}$. В качестве π_∞ мы возьмем ограничение одного из представлений $\pi_{\infty,\ell}$ на подгруппу $U_\infty^* \cong SU(2)$. Характеры представлений $\pi_{\infty,\ell}$ хорошо известны [6]: пусть $x \in D_\infty^\times$ и $f(X) = X^2 - sX + n$ – его минимальный полином. Положим $\rho = \frac{1}{2}(s + \sqrt{s^2 - 4n})$. Тогда

$$\operatorname{tr}\pi_\infty(s,n) = \operatorname{tr}\pi_{\infty,\ell}(x) = \operatorname{tr}\pi_\infty(x) = \frac{\rho^{\ell+1} - \bar{\rho}^{\ell+1}}{\rho - \bar{\rho}} \quad (2.1)$$

2) $p \mid m$. Фиксируем положительное целое $m' \mid m$. Пусть $\mu_p' = v_p(m')$, $\mu_p = v_p(m)$. В расщепимом порядке R_p рассмотрим двусторонний идеал

$$J_p = \begin{pmatrix} p^{\mu_p'}\mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p \\ p^{\mu_p}\mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Пусть σ_p – гомоморфизм кольца R_p на кольцо $\mathbb{Z}_p / p^{\mu_p'}\mathbb{Z}_p$, индуцированный гомоморфизмом вычета по модулю J_p:

$$\sigma_p : R_p \longrightarrow R_p / J_p \longrightarrow \mathbb{Z}_p / p^{\mu_p'}\mathbb{Z}_p. \quad (2.3)$$

Положим $\sigma_{S_m} = \bigoplus_{p \in S_m} \sigma_p$. σ_{S_m} мы будем рассматривать как гомоморфизм кольца $\bigoplus_{p \in S_m}(R_p / J_p)$ в кольцо $\mathbb{Z}/m'\mathbb{Z} \cong \bigoplus_{p/m'} \mathbb{Z}_p / p^{\mu_p'}\mathbb{Z}_p$. Пусть χ_{S_m} – характер группы $(\mathbb{Z}/m'\mathbb{Z})^\times$ и $\mathfrak{H}$ – подгруппа $(\mathbb{Z}/m'\mathbb{Z})^\times$. Положим

$$\pi_{S_m} = \chi_{S_m} \circ \sigma_{S_m} \quad (2.4)$$

и

$$\mathfrak{S}_{S_m} = \sigma_{S_m}^{-1}(\mathfrak{H}). \quad (2.5)$$

Пусть $\mathcal{U}^*_{S_m} = \prod_{p \in S_m} R_p^\times$ и $\mathcal{U}_{S_m} = \mathcal{U}^*_{S_m} \cap \mathfrak{S}_{S_m}$. Тогда $\mathcal{U}_{S_m}$ – нормальный делитель конечного индекса в $\mathcal{U}^*_{S_m}$, и мы будем рассматривать π_{S_m} как представление групп $\mathcal{U}^*_{S_m}$, $\mathcal{U}_{S_m}$ и полугруппы $\mathfrak{S}_{S_m}$.

3) $p \mid d$. В этом случае в алгебре с делением $\mathcal{D}_p$ рассмотрим максимальный идеал J_p в порядке R_p. Как и в случае 2), через σ_p обозначим гомоморфизм кольца R_p на поле k_{p^2} из p^2 элементов, индуцированный гомоморфизмом вычета по модулю J_p:

$$\sigma_p : R_p \longrightarrow R_p / J_p \longrightarrow k_{p^2}. \tag{2.6}$$

Пусть χ_p – характер группы $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times \cong k_p^\times$ и $\mathfrak{S}_p = \sigma_p^{-1}(k_{p^2}^\times)$. Тогда $\mathfrak{S}_p = R_p^\times$ и мы положим

$$\pi_p = \chi_p \circ N_{k_{p^2}/k_p} \circ \sigma_p, \tag{2.7}$$

где $N_{k_{p^2}/k_p}$ – отображение нормы из $k_{p^2}^\times$ в $k_p^\times$. Если $\gamma \in \mathcal{D}$ и $\nu(\gamma)$ взаимно просто с p, то легко видеть, что

$$\pi_p(\gamma) = \chi_p(\nu(\gamma)).$$

Если характер $\chi_p \equiv 1$, то можно считать, что $\mathfrak{S}_p = R_p - \{0\}$ (несобственный характер).

4) $p \nmid dm$. В этом случае мы считаем $\pi_p \equiv 1$ и $\mathfrak{S}_p = R_p \cap GL_2(\mathbb{Q}_p)$.

Определим теперь полугруппу

$$= \{ x = (x_p) \in \mathcal{D}^1_{\mathbb{A}} \mid x_p \in \mathfrak{S}_p \text{ при } p \notin S_m, (x_p)_{p \in S_m} \in \mathfrak{S}_{S_m} \} \tag{2.8}$$

и положим $\mathcal{U} = \mathcal{U}^* \cup \sigma$. Тогда группа $\mathcal{U}^*$ нормализует $\mathfrak{S}$ и $\mathcal{U}$ является открытым компактным нормальным делителем группы $\mathcal{U}^*$, причем $[\mathcal{U}^* : \mathcal{U}] = [(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times : \mathfrak{H}]$. Пусть $\pi = \bigotimes_p \pi_p$. Тогда π является неприводимым унитарным представлением в пространстве W групп $\mathcal{U}^*$ и $\mathcal{U}$, продолженным на полугруппу $\mathfrak{S}$. В дальнейшем мы будем предполагать, что представление π удовлетворяет условию: $\pi(-1) = 1$.

Пусть теперь μ – двусторонне инвариантная мера Хаара на $\mathcal{D}^1_{\mathbb{A}}$ такая, что $\mu(\mathcal{U}) = 1$. Рассмотрим пространство $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathcal{U} \backslash \mathcal{D}^1_{\mathbb{A}} / \mathcal{U})$ функций с компактным носителем на $\mathcal{D}^1_{\mathbb{A}}$ со значениями в $\operatorname{End} W$:

$$\mathcal{C}(\mathcal{U} \backslash \mathcal{D}^1_{\mathbb{A}} / \mathcal{U}) = \{ \varphi : \mathcal{D}^1_{\mathbb{A}} \longrightarrow \operatorname{End} W \mid \varphi(uxu') =$$

$$= \pi(u)\varphi(x)\pi(u') \text{ для всех } u, u' \in \mathcal{U}, x \in D^1_{\mathbb{A}} \Big\}. \qquad (2.9)$$

Пространство $\mathcal{C}$ является алгеброй функций относительно свертки:

$$[\varphi_1 * \varphi_2](x) = \int\limits_{D^1_{\mathbb{A}}} \varphi_1(y)\varphi_2(y^{-1}x)\,d\mu(y), \quad \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{C}. \qquad (2.10)$$

Алгебра $\mathcal{C}$ представляет собой не что иное, как алгебру оплетающих операторов для представления группы $D^1_{\mathbb{A}}$, индуцированного представлением π группы $\mathcal{U}$. Она порождена элементарными оплетающими операторами $\varphi_{\mathcal{U}\xi\mathcal{U}\,\sigma_\xi}$. Точнее, рассмотрим двойной класс смежности $\mathcal{U}\xi\mathcal{U} \subset D^1_{\mathbb{A}}$, положим $\mathcal{U}^\xi = \mathcal{U} \cap \xi\mathcal{U}\xi^{-1}$, тогда $\mathcal{U}^\xi$ – подгруппа $\mathcal{U}$. Пусть π^ξ – представление группы $\mathcal{U}^\xi$ в пространстве W, определенное следующим образом:

$$\pi^\xi(u) = \pi(\xi^{-1}u\xi), \quad u \in \mathcal{U}^\xi. \qquad (2.11)$$

Рассмотрим оператор $\sigma_\xi \in \mathrm{End}\, W$, оплетающий представления π^ξ и $\pi \,|\, \mathcal{U}^\xi$:

$$\sigma_\xi \pi^\xi(u) = \pi(u)\sigma_\xi \qquad (2.12)$$

для всех $u \in \mathcal{U}^\xi$. Тогда функция $\varphi_{\mathcal{U}\xi\mathcal{U},\sigma_\xi}$ по определению равна:

$$\varphi_{\mathcal{U}\xi\mathcal{U},\sigma_\xi}(x) = \begin{cases} \pi(u)\sigma_\xi\pi(u'), & \text{при } x = uxu', u, u' \in \mathcal{U} \\ 0, & \text{при } x \notin \mathcal{U}\xi\mathcal{U} \end{cases} \qquad (2.13)$$

Нетрудно проверить, что функция $\varphi_{\mathcal{U}\xi\mathcal{U},\sigma_\xi}$ определена равенством (2.13) корректно и принадлежит алгебре $\mathcal{C}$. Если двойной класс смежности $\mathcal{U}\xi\mathcal{U} \subset \mathfrak{S}$, то можно считать, что $\sigma_\xi = \pi(\xi)$. В этом случае функцию $\varphi_{\mathcal{U}\xi\mathcal{U},\pi(\xi)}$ мы будем обозначать $\varphi_{\mathcal{U}\xi\mathcal{U}}$ и соответствующий оператор назовем элементарным оператором Гекке.

Пусть теперь

$$D^1_{\mathbb{A}} = \bigcup_{j=1}^{h(\mathcal{U})} \mathcal{U}\beta_j D^\times \qquad (2.14)$$

– разложение $D^1_{\mathbb{A}}$ в конечное дизъюнктное объединение двойных классов смежности $\mathcal{U}\beta_j D^\times$ ($j = 1, \ldots, h(\mathcal{U})$). Из предложения 1.3

следует, что представители β_j могут быть выбраны таким образом, что $\beta_{j,p} \in R_p^\times$ при всех $p \mid dm$ и $\beta_{j,\infty} = \sqrt{b_j}$ принадлежит центру $\mathbb{R}$ алгебры D_∞, где b_j - целое положительное число.

Используя свертку, мы можем задать представление алгебры $\mathcal{C}$ в пространстве $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathcal{U}\backslash D^1_{\mathbb{A}} / D^\times)$ функций на $D^1_{\mathbb{A}}$ со значениями в W:

$$(\mathcal{U}\backslash D^1_{\mathbb{A}} / D^\times) = \{ f : D^1_{\mathbb{A}} \to W \mid f(uxy) = \pi(u) f(x) \quad \text{при всех } u \in \mathcal{U},\ x \in D^1_{\mathbb{A}},\ y \in D^\times \}. \tag{2.15}$$

А именно, для всякой функции $\varphi \in \mathcal{C}$ определим оператор T_φ в пространстве $\mathcal{F}$, считая

$$T_\varphi(f)(x) = \int_{D^1_{\mathbb{A}}} \varphi(y) f(y^{-1}x)\, d\mu(y) \tag{2.16}$$

при всех $f \in \mathcal{F}$. Алгеброй Гекке $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathcal{U}, \pi)$ мы назовем алгебру операторов в пространстве $\mathcal{F}$, порожденную операторами T_φ, где φ - пробегает совокупность элементарных операторов Гекке из $\mathcal{C}$. Если двойной класс смежности $\mathcal{U}\xi\mathcal{U} \subset \mathfrak{S}$, то для всякого $y \in D^\times \cap \beta_k^{-1}\mathcal{U}\xi\mathcal{U}\beta_j$ мы можем положить

$$\pi(y) = \pi_\infty(y) \cdot \prod_{p \mid dm} \pi_p(y). \tag{2.17}$$

Это определение корректно, поскольку $\beta_{j,p} \in R_p^\times$ при всех $p \mid dm$.

Пусть теперь $\varphi_{\mathcal{U}\xi\mathcal{U}} \in \mathcal{C}$ - элементарный оператор Гекке. Элементарной матрицей Брандта, соответствующей $\varphi_{\mathcal{U}\xi\mathcal{U}}$, назовем матрицу $T(\varphi_{\mathcal{U}\xi\mathcal{U}}) = (T_{jk}(\varphi_{\mathcal{U}\xi\mathcal{U}}))$, определенную равенством

$$(T_{jk}(\varphi_{\mathcal{U}\xi\mathcal{U}})) = \Big(|\mathcal{U} \cap \beta_j D^\times \beta_j^{-1}| \sum_{y \in D^\times \cap \beta_k^{-1}\mathcal{U}\xi\mathcal{U}\beta_j} \pi_k \cdot \pi(y) \cdot \pi_j^{-1} \Big), \tag{2.18}$$

где $\pi_j = \pi_\infty(\beta_{j,\infty}) \cdot \prod_{p \mid dm} \pi_p(\beta_{j,p})$ и $|\mathcal{U} \cap \beta_j D^\times \beta_j^{-1}|$ - число элементов в $\mathcal{U} \cap \beta_j D^\times \beta_j^{-1}$.

Основным результатом этого раздела является следующая теорема:

Теорема 2.1. Отображение $T_\varphi \longrightarrow T(\varphi)$ является сохраняющим след изоморфизмом алгебры Гекке $\mathcal{H}$ на алгебру операторов, порожденную элементарными матрицами Брандта.

Доказательство. Рассмотрим векторное пространство $\tilde{W}$, равное прямой сумме $h(\mathcal{U})$ экземпляров $W = W_j$ $(j = 1, \ldots, h(\mathcal{U}))$ (по одному экземпляру для каждого двойного класса смежности $\mathcal{U}\beta_j\mathcal{D}^\times$ в разложении (2.14)). Мы хотим перенести действие операторов T_φ в $\tilde{W}$. С этой целью для всякого $j = 1, \ldots, h(\mathcal{U})$ определим отображение $\hat{j} : W = W_j \longrightarrow \mathcal{F}$:

$$\hat{j}(w)(u\beta_j\gamma) = |\mathcal{U} \cap \beta_j\mathcal{D}^\times_{\beta_j}{}^{-1}|\,\pi(u) \sum_{\tilde{\gamma} \in \mathcal{D}^\times \cap \beta_j^{-1}\mathcal{U}\beta_j} \pi(\beta_j\tilde{\gamma}\beta_j^{-1})w \tag{2.19}$$

(В дальнейшем группу $\mathcal{D}^\times \cap \beta_j^{-1}\mathcal{U}\beta_j$ обозначим Γ_j и положим $e_j = |\mathcal{U} : \beta_j\mathcal{D}^\times\beta_j^{-1}| = [\Gamma_j : 1]$.) Поскольку отображение

$$w \longrightarrow e_j^{-1} \sum_{\tilde{\gamma} \in \Gamma_j} \pi(\beta_j\gamma\beta_j^{-1})w \tag{2.20}$$

является ортогональным проектором W на подпространство Γ_j-инвариантных элементов в W, функция $\hat{j}(w)$ корректно определена на $\mathcal{U}\beta_j\mathcal{D}^\times$ и принадлежит $\mathcal{F}$.

Оператор $\hat{j}$ отображает пространство $W = W_j$ на подпространство $\mathcal{F}_j$ функций из $\mathcal{F}$, сосредоточенных на двойном классе смежности $\mathcal{U}\beta_j\mathcal{D}^\times$ и является левым обратным оператором к отображению $\mathcal{F}_j$ в W, при котором $f \longrightarrow f(\beta_j) \in W_j$.

Набор операторов $\hat{j}$ позволяет перенести действие операторов T_φ из $\mathcal{F}$ в $\tilde{W}$ при всех $\varphi \in \mathcal{C}$. При этом оператору T_φ соответствует матричный оператор $T(\varphi) = (T_{jk}(\varphi))$, где $T_{jk}(\varphi) \in \mathrm{Hom}(W_j, W_k)$ и

$$T_{jk}(\varphi)w = \int_{\mathcal{D}^1_A} \varphi(y)\hat{j}(w)(y^{-1}\beta_k)\,d\mu(y). \tag{2.21}$$

Из приведенных выше свойств отображений $\hat{j}$ следует, что отображение $T_\varphi \longmapsto T(\varphi)$ является сохраняющим след изоморфизмом алгебры Гекке $\mathcal{H}$ на алгебру матричных операторов $T(\varphi)$, действующих в пространстве $\tilde{W}$.

Нам осталось лишь показать, что при $\varphi = \varphi_{u\xi v}$ правая часть (2.21) совпадает с правой частью (2.18).

Лемма 2.2. Пусть $\gamma \in \mathcal{D}^\times \cap \beta_k^{-1}\mathcal{U}\xi\mathcal{U}\beta_j$ и $\gamma = \beta_k^{-1}u_\gamma\xi v_\gamma\beta_j$, где $u_\gamma, v_\gamma \in \mathcal{U}$. Тогда при $\varphi_{u\xi v, \sigma_\xi} \in \mathcal{C}$

$$T_{jk}(\sigma_\xi) = T_{jk}(\varphi_{\mathcal{U}\xi\mathcal{U},\sigma_\xi}) = e_j^{-1} \sum_{\gamma \in \mathcal{D}^\times \cap \beta_k^{-1}\mathcal{U}\xi\mathcal{U}\beta_j} \pi(u_\gamma)\sigma_\xi \pi(v_\gamma). \qquad (2.22)$$

Доказательство. Пусть $w \in W$, тогда

$$T_{jk}(\sigma_\xi)w = \int_{\mathcal{U}\xi\mathcal{U}} \varphi_{\mathcal{U}\xi\mathcal{U},\sigma_\xi}(u)\hat{j}(w)(u^{-1}\beta_k)\, d\mu(u). \qquad (2.23)$$

Подинтегральное выражение в правой части (2.23) отлично от нуля тогда и только тогда, когда $u \in \mathcal{U}\xi\mathcal{U}$ и $u^{-1}\beta_k \in \mathcal{U}\beta_j\mathcal{D}^\times$, что эквивалентно условию $u \in \mathcal{U}\xi\mathcal{U} \cap \beta_k\mathcal{D}^\times\beta_j\mathcal{U}$. Таким образом,

$$T_{jk}(\sigma_\xi)w = \int_{\mathcal{U}\xi\mathcal{U}\cap\beta_k\mathcal{D}^\times\beta_j^{-1}\mathcal{U}} \varphi_{\mathcal{U}\xi\mathcal{U},\sigma_\xi}(u)\hat{j}(u^{-1}\beta_k)\, d\mu(u). \qquad (2.24)$$

Заметим теперь, что $\mathcal{U}\xi\mathcal{U}$ содержит двойной класс смежности $\beta_k\gamma\beta_j^{-1}\mathcal{U}$ с $\gamma \in \mathcal{D}^\times$ тогда и только тогда, когда $\gamma \in \mathcal{D}^\times \cap \beta_k^{-1}\mathcal{U}\xi\mathcal{U}\beta_j$. Как и в условии леммы, представим γ в виде $\beta_k^{-1}u_\gamma\xi v_\gamma\beta_j$, и найдем

$$T_{jk,\gamma}(\sigma_\xi)w = \int_{\beta_k\gamma\beta_j^{-1}\mathcal{U}} \varphi_{\mathcal{U}\xi\mathcal{U},\sigma_\xi}(\tilde{u})\hat{j}(w)(\tilde{u}^{-1}\beta_k)\, d\mu(\tilde{u}). \qquad (2.25)$$

Положим $\tilde{u} = \beta_k\gamma\beta_j^{-1}u$. Тогда $u \in \mathcal{U}$, и легко проверить, что

$$\varphi_{\mathcal{U}\xi\mathcal{U},\sigma_\xi}(\tilde{u}) = \pi(u_\gamma)\sigma_\xi\pi(v_\gamma)\pi(u). \qquad (2.26)$$

Далее,

$$\hat{j}(w)(\tilde{u}) = e_j^{-1}\pi(u^{-1})\sum_{\tilde{\gamma}\in\Gamma_j}\pi(\beta_j\tilde{\gamma}\beta_j^{-1}) \qquad (2.27)$$

следовательно,

$$T_{jk,\gamma}(\sigma_\xi)w = e_j^{-1}\cdot\pi(u_\gamma)\sigma_\xi\pi(v_\gamma)\cdot\sum_{\tilde{\gamma}\in\Gamma_j}\pi(\beta_j\tilde{\gamma}\beta_j^{-1})w. \qquad (2.28)$$

Представим $\pi(v_\gamma)\cdot\pi(\beta_j\tilde{\gamma}\beta_j^{-1})$ в виде:

$$\pi(v_\gamma)\cdot\pi(\beta_j\tilde{\gamma}\beta_j^{-1}) = \pi(\xi^{-1}u_\gamma^{-1}\beta_k\cdot\gamma\tilde{\gamma}\cdot\beta_j^{-1}) \qquad (2.29)$$

и пусть $\tilde{\gamma} \in D^{\times} \cap \beta_j^{-1} \mathcal{U} \beta_j$ равно $\beta_j^{-1} v_{\tilde{\gamma}} \beta_j$, где $v_{\tilde{\gamma}} \in \mathcal{U}$. Если $\gamma = \beta_k^{-1} u_\gamma \xi v_\gamma \beta_j \in D^{\times} \cap \beta_k^{-1} \mathcal{U} \xi \mathcal{U} \beta_j$, то и $\gamma\tilde{\gamma} = \beta_k^{-1} u_\gamma \xi v_\gamma v_{\tilde{\gamma}} \beta_j \in D^{\times} \cap \beta_k^{-1} \mathcal{U} \xi \mathcal{U} \beta_j$, причем

$$u_{\gamma\tilde{\gamma}} = u_\gamma, \quad v_{\gamma\tilde{\gamma}} = v_\gamma v_{\tilde{\gamma}}. \tag{2.30}$$

Таким образом, u_γ зависит только от класса смежности $\gamma\Gamma_j$.

$$T_{jk,\gamma}(\sigma_\xi)w = e_j^{-1} \sum_{\gamma' \in \gamma\Gamma_j} \pi(u_{\gamma'})\sigma_\xi \pi(\xi^{-1} u_{\gamma'} \beta_k \gamma' \beta_j^{-1})w$$

$$= e_j^{-1} \sum_{\gamma' \in \gamma\Gamma_j} \pi(u_{\gamma'})\sigma_\xi \pi(v_{\gamma'})w \tag{2.31}$$

поскольку $v_{\gamma'} = \xi^{-1} u_{\gamma'} \beta_k \gamma' \beta_j^{-1}$.

Наконец, заметим, что два класса смежности $\beta_k \gamma \beta_\gamma^{-1} \mathcal{U}$ и $\beta_k \gamma' \beta_j^{-1} \mathcal{U}$, где $\gamma, \gamma' \in D^{\times} \cap \beta_k^{-1} \mathcal{U} \xi \mathcal{U} \beta_j$, равны тогда и только тогда, когда $\gamma\Gamma_j = \gamma'\Gamma_j$, следовательно,

$$T_{jk}(\sigma_\xi)w = \sum_{\{\gamma\Gamma_j\} \in [D^{\times} \cap \beta_k^{-1} \mathcal{U} \xi \mathcal{U} \beta_j]/\Gamma_j} T_{jk,\gamma}(\sigma_\xi)w = e_j^{-1} \sum_{\gamma \in D^{\times} \cap \beta_k^{-1} \mathcal{U} \xi \mathcal{U} \beta_j} \pi(u_\gamma)\sigma_\xi \pi(v_\gamma),$$

что доказывает лемму 2.2.

Если $\mathcal{U}\xi\mathcal{U} \subset \mathfrak{S}$, $\sigma_\xi = \pi(\xi)$ и $\gamma \in D^{\times} \cap \beta_k^{-1} \mathcal{U} \xi \mathcal{U} \beta_j$ равен $\beta_k^{-1} u_\gamma \xi v_\gamma \beta_j$, то

$$\pi(u_\gamma)\sigma_\xi \pi(v_\gamma) = \pi(u_\gamma \xi v_\gamma) = \pi(\beta_k \gamma \beta_j^{-1}) = \pi_k \pi(\gamma) \pi_j^{-1}$$

в обозначениях (2.18). Теорема доказана.

Теперь мы фиксируем целое положительное число n, взаимно простое с dm. Тогда определено множество

$$\mathfrak{S}(n) = \{ x \in \mathfrak{S} \mid \nu_\infty(x_\infty) = n \} \tag{2.32}$$

являющееся объединением конечного числа двойных классов смежности по $\mathcal{U}$. Оператором Гекке называется оператор

$$T(n) = \sum_{\mathcal{U}\xi\mathcal{U} \in \mathcal{U} \backslash \mathfrak{S}(n)/\mathcal{U}} T_{\psi_{\mathcal{U}\xi\mathcal{U}}} \tag{2.33}$$

Следствие 2.3.

$$\operatorname{tr} T(n) = \sum_{j=1}^{h(\mathcal{U})} \sum_{\gamma \in \mathcal{D}^\times \cap \beta_j^{-1} \mathfrak{S}(n) \beta_j} e_j^{-1} \operatorname{tr} \pi(\gamma) . \tag{2.34}$$

Если p – простой делитель m, то можно положить

$$\mathfrak{S}(1,p) = \{ \mathcal{U}^* \xi(p) \mathcal{U}^* \mid \xi(p)_\infty = \sqrt{p},\ \xi(p)_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}, \xi(p)_q = 1 \text{ при } q \neq p \} \tag{2.35}$$

Пусть

$$T(1,p) = \sum_{u \xi \mathcal{U} \in \mathcal{U} \backslash \mathfrak{S}(1,p) / \mathcal{U}} T_{\psi_{u \xi \mathcal{U}}} . \tag{2.36}$$

Следствие 2.4.

$$\operatorname{tr} T(1,p) = \sum_{j=1}^{h(\mathcal{U})} \sum_{\gamma \in \mathcal{D}^\times \cap \beta_j^{-1} \mathfrak{S}(1,p) \beta_j} e_j^{-1} \operatorname{tr} \pi(\gamma) . \tag{2.37}$$

В следующем разделе мы получим явные формулы для следов операторов $T(n)$ и $T(1,p)$.

В заключение мы сравним операторы $T(n)$ для группы $\mathcal{U} = \mathcal{U}^*$ с введенными Эйхлером [6] матрицами Брандта. В следующей лемме выясняется арифметический смысл множеств $\mathcal{D}^\times \cap \alpha_k^{-1} \mathcal{U}^* \xi \mathcal{U}^* \alpha_j$

Лемма 2.5. 1) Пусть $\xi \in D_{\mathbb{A}}^1$ – такой элемент, что $\xi \in R_p$ при всех $p < \infty$. Если $\gamma \in \mathcal{D}^\times \cap \alpha_k^{-1} \mathcal{U}^* \xi \mathcal{U}^* \alpha_j$, то $I_j^{-1} I_k \gamma$ является целым левым R_j-идеалом и $N(I_j^{-1} I_k \gamma) = \nu_\infty(\xi_\infty)$.

2) Обратно, пусть $I = I_j^{-1} I_k \gamma$ – целый левый R_j-идеал. Тогда существует такой элемент $\xi \in D_{\mathbb{A}}^1$, что $\xi_p \in R_p$ при всех $p < \infty$, и $\gamma \in \mathcal{D}^\times \cap \alpha_k^{-1} \mathcal{U}^* \xi \mathcal{U}^* \alpha_j$

Доказательство.

1) Пусть $\gamma \in \mathcal{D}^\times \cap \alpha_k^{-1} \mathcal{U}^* \xi \mathcal{U}^* \alpha$ и $\gamma = \alpha_k^{-1} u_\gamma \xi v_\gamma \alpha_j$ в обозначениях леммы 2.2. Тогда из формул (1.11) и (1.12) следует, что

$$\begin{aligned} I_j^{-1} I_k \gamma &= \bigcap_{p<\infty} (\mathcal{D} \cap \alpha_{j,p}^{-1} R_p \alpha_{k,p} \gamma) = \\ &= \bigcap_{p<\infty} (\mathcal{D} \cap \alpha_{j,p}^{-1} R_p \alpha_{k,p} \cdot \alpha_{k,p}^{-1} u_{\gamma,p} \xi_p v_{\gamma,p} \alpha_{j,p}) \subset \\ &\subset \bigcap_{p<\infty} (\mathcal{D} \cap \alpha_{j,p}^{-1} R_p \alpha_{j,p}) = R_j , \end{aligned}$$

то есть $I_j^{-1} I_k \gamma$ – целый левый R_j-идеал.

Далее,

$$\mathcal{N}(I_j^{-1} I_k \gamma) = \nu_\infty(\alpha_{j,\infty})^{-1} \nu_\infty(\alpha_{k,\infty}) \nu_\infty(\gamma) = \nu_\infty(\xi),$$

поскольку $u_\gamma, v_\gamma \in \mathcal{U}^*$.

2) Достаточно взять $\xi = \alpha_k \gamma \alpha_j^{-1}$, тогда $\gamma \in D^\times \cap \alpha_k^{-1} \mathcal{U}^* \xi \mathcal{U}^* \alpha_j$. Условие $I_j^{-1} I \gamma \subset R_j$ эквивалентно тому, что $\alpha_{j,p}^{-1} R_p \alpha_{k,p} \gamma \subset \alpha_{j,p}^{-1} R_p \alpha_{j,p}$ при всех $p < \infty$. Поэтому для каждого $p < \infty$ существует $\lambda_p \in R_p$ такое, что

$$\alpha_{j,p}^{-1} \alpha_{k,p} \gamma = \alpha_{j,p}^{-1} \lambda_p \alpha_{j,p}$$

Следовательно,

$$\xi_p = \alpha_{k,p} \gamma \alpha_{j,p}^{-1} = \lambda_p \in R_p \qquad \text{при всех } p < \infty \text{, ч.т.д..}$$

Через $\Delta_{jk}(n)$ обозначим множество всех $\gamma \in D^\times$ таких, что $I_j^{-1} I_k \gamma$ является целым левым R_j-идеалом с нормой n. В нашем понимании введенные Эйхлером [6-8] матрицы Брандта равны

$$B(n,\pi) = (B_{jk}(n,\pi)) = \Big(e_j^{-1} \sum_{\gamma \in \Delta_{jk}(n)} \pi^t(\gamma)\Big), \tag{2.38}$$

где $e_j = |\Gamma_j| = |D^\times \cap \alpha_j^{-1} \mathcal{U}^* \alpha_j|$, и $\pi^t(\gamma)$ – матрица, транспонированная к $\pi(\gamma)$ в некотором матричном представлении. Теорема 2.I и Лемма 2.5 устанавливают очевидную связь между матричной реализацией операторов $T(n)$ при $\mathcal{U} = \mathcal{U}^*$ и матрицами Брандта-Эйхлера $B(n,\pi)$.

§ 3. Следы операторов Гекке

Основным результатом этого раздела является следующая теорема, дающая явное выражение для следа операторов $T(n)$ при n, взаимно простом с dm.

Теорема 3.I. Для всякого целого n, взаимно простого с dm

$$\operatorname{tr} T(n) = \varphi(m')|\mathfrak{Q}|^{-1} \sum_s \operatorname{tr} \pi_\infty(s,n) \sum_f \frac{h((s^2-4n)f^{-2})}{w((s^2-4n)f^{-2})} a(s,f) b(s,f) +$$

$$+ \delta(\sqrt{n}) \varphi(m') |\mathfrak{Q}|^{-1} \operatorname{tr} \pi(\sqrt{n}) \cdot \frac{dm}{12} \prod_{p|d} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \cdot \prod_{p|m} \left(1 + \frac{1}{p}\right). \tag{3.I}$$

Здесь φ – функция Эйлера и $\varphi(m') = |(\mathbb{Z}/m'\mathbb{Z})^*|$. s пробегает все такие целые, что $s^2 - 4n < \infty$. Пусть $f(X) = X^2 - sX + n$. Тогда $\operatorname{tr} \pi_\infty(s,n)$ задается формулой (2.I).

При каждом фиксированном s представим $\Delta = s^2 - 4n$ в виде:

$$\Delta = \begin{cases} t^2 k, & k<0, \ k \equiv 1 \pmod 4, \\ t^2 \cdot 4k, & k<0, \ k \equiv 2,3 \pmod 4). \end{cases}$$

Тогда f пробегает все положительные делители t. $h((s^2-4n)f^{-2})$ и $w((s^2-4n)f^{-2})$ – число классов и единиц порядка с дискриминантом $(s^2-4n)f^{-2}$.

$$a(s,f) = \prod_{p|d} \left(1 - \left\{\frac{(s^2-4n)\cdot f^{-2}}{p}\right\}\right) \chi_p(n),$$

где $\left\{\frac{\Delta}{p}\right\}$ – "модифицированный" символ Лежандра [6],

$$\left\{\frac{\Delta}{p}\right\} = \begin{cases} 1, & \text{если } p^2 | \Delta \text{ и } \Delta p^{-2} \equiv 0,1 \pmod 4, \\ \left(\frac{\Delta}{p}\right) & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

При фиксированной паре (s,f) и простом $p|m$, положим $\rho = v_p(f)$, $\mu = v_p(m)$, $\mu' = v_p(m')$. Пусть

$$\tilde{A} = \{x \in \mathbb{Z} \mid f(x) \equiv 0 \pmod{p^{\mu+2\rho}}, 2x \equiv s \pmod{p^{\rho}}\},$$

$$\tilde{B} = \{x \in \tilde{A} \mid f(x) \equiv 0 \pmod{p^{\mu+2\rho+1}}\}.$$

Пусть $A = A(s,f,p)$ $(B = B(s,f,p))$ – полная система представителей $\tilde{A}$ $(\tilde{B})$ по модулю $p^{\mu+\rho}$, и для каждого $\eta \in (\mathbb{Z}/m'\mathbb{Z})^{\times}$ положим

$$A_\eta(s,f,p) = \{x \mid x \in A, \ x \equiv \eta \pmod{p^{\mu'}}\},$$

$$B'_\eta(s,f,p) = \{s-x \mid x \in B, \ s-x \equiv \eta \pmod{p^{\mu'}}\}$$

и

$$b_\eta(s,f,p) = \begin{cases} |A_\eta(s,f,p)|, & \text{если } (s^2-4n)f^{-2} \not\equiv 0 \pmod p, \\ |A_\eta(s,f,p)| + |B'_\eta(s,f,p)|, & \text{если } (s^2-4n)f^{-2} \equiv 0 \pmod p. \end{cases}$$

Тогда

$$b(s,f) = \sum_{\eta \in \mathfrak{H}} \chi_{S_m}(\eta) \prod_{p|m} b_\eta(s,f,p).$$

Во втором слагаемом

$$\delta(\sqrt{n}) = \begin{cases} 1, & \text{если } n \text{ – квадрат}, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Доказательство. Согласно следствию 2.3 из теоремы 2.1

$$\operatorname{tr} T(n) = \sum_{j=1}^{h(\mathcal{U})} \sum_{\gamma \in \mathcal{D}^\times \cap \beta_j^{-1}\mathfrak{S}(n)\beta_j} e_j^{-1} \operatorname{tr} \pi(\gamma).$$

Множество $\beta_j^{-1}\mathfrak{S}(n)\beta_j$ обозначим $\mathfrak{S}_j(n)$; пусть $S_j(n) = \mathcal{D}^\times \cap \mathfrak{S}_j(n)$ для всякого $\gamma \in \mathcal{D}^\times$ через $C(\gamma)$ обозначим класс элементов, сопряженных γ в $\mathcal{D}^\times$:

$$C(\gamma) = \{ x\gamma x^{-1} \mid x \in \mathcal{D}^\times \}. \tag{3.2}$$

В этих обозначениях

$$\operatorname{tr} T(n) = \sum_{C(\gamma)} \sum_{j=1}^{h(\mathcal{U})} e_j^{-1} \sum_{C(\gamma) \cap S_j(n)} \operatorname{tr} \pi(\gamma), \tag{3.3}$$

где $C(\gamma)$ пробегает классы сопряженных элементов с $\nu(\gamma) = n$ в $\mathcal{D}^\times$.

Фиксируем $\gamma \in \mathcal{D}^\times$ такое, что $\nu(\gamma) = n$, $\tau(\gamma) = s$. Пусть $f(X) = X^2 - sX + n$ – минимальный многочлен γ в $\mathcal{D}$ и $E = \mathbb{Q} + \mathbb{Q}\gamma$ – подполе в $\mathcal{D}$, порожденное γ . Назовем элемент γ регулярным, если $\Delta = s^2 - 4n \neq 0$. В этом случае E – квадратичное расширение $\mathbb{Q}$, централизатор γ в $\mathcal{D}^\times$ совпадает с мультипликативной группой поля $E^\times$, и $\xi \in \mathcal{D}^\times$ принадлежит $C(\gamma)$ тогда и только тогда, когда $\tau(\xi) = s$, $\nu(\xi) = n$. Следовательно, классы регулярных элементов параметризуются парами целых чисел (s, n) , такими, что $\Delta \neq 0$. Для того, чтобы класс $C(\gamma)$ входил в сумму (3.3), необходимо, чтобы порожденное γ поле E разлагало алгебру $\mathcal{D}$, то есть, его дискриминант Δ должен быть отрицательным.

Прежде всего мы найдем вклад в сумму (3.3) от класса элементов, сопряженных регулярному γ :

$$t(s,n) = \sum_{j=1}^{h(\mathcal{U})} e_j^{-1} \sum_{C(\gamma) \cap S_j(n)} \operatorname{tr} \pi(\gamma). \tag{3.4}$$

Пусть

$$E_{\mathbb{A}}^1 = \{ x \in \mathcal{D}_{\mathbb{A}}^1 \mid x_p \in E_p = E \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p \text{ при всех } p \}. \tag{3.5}$$

Для всякого порядка $\Lambda \subset E$, содержащего γ , через $\Omega(\gamma, \Lambda, \mathfrak{S}(n))$ обозначим множество

$$\{ \mathcal{U}_x^* E_{\mathbb{A}}^1 \in \mathcal{U}^* \backslash \mathcal{D}_{\mathbb{A}}^1 / E_{\mathbb{A}}^1 \mid x_p E_p x_p^{-1} \cap R_p = x_p \Lambda_p x_p^{-1} \text{ для всех } p < \infty, \tag{3.6}$$
$$x\gamma x^{-1} \in \mathfrak{S}(n) \}.$$

Множество $\Omega(\gamma,\Lambda,\mathfrak{S}(n))$ определено корректно, поскольку $E'_{\mathbb{A}}$ – централизатор γ в $\mathcal{D}'_{\mathbb{A}}$, а $\mathcal{U}^*$ нормализует $\mathfrak{S}(n)$.

Если двойной класс смежности $\mathcal{U}^* x E'_{\mathbb{A}} \in \Omega(\gamma,\Lambda,\mathfrak{S}(n))$ положим

$$\mathcal{D}_j(x,\Lambda) = \mathcal{D}^\times \cap \beta_j^{-1}\mathcal{U}^* x E'_{\mathbb{A}} \tag{3.7}$$

и

$$C_j(\gamma,x,\Lambda) = \{\xi\gamma\xi^{-1} \mid \xi \in \mathcal{D}_j(x,\Lambda)\}. \tag{3.8}$$

Лемма 3.2. 1) Пусть двойной класс смежности $\mathcal{U}^* x E'_{\mathbb{A}} \in \Omega(\gamma,\Lambda,\mathfrak{S}(n))$. Тогда

$$C_j(\gamma,x,\Lambda) \subset C(\gamma) \cap S_j(n) \tag{3.9}$$

причем, если $\mu \in C_j(\gamma,x,\Lambda)$ и $\gamma' = \mu\gamma\mu^{-1}$, то

$$E(\gamma') \cap M_j = \mu\Lambda\mu^{-1}, \tag{3.10}$$

где $E(\gamma') = \mathbb{Q} + \mathbb{Q}\gamma'$ – подполе в $\mathcal{D}$, порожденное γ', а

$$M_j = \bigcap_{p<\infty}(\mathcal{D} \cap \beta_{j,p}^{-1} R_p \beta_{j,p}) \tag{3.11}$$

– порядок в $\mathcal{D}$.

2) При всех $\gamma' \in C_j(\gamma,x,\Lambda)$

$$\operatorname{tr}\pi(\gamma') = \operatorname{tr}\pi(x\gamma x^{-1}). \tag{3.12}$$

В правой части (3.12) $\pi(x\gamma x^{-1})$ определено, поскольку $x\gamma x^{-1} \in \mathfrak{S}(n)$ и $\operatorname{tr}\pi(x\gamma x^{-1})$ не зависит от выбора представителя $x \in \mathcal{U}^* x E'_{\mathbb{A}}$

3)

$$C(\gamma) \cap S_j(n) = \bigcup_{\Lambda \ni \gamma} \bigcup_{\mathcal{U}^* x E'_{\mathbb{A}} \in \Omega(\gamma,\Lambda,\mathfrak{S}(n))} C_j(\gamma,x,\Lambda), \tag{3.13}$$

где объединение в правой части (3.13) берется по всем порядкам $\Lambda \subset E$, содержащим γ, и это объединение дизъюнктно.

Доказательство. 1) Пусть $\gamma' \in C_j(\gamma,x,\Lambda)$, тогда $\gamma' = \mu\gamma\mu^{-1}$ с $\mu \in \mathcal{D}_j(x,\Lambda)$. Предоставим μ в виде: $\mu = \beta_j^{-1} u x t$, где $u \in \mathcal{U}^*$ и $t \in E'_{\mathbb{A}}$. Тогда

$$\begin{aligned} E(\gamma) \cap M_j &= \bigcap_{p<\infty}(\mu E_p \mu^{-1} \cap \beta_j^{-1} R_p \beta_j \cap \mathcal{D}) \\ &= \bigcap_{p<\infty} \mu\,(E_p \cap t_p^{-1} x_p^{-1} u_p^{-1} \beta_{j,p} R_p \beta_{j,p} \beta_{j,p}^{-1} u_p x_p t_p \cap \mathcal{D})\mu^{-1} \\ &= \bigcap_{p<\infty} \mu\,((E_p \cap t_p^{-1} x_p^{-1} R_p x_p t_p) \cap \mathcal{D})\mu = \mu\Lambda\mu^{-1}, \end{aligned}$$

поскольку $t_p \in E_p^\times$ и $E_p \cap x_p^{-1} R_p x_p = \Lambda_p$ при всех $p < \infty$.

Наконец,

$$\gamma' = \beta_j^{-1} u (x\gamma x^{-1}) u^{-1} \beta_j \in C(\gamma) \cap \beta_j^{-1} \mathfrak{S}(n) \beta_j$$

поскольку $x\gamma x^{-1} \in \mathfrak{S}(n)$ и $\mathcal{U}^*$ нормализует $\mathfrak{S}(n)$, то есть $C(\gamma, x, \Lambda) \subset C(\gamma) \cap S_j(n)$

2) В обозначениях п.1)

$$\gamma' = \beta_j^{-1} u (x\gamma x^{-1}) u \beta_j,$$

где $u \in \mathcal{U}^*$ и $\beta_{j,p} \in \mathcal{U}^*$ при всех $p \mid dm$. Тогда $tr\, \pi(\gamma) = tr\, \pi(x\gamma x^{-1})$, поскольку представление π_∞ определено на всей группе $\mathcal{D}_\infty^\times$, а при $p \mid dm$ представление π_p определено на $\mathcal{U}_p^* = R_p^\times$

При замене представителя $x \in \mathcal{U}^* x E_{\mathbb{A}}^1$ на $x' = uxt$, где $u \in \mathcal{U}^*$, $t \in E_{\mathbb{A}}^1$, $x\gamma x^{-1}$ изменяется на $uxyx^{-1}u$, следовательно, $tr\, \pi(x\gamma x^{-1})$ зависит только от класса смежности $\mathcal{U}^* x E_{\mathbb{A}}^1 \in \Omega(\gamma, \Lambda, \mathfrak{S}(n))$.

3) Из п.1) следует, что если правая часть (3.13) не пуста, то не пуста и левая. Поэтому достаточно доказать п.3) при условии $C(\gamma) \cap S_j(n) \neq \phi$.

Пусть $\gamma_\mu = \mu \gamma \mu^{-1} \in C(\gamma) \cap S_j(n)$, $\mu \in \mathcal{D}^\times$. Через M_j обозначим порядок в $\mathcal{D}$, определенный формулой (3.11) и пусть $\mathcal{U}_j^* = \beta_j^{-1} \mathcal{U}^* \beta_j$ – стабилизатор M_j в $\mathcal{D}_{\mathbb{A}}^1$.

Для всякого порядка $P \subset \mathbb{Q} + \mathbb{Q}\gamma_\mu = E_\mu$, содержащего γ_μ, через $\Omega_j(\gamma_\mu, P, \mathfrak{S}(n))$, $\mathcal{D}_j(\gamma_\mu, x, P)$, $C_j(\gamma_\mu, x, P)$ обозначим множества:

$$\Omega_j(\gamma_\mu, P, \mathfrak{S}(n)) = \{ \mathcal{U}_j^* x E_{\mu,\mathbb{A}}^1 \in \mathcal{U}_j^* \backslash \mathcal{D}_{\mathbb{A}}^1 / E_{\mu,\mathbb{A}}^1 \mid$$

$$\mid E_{\mu,p} \cap x_p^{-1} M_{j,p} x_p = P_p \text{ для всех } p < \infty, x\gamma_\mu x^{-1} \in \mathfrak{S}_j(n) \}, \quad (3.14)$$

$$\mathcal{D}_j(\gamma_\mu, x, P) = \mathcal{D}^\times \cap \mathcal{U}_j^* x E_{\mu,\mathbb{A}}^1, \quad (3.15)$$

$$C_j(\gamma_\mu, x, P) = \{ \xi \gamma_\mu \xi^{-1} \mid \xi \in \mathcal{D}_j(\gamma_\mu, x, P) \}. \quad (3.16)$$

Тогда

$$C(\gamma) \cap S_j(n) = \bigcup_{P \ni \gamma_\mu} \bigcup_{\mathcal{U}_j^* x E_{\mu,\mathbb{A}}^1 \in \Omega(\gamma_\mu, P, \mathfrak{S}_j(n))} C_j(\gamma_\mu, x, P). \quad (3.17)$$

Объединение в правой части дизъюнктно.

Действительно, прежде всего заметим, что $\mathcal{D}_j(\gamma_\mu, x, P) \cap \mathcal{D}_j(\gamma_\mu, x', P) \neq \emptyset$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{U}_j^* x E'_{\mu,\mathbb{A}} = \mathcal{U}_j^* x' E'_{\mu,\mathbb{A}}$ (в этом случае автоматически $P = P'$). Всякое множество $\mathcal{D}_j(\gamma_\mu, x, P)$ является объединением некоторого числа классов смежности $(\mathcal{D}^\times \cap \mathcal{U}_j^*)\xi E_\mu^\times$, $\xi \in \mathcal{D}^\times$. Поскольку $E_\mu^\times$ является централизатором γ_μ в $\mathcal{D}^\times$, отсюда следует, что $C_j(\gamma_\mu, x, P) \cap C_j(\gamma_\mu, x', P') \neq \emptyset$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{U}_j^* x E'_{\mathbb{A}} = \mathcal{U}_j^* x' E'_{\mathbb{A}}$. Таким образом, объединение в правой части (3.17) дизъюнктно.

Пусть теперь $\gamma' \in C(\gamma) \cap S_j(n)$. Тогда $\gamma' = \xi \gamma_\mu \xi^{-1}$ при некотором $\xi \in \mathcal{D}^\times$. Двойной класс смежности $\mathcal{U}_j^* \xi E'_{\mu,\mathbb{A}}$ принадлежит $\Omega_j(\gamma_\mu, P_\xi, \mathfrak{S}_j(n))$, где P_ξ – порядок в E_μ, содержащий γ_μ : $P_\xi = \bigcap_{p<\infty} [(E_{\mu,p} \cap \xi^{-1} M_{j,p} \xi) \cap E_\mu]$, и $\gamma' \in C_j(\gamma_\mu, \xi, P_\xi)$. Итак, (3.17) доказано.

Наконец, каждому двойному классу смежности $\mathcal{U}_j^* x E'_{\mu,\mathbb{A}} \in \Omega_j(\gamma_\mu, P, \mathfrak{S}_j(n))$ сопоставим класс смежности $\mathcal{U}^* \beta_j x \mu E'_{\mathbb{A}}$. Тогда при всех $p < \infty$

$$E_p \cap \mu^{-1} x_p^{-1} \beta_{j,p}^{-1} R_p \beta_{j,p} x_p \mu = \mu^{-1}(\mu E_p \mu^{-1} \cap x_p^{-1} M_{j,p} x_p)\mu = \mu^{-1} P_p \mu$$

и $\beta_j x \mu \gamma_\mu \mu^{-1} x^{-1} \beta_j \in \mathfrak{S}(n)$, поскольку $x \gamma_\mu x^{-1} \in \mathfrak{S}_j(n)$. Таким образом, $\mathcal{U} \beta_j x \mu E'_{\mathbb{A}} \in \Omega(\gamma, \mu^{-1} P \mu, \mathfrak{S}(n))$.

Соответствие $P \leftrightarrow \mu^{-1} P \mu$ является биективным соответствием между порядками $P \subset E_\mu$, содержащими γ_μ, и порядками $\Lambda \subset E$, содержащими γ. Ясно, что и отображение

$$\Omega_j(\gamma_\mu, P, \mathfrak{S}_j(n)) \ni \mathcal{U}_j^* x E'_{\mu,\mathbb{A}} \longrightarrow \mathcal{U}^* \beta_j x \mu E'_{\mathbb{A}} \in \Omega(\gamma, \mu^{-1} P \mu, \mathfrak{S}(n))$$

является биективным. Более того, при $\mathcal{U}_j^* x E'_{\mu,\mathbb{A}} \in \Omega_j(\gamma_\mu, P, \mathfrak{S}_j(n))$ множество $C_j(\gamma_\mu, x, P)$ просто равно множеству $C_j(\gamma, \beta_j x \mu, \mu^{-1} P \mu)$. Действительно, пусть $\gamma' \in C_j(\gamma_\mu, x, P)$, тогда $\gamma' = \xi \gamma_\mu \xi^{-1}$ при некотором $\xi \in \mathcal{D}_j(\gamma_\mu, x, P)$. В этом случае $\gamma' = (\xi\mu)\gamma(\xi\mu)^{-1}$ и $\xi_\mu = (\beta_j^{-1} u \beta_j \cdot x \cdot \mu t \mu^{-1}) = \beta_j^{-1} u \beta_j x \mu t$, где $u \in \mathcal{U}^*$ и $t \in E'_{\mathbb{A}}$, то есть $\xi\mu \in \mathcal{D}_j(\gamma, \beta_j x \mu, \mu^{-1} P \mu)$, или $\gamma' \in C_j(\gamma, \beta_j x \mu, \mu^{-1} P \mu)$. Обратное включение столь же очевидно.

Итак, 3) доказано, ч.т.д.

Следствие 3.3. В обозначениях леммы 3.2

$$t(s,n) = \sum_{\Lambda \ni \gamma} \sum_{\mathcal{U}^* x E'_{\mathbb{A}} \in \Omega(\gamma, \Lambda, \mathfrak{S}(n))} \Big[\sum_{j=1}^{h(\mathcal{U})} e_j^{-1} |C_j(\gamma, x, \Lambda)|\Big] \operatorname{tr} \pi(x \gamma x^{-1}). \quad (3.18)$$

Лемма 3.4. Если двойной класс смежности $\mathcal{U}^* x E^1_{\mathbb{A}}$ принадлежит $\Omega(\gamma, \Lambda, \mathfrak{S}(n))$, то

$$\sum_{j=1}^{h(\mathcal{U})} e_j^{-1} |C_j(\gamma, x, \Lambda)| = \varphi(m') \cdot |\mathfrak{S}|^{-1} \frac{h(\Lambda)}{w(\Lambda)}, \tag{3.19}$$

где $h(\Lambda)$ – число классов порядка Λ в поле E и $w(\Lambda) = |\Lambda^\times|$ – число единиц порядка Λ.

Доказательство. Прежде всего заметим, что множество $C_j(\gamma, x, \Lambda) \neq \emptyset$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{D}_j(\gamma, x, \Lambda) \neq \emptyset$. Допустим, что $\xi \in \mathcal{D}_j(\gamma, x, \Lambda)$. Тогда $\xi = \beta_j^{-1} u x t$, где $u \in \mathcal{U}^*$ и $t \in E^1_{\mathbb{A}}$. Следовательно, $\beta_j^{-1} \mathcal{U}^* x E^1_{\mathbb{A}} = \mathcal{U}_j^* \xi E^1_{\mathbb{A}}$, где $\mathcal{U}_j^* = \beta_j^{-1} \mathcal{U}^* \beta_j$. Поэтому $\mathcal{D}_j(\gamma, x, \Lambda) = \mathcal{D}^\times \cap \mathcal{U}_j^* \xi E^1_{\mathbb{A}}$ вместе с ξ содержит двойной класс смежности $\Gamma_j^* \xi E^\times$, где $\Gamma_j^* = \mathcal{D}^\times \cap \mathcal{U}_j^*$. Каждому классу смежности $\Gamma_j^* \xi E^\times$ соответствует подмножество

$$C_j(\Gamma_j^* \xi E^\times) = \{\xi_j \xi \gamma \xi^{-1} \xi_j^{-1} \mid \xi_j \in \Gamma_j^*\} \subset C_j(\gamma, x, \Lambda) \quad \text{и}$$

$$C_j(\gamma, x, \Lambda) = \bigcup_{\Gamma_j^* \xi E^\times \in \Gamma_j^* \setminus \mathcal{D}_j(\gamma, x, \Lambda)/E^\times} C_j(\Gamma_j^* \xi E^\times) \tag{3.20}$$

причем, поскольку $E^\times$ – централизатор γ в $\mathcal{D}^\times$, объединение в правой части (3.20) дизъюнктно.

Следовательно,

$$|C_j(x, x, \Lambda)| = \sum_{\Gamma_j^* \xi E^\times \in \Gamma_j^* \setminus \mathcal{D}_j(\gamma, x, \Lambda)/E^\times} \frac{|\Gamma_j^*|}{|\Gamma_j^* \cap \xi E^\times \xi^{-1}|}.$$

Пусть M_j – порядок в $\mathcal{D}$, определенный формулой (3.11). Тогда Γ_j^* – группа единиц порядка M_j, и из леммы 2.2 п.1) следует, что $\xi E \xi^{-1} \cap M_j = \xi \Lambda \xi^{-1}$. Поэтому,

$$|\Gamma_j^* \cap \xi E^\times \xi^{-1}| = |\xi \Lambda^\times \xi^{-1}| = |\Lambda^\times| = w(\Lambda).$$

Через e_j^* обозначим порядок группы Γ_j^*. Мы показали, что

$$\sum_{j=1}^{h(\mathcal{U})} e_j^{-1} |C_j(\gamma, x, \Lambda)| = \frac{1}{w(\Lambda)} \sum_{j=1}^{h(\mathcal{U})} \frac{e_j^*}{e_j} |\Gamma_j^* \setminus \mathcal{D}(\gamma, x, \Lambda)/E^\times|. \tag{3.21}$$

Пусть $\mathcal{U}_\Lambda^* = x^{-1} \mathcal{U}^* x \cap E^1_{\mathbb{A}}$, тогда $x \mathcal{U}_\Lambda^* x^{-1} \subset \mathcal{U}^*$ и

$$\mathcal{U}_\Lambda^* = \{u \in E^1_{\mathbb{A}} \mid u_p \in \Lambda_p^\times \text{ при всех } p < \infty\}.$$

Поэтому число двойных классов смежности $\mathcal{U}^*_\Lambda t E^\times$ в E^1_Λ равно $h(\Lambda)$; пусть

$$E^1_\Lambda = \bigcup_{k=1}^{h(\Lambda)} \mathcal{U}^*_\Lambda t_k E^\times .$$

Тогда

$$\beta_j^{-1}\mathcal{U}^* x E^1_\Lambda = \bigcup_{k=1}^{h(\Lambda)} \beta_j^{-1}\mathcal{U} x t_k E^\times , \tag{3.22}$$

причем объединение в правой части (3.22) дизъюнктно. Следовательно,

$$|\Gamma_j^* \setminus \mathcal{D}_j(\gamma, x, \Lambda)/E^\times| = \sum_{k=1}^{h(\Lambda)} |\Gamma_j^* \setminus \beta_j^{-1}\mathcal{U}^* x t_k E^\times \cap \mathcal{D}^\times / E^\times|$$

и $$\sum_{j=1}^{h(\mathcal{U})} \frac{e_j^*}{e_j} |\Gamma_j^* \setminus \mathcal{D}_j(\gamma, x, \Lambda)/E^\times| =$$

$$= \sum_{k=1}^{h(\Lambda)} \Big[\sum_{j=1}^{h(\mathcal{U})} \frac{e_j^*}{e_j} |\Gamma_j^* \setminus \beta_j^{-1}\mathcal{U}^* x t_k E^\times \cap \mathcal{D}^\times / E^\times| \Big] . \tag{3.23}$$

Докажем, что

$$\sum_{j=1}^{h(\mathcal{U})} \frac{e_j^*}{e_j} |\Gamma_j^* \setminus \beta_j^{-1}\mathcal{U}^* x t_k E^\times \cap \mathcal{D}^\times / E^\times| = [\mathcal{U}^* : \mathcal{U}] = \frac{\varphi(m')}{|\mathfrak{H}|} . \tag{3.24}$$

Предположим, что $x t_k \in \mathcal{U}^* \alpha_m \mathcal{D}^\times$, где α_m взято из разложения (1.15), и $x t_k = u \alpha_m \xi$ с $u \in \mathcal{U}^*$ и $\xi \in \mathcal{D}^\times$. Тогда $\beta_j^{-1}\mathcal{U}^* x t_k E^\times = \beta_j^{-1}\mathcal{U}^* \alpha_m \xi E^\times$ и

$$\beta_j^{-1}\mathcal{U}^* x t_k E^\times \cap \mathcal{D}^\times = [\beta_j^{-1}\mathcal{U}^* \alpha_m \cap \mathcal{D}^\times] \xi E^\times . \tag{3.25}$$

Действительно, если $\lambda \in \beta_j^{-1}\mathcal{U}^* \alpha_m \xi E^\times \cap \mathcal{D}^\times$, то $\lambda = \lambda' \xi t$, где $\lambda' \in \beta_j^{-1}\mathcal{U}^* \alpha_m$ и $t \in E^\times$. В этом случае, $\lambda' = \lambda t^{-1} \xi^{-1} \in \beta_j^{-1}\mathcal{U}^* \alpha_m \cap \mathcal{D}^\times$, следовательно, $\beta_j^{-1}\mathcal{U}^* x t_k E^\times \cap \mathcal{D}^\times \subset [\beta_j^{-1}\mathcal{U}^* \alpha_m \cap \mathcal{D}^\times] \xi E^\times$. Обратное включение очевидно.

Заметим, что

$$|\Gamma_j^* \setminus (\beta_j^{-1}\mathcal{U}^* \alpha_m \cap \mathcal{D}^\times)| = \begin{cases} 1, \text{ если } \beta_j \in \mathcal{U}^* \alpha_m \mathcal{D}^\times , \\ 0, \text{ если } \beta_j \notin \mathcal{U}^* \alpha_m \mathcal{D}^\times . \end{cases} \tag{3.26}$$

Действительно, пусть $\beta_j = u\alpha_m\vartheta$, $u \in \mathcal{U}^*$, $\vartheta \in \mathcal{D}^\times$. Тогда

$\beta_j^{-1}\mathcal{U}^*\alpha_m \cap \mathcal{D}^\times = \beta_j^{-1}\mathcal{U}^*\beta_j\vartheta \cap \mathcal{D}^\times = \Gamma_j^*\vartheta$, то есть

$|\Gamma_j^* \setminus (\beta_j^{-1}\mathcal{U}^*\alpha_m \cap \mathcal{D}^\times)| = 1.$

Обратно, допустим, что $\beta_j^{-1}\mathcal{U}^*\alpha_m \cap \mathcal{D}^\times \neq \phi$. Пусть $\vartheta \in \beta_j^{-1}\mathcal{U}^*\alpha_m \cap \mathcal{D}^\times$ и $\vartheta = \beta_j^{-1}u\alpha_m$, $u \in \mathcal{U}^*$. Тогда $\mathcal{U}^*\beta_j\vartheta\mathcal{D}^\times = \mathcal{U}^*\alpha_m\mathcal{D}^\times$, следовательно, $\beta_j \in \mathcal{U}^*\alpha_m\mathcal{D}^\times$.

Из (3.25) и (3.26) следует, что

$$\sum_{j=1}^{h(\mathcal{U})} \frac{e_j^*}{e_j} |\Gamma_j^* \setminus \beta_j^{-1}\mathcal{U}^* x t_k E^\times \cap \mathcal{D}^\times / E| = \sum_{\mathcal{U}^*\beta_j\mathcal{D}^\times \subset \mathcal{U}^*\alpha_m\mathcal{D}^\times} \frac{e_j^*}{e_j}, \qquad (3.27)$$

где α_m удовлетворяет условию: $x t_k \in \mathcal{U}^*\alpha_m\mathcal{D}^\times$.

По определению, $e_j^* = |\mathcal{D}^\times \cap \beta_j^{-1}\mathcal{U}^*\beta_j|$. Если $\beta_j \in \mathcal{U}^*\alpha_m\mathcal{D}^\times$, представим β_j в виде $\beta_j = u\alpha_m\vartheta$, $u \in \mathcal{U}^*$, $\vartheta \in \mathcal{D}^\times$. Тогда

$$e_j^* = |\mathcal{D}^\times \cap \beta_j^{-1}\mathcal{U}^*\beta_j| = |\mathcal{D}^\times \cap \vartheta^{-1}\alpha_m^{-1}\mathcal{U}^*\alpha_m\vartheta| = |\mathcal{D}^\times \cap \alpha_m^{-1}\mathcal{U}^*\alpha_m|.$$

Пусть $d\mu_{\mathcal{U}}$ ($d\mu_{\mathcal{U}^*}$) – мера Хаара на $\mathcal{D}_{\mathbb{A}}^1$ такая, что $\mu_{\mathcal{U}}(\mathcal{U}) = 1$ ($\mu_{\mathcal{U}^*}(\mathcal{U}^*) = 1$). Тогда правую часть (3.27) можно представить в виде

$$\int_{\mathcal{U}^*\alpha_m\mathcal{D}^\times/\mathcal{D}^\times} d\mu_{\mathcal{U}}(x) \cdot \Big[\int_{\mathcal{U}^*\alpha_m\mathcal{D}^\times/\mathcal{D}^\times} d\mu_{\mathcal{U}^*}(x) \Big]^{-1} = [\mathcal{U}^* : \mathcal{U}].$$

Таким образом, (3.24), а тем самым и лемма, доказано.

Продолжим вычисление $t(s,n)$. Через $k<0$ обозначим наибольший свободный от квадратов целый делитель $\Delta = s^2 - 4n$. Пусть $\Lambda_\gamma = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\gamma$ – минимальный порядок E, содержащий γ, и $\tilde{\Lambda}$ – максимальный порядок E (кольцо целых). Тогда дискриминант порядка $\tilde{\Lambda}$ равен:

$$\Delta(\tilde{\Lambda}) = \begin{cases} k & \text{при } k \equiv 1 \pmod 4, \\ 4k & \text{при } k \equiv 2,3 \pmod 4 \end{cases}$$

и Δ – дискриминант порядка Λ_γ. Порядки $\Lambda_f \subset E$, удовлетворяющие условию: $\tilde{\Lambda} \supset \Lambda_f \supset \Lambda_\gamma$ параметризуются целыми $f>0$, где f пробегает указанное в условиях теоремы множество и $f = [\Lambda_f : \Lambda_\gamma]$. Дискриминант порядка Λ_f равен $\Delta \cdot f^{-2}$.

В этих обозначениях результаты лемм 3.2 и 3.4 можно сформулировать в виде леммы:

Лемма 3.5.

$$t(s,n) = \frac{\varphi(m')}{|\mathfrak{H}|} \cdot \sum_f \frac{h((s^2-4n)\cdot f^{-2})}{w((s^2-4n)\cdot f^{-2})} \sum_{\mathcal{U}^* x E_{\mathbb{A}}^1 \in \Omega(\gamma, \Lambda_f, \mathfrak{S}(n))} \operatorname{tr} \pi(x\gamma x^{-1}). \tag{3.28}$$

При вычислении сумм

$$t(\Lambda) = \sum_{\mathcal{U}^* x E_{\mathbb{A}}^1 \in \Omega(\gamma, \Lambda_f, \mathfrak{S}(n))} \operatorname{tr} \pi(x\gamma x^{-1}) \tag{3.29}$$

каждому двойному классу смежности $\mathcal{U}^* x E_{\mathbb{A}}^1 \in \Omega(\gamma, \Lambda_f, \mathfrak{S}(n))$ сопоставим набор классов смежности $\{\mathcal{U}_p^* x_p E_p^\times\}_{p<\infty}$. Если $p \nmid dm$, то условия $\{E_p \cap x_p^{-1} R_p x_p = \Lambda_{f,p}, x\gamma x^{-1} \in \mathfrak{S}(n)\}$ на компоненте $\mathcal{D}_p^\times$ сводятся к условиям

$$\{E_p \cap x_p^{-1} R_p x_p = \Lambda_{f,p}\ ,\ x_p \gamma x_p^{-1} \in \{x \in R_p \mid |\nu_p(x)|_p = p^{-\nu_p(n)}\}\}. \tag{3.30}$$

Из теоремы Шевалле - Хассе - Нетер [4,6] следует, что при фиксированном порядке $\Lambda_{f,p}$, содержащем элемент γ с нормой n, всегда существует, и притом единственный, двойной класс смежности $\mathcal{U}_p^* x_p E_p^\times$, удовлетворяющий условиям (3.30). Поэтому класс $\mathcal{U}^* x E_{\mathbb{A}}^1$ однозначно определяется γ (мы имеем в виде бесконечную компоненту) и набором классов $\{\mathcal{U}_p^* x_p E_p^\times\}_{p \mid dm}$. Точнее, отображение

$$\{\mathcal{U}^* x E_{\mathbb{A}}^1\} \longrightarrow \{\{\mathcal{U}_p^* x_p E_p^\times\}_{p \mid dm} \mid E_p \cap x_p^{-1} R_p x_p = \Lambda_{f,p}\ ,$$
$$\text{при } x_p \gamma x_p^{-1} \in \mathfrak{S}_p \quad p \mid d\ ,\ (x_p \gamma x_p)_{p \mid m} \in \mathfrak{S}_{S_m}\} \tag{3.31}$$

является взаимно однозначным отображением множества $\Omega(\gamma, \Lambda_f, \mathfrak{S}(n))$ на множество в правой части (3.31). Условия в правой части (3.31) легко переформулировать в терминах оптимальных погружений [4,6]. Напомним, что оптимальным погружением алгебры E_p в алгебру $\mathcal{D}_p$ относительно $R_p / \Lambda_{f,p}$ называется инъективный гомоморфизм φ_p $\mathbb{Q}_p$-алгебры E_p в $\mathcal{D}_p$ такой, что

$$\varphi_p(E_p) \cap R_p = \varphi_p(\Lambda_{f,p}).$$

Два оптимальных погружения $\varphi_{p,i}$ $(i = 1,2)$ называются $\mathcal{U}_p^*$ -

эквивалентными, если существует такой элемент $u_p \in \mathcal{U}_p^*$, что $\varphi_{p,2}(t_p) = u_p \varphi_{p,1}(t_p) u_p^{-1}$ при всех $t_p \in E_p$. Всякое оптимальное погружение φ_p алгебры E_p однозначно определяется образом $\varphi_p(\gamma)$ образующей γ, и существует взаимно однозначное соответствие между множеством двойных классов смежности $\mathcal{U}_p^* x E_p^\times$ таких, что $x_p E x_p^{-1} \cap R_p = x_p \Lambda_{f,p} x_p^{-1}$, $x_p \gamma x_p^{-1} \in \mathfrak{S}_p$ и классами $\mathcal{U}_p^*$-эквивалентности оптимальных погружений: $\varphi_p : E_p \to R_p$ относительно $R_p / \Lambda_{f,p}$ таких, что $\varphi_p(\gamma) \in \mathfrak{S}_p$ (заметим, что $\mathcal{U}_p^*$ нормализует $\mathfrak{S}_p$). Это соответствие индуцировано отображением $x_p \to \varphi_{x_p}$, где $\varphi_{x_p}(\gamma) = x_p \gamma x_p^{-1}$. Указанный класс $\mathcal{U}_p^*$-эквивалентности оптимальных погружений обозначим через $Emb_p(\gamma, \mathfrak{S}_p, R_p/\Lambda_{f,p})/\widetilde{\mathcal{U}}_p^*$. Итак, входящую в правую часть (3.28) сумму $t(\Lambda_f)$ мы можем представить в виде:

$$t_\infty(s,n) \cdot \prod_{p|d} \Big(\sum_{\varphi_p \in Emb_p(\gamma, \mathfrak{S}_p, R_p/\Lambda_{f,p})/\widetilde{\mathcal{U}}_p^*} \pi_p(\varphi_p(\gamma)) \Big) \cdot$$

$$\sum_{\{\varphi_p\}_{p|m} \in \{\{\varphi_p\} \in \prod_{p|m} Emb_p(\gamma, R_p, R_p/\Lambda_{f,p})/\widetilde{\mathcal{U}}_p^* \mid \prod_{p|m} \varphi_p(\gamma) \in \mathfrak{S}_{S_m}\}} \pi_{S_m}\Big(\prod_{p|m} \varphi_p(\gamma)\Big) \tag{3.32}$$

и нам осталось лишь показать, что в обозначениях теоремы 3.1

$$\prod_{p|d} \Big(\sum_{\varphi_p \in Emb_p(\gamma, \mathfrak{S}_p, R_p/\Lambda_{f,p})/\widetilde{\mathcal{U}}_p^*} \pi_p(\varphi_p(\gamma)) \Big) = a(s,f) \tag{3.33}$$

и

$$\sum_{\{\varphi_p\}_{p|m} \in \{\{\varphi_p\}_{p|m} \in \prod_{p|m} Emb_p(\gamma, R_p, R_p/\Lambda_{f,p})/\widetilde{\mathcal{U}}_p^* \mid \prod_{p|m} \varphi_p(\gamma) \in \mathfrak{S}_{S_m}\}} \pi_{S_m}\Big(\prod_{p|m} \varphi_p(\gamma)\Big) = b(s,f) \tag{3.34}$$

1) $p|d$. В этом случае теорема Шевалле – Хассе – Нетер дает строение множества $Emb_p(\gamma, \mathfrak{S}_p, R_p/\Lambda_{f,p})/\widetilde{\mathcal{U}}_p^*$. Прежде всего,

$$Emb_p(\gamma, \mathfrak{S}_p, R_p/\Lambda_{f,p}) = Emb_p(\gamma, R_p, R_p/\Lambda_{f,p})$$

поскольку n взаимно просто с p. Из теоремы Шевалле – Хассе – Нетер следует, что элемент γ оптимально вкладывается в R_p относительно $R_p/\Lambda_{f,p}$ тогда и только тогда, когда E_p является полем и $\Lambda_{f,p}$ – максимальный порядок в E_p. При этом множество классов $\mathcal{U}_p^*$-эквивалентности оптимальных погружений состоит из

единственной точки, соответствующей тождественному погружению, если E_p разветвлено над $\mathbb{Q}_p$, и из двух точек, соответствующих погружениям φ_p и φ'_p, при которых $\varphi_p(\gamma)=\gamma$, $\varphi'_p(\gamma)=\Pi_p\gamma\Pi_p^{-1}$, где Π_p – простой элемент R_p, если E_p неразветвлено. В условиях теоремы 3.I модифицированный символ Лежандра был выбран таким образом, что

$$\left\{\frac{(s^2-4n)f^{-2}}{p}\right\} = \begin{cases} 1, & \text{если } E_p \text{ не является полем или } \Lambda_{f,p} \text{ – не максимальный порядок.} \\ 0, & \text{если } E_p \text{ разветвлено и } \Lambda_{f,p} \text{ – максимальный порядок} \\ -1, & \text{если } E_p \text{ неразветвлено и } \Lambda_{f,p} \text{ – максимальный порядок} \end{cases}$$

Поэтому, $|Emb_p(\gamma,\mathfrak{S}_p, R_p/\Lambda_{f,p})/\widetilde{\mathfrak{U}}_p^*| = \left(1-\left\{\frac{(s^2-4n)f^{-2}}{p}\right\}\right)$ и

$$\sum_{\varphi_p\in Emb_p(\gamma,\mathfrak{S}_p, R_p/\Lambda_{f,p})/\mathfrak{U}_p^*} \pi_p(\varphi_p(\gamma)) = \left(1-\left\{\frac{(s^2-4n)f^{-2}}{p}\right\}\right)\chi_p(n).$$

Таким образом, (3.33) доказано.

2) При вычислении левой части (3.34) воспользуемся результатами Хиджикаты:

Теорема [4. , Т.2.3]. При фиксированной паре (s,f) и простом $p|m$, положим $\rho_p=v_p(f)$, $\mu_p=v_p(m)>0$. Пусть γ – целый элемент $M_2(\mathbb{Q}_p)$ со следом s и нормой n, не лежащий в центре $M_2(\mathbb{Q}_p)$, $E_p=\mathbb{Q}_p+\mathbb{Q}_p\gamma$, и $\Lambda_{f,p}$ – такой порядок E_p, содержащий γ, что $[\Lambda_{f,p}:\mathbb{Z}_p+\mathbb{Z}_p\gamma]=p$. Пусть $f(X)=X^2-sX+n$ – минимальный многочлен γ над $\mathbb{Q}_p$. Положим

$$\widetilde{F}_p=\{\xi\in\mathbb{Z}_p \mid f(\xi)\equiv 0 (\mathrm{mod}\, p^{\mu_p+2\rho_p}\mathbb{Z}_p) \text{ и } 2\xi\equiv s(\mathrm{mod}\, p^{\rho_p}\mathbf{Z})\}.$$

Пусть F_p – полная система представителей $\widetilde{F}(\mathrm{mod}\, p^{\mu_p+\rho_p}\mathbb{Z}_p)$; положим

$$F'_p=\{\vartheta\in F_p \mid f(\vartheta)\equiv 0 (\mathrm{mod}\, p^{\mu_p+2\rho_p+1}\mathbf{Z}_p).$$

Для каждого $\xi\in F_p$ $(\vartheta\in F'_p)$ определим погружение $\varphi_\xi: E_p\to M_2(\mathbb{Q}_p)$ $(\varphi'_\vartheta: E_p\to M_2(\mathbb{Q}_p))$, считая

$$\varphi_\xi(\gamma)=\begin{pmatrix}\xi & p^{\rho_p}\\ -p^{-\rho_p}f(\xi) & s-\xi\end{pmatrix} \tag{3.35}$$

$$\left(\varphi'_\vartheta(\gamma) = \begin{pmatrix} s-\vartheta & -p^{-(\mu_p+\rho_p)}f(\vartheta) \\ p^{\mu_p+\rho_p} & \vartheta \end{pmatrix} \right). \tag{3.36}$$

Тогда множество

$$\begin{cases} \{\varphi_\xi \mid \xi \in F_p\} & \text{, если } p^{-2\rho_p}(s^2-4n) \not\equiv 0 \pmod{p\mathbb{Z}_p}, \\ \{\varphi_\xi \mid \xi \in F_p\} \cup \{\varphi'_\vartheta \mid \vartheta \in F'_p\} & \text{, если } p^{-2\rho_p}(s^2-4n) \equiv 0 \pmod{p\mathbb{Z}_p} \end{cases}$$

дает полную систему представителей $Emb_p(\gamma, R_p, R_p/\Lambda_{f,p})/\widetilde{\mathfrak{A}}^*_p$

Следствие [4, Следствие 2.7]. Пусть H_p – подмножество $\mathbb{Z}_p$, определенное по модулю $p^{\mu_p}\mathbb{Z}_p$, а именно: H_p – полный прообраз некоторого подмножества $\overline{H}_p \subset \mathbb{Z}_p/p^{\mu_p}\mathbb{Z}_p$. Положим $\Xi_{H_p} = \{(x_{ij}) \in R_p \mid x_{11} \in H_p\}$. Пусть γ и $F_p = F_p(\gamma, \mu_p)$ определены условиями предыдущей теоремы. Тогда множество

$$\begin{cases} \{\varphi_\xi \mid \xi \in F_p \cap H_p\}, \text{если } p^{-2\rho_p}(s^2-4n) \not\equiv 0 \pmod{p\mathbb{Z}_p}, \\ \{\varphi_\xi \mid \xi \in F_p \cap H_p\} \cup \{\varphi'_\vartheta \mid \vartheta \in F'_p,\ s-\vartheta \in H_p\}, \text{если } p^{-2\rho_p}(s-4n) \equiv 0 \pmod{p\mathbb{Z}_p} \end{cases}$$

дает полную систему представителей $Emb_p(\gamma, \Xi_{H_p}, R_p/\Lambda_{f,p})/\widetilde{\mathfrak{A}}^*_p$.

Фиксируем теперь $\eta \in \mathfrak{H}$. В обозначениях теоремы 3.1 положим

$$C_\eta(s,f,p) = \begin{cases} A_\eta(s,f,p), \text{если } (s^2-4n)f^{-2} \not\equiv 0 \pmod{p}, \\ A_\eta(s,f,p) \cup B_\eta(s,f,p), \text{если } (s^2-4n)f^{-2} \equiv 0 \pmod{p} \end{cases}$$

и через $\hat{C}_\eta(s,f,p)$ обозначим множество погружений $\varphi_{p,x}$, $x \in C_\eta(s,f,p)$, определенных формулами (3.35) и (3.36). Тогда из приведенных выше результатов Хиджикаты следует, что

$$\{\{\varphi_p\}_{p|m} \in \prod_{p|m} Emb_p(\gamma, R, R/\Lambda_{f,p})/\mathfrak{A}^*_p \mid \prod_{p|m} \varphi_p(\gamma) \in \mathfrak{S}_{S_m}\} = \tag{3.37}$$

$$= \bigcup_{\eta \in \mathfrak{H}} \{\{\varphi_p\}_{p|m} \in \prod_{p|m} \hat{C}_\eta(s,f,p)\},$$

причем объединение в правой части (3.37) дизъюнктно. Таким образом, (3.34) доказано, и мы получили следующую лемму:

Лемма 3.6. В обозначениях теоремы 3.1

$$\sum_{C(\gamma)}^{reg} \sum_{j=1}^{h(\mathfrak{A})} e_j^{-1} \sum_{C(\gamma)\cap S_j(n)} tr\,\pi(\gamma) = \frac{\varphi(m')}{|\mathfrak{H}|} \sum_S tr\,\pi_\infty(s,n) \sum_f \frac{h((s^2-4n)f^{-2})}{W((s^2-4n)f^{-2})} a(s,f)\,b(s,f). \tag{3.38}$$

Знак $\sum^{reg}$ в левой части (3.38) означает, что суммирование производится по классам регулярных сопряженных элементов. Если n является квадратом в $\mathbb{Q}$, то в формулу следа (2.34) входит вклад от сингулярных элементов $\pm\sqrt{n}$, равный

$$2\,\mathrm{tr}\,\pi(\sqrt{n})\cdot\sum_{j=1}^{h(\mathfrak{U})} e_j^{-1}$$

и нам осталось найти

$$\sum_{j=1}^{h(\mathfrak{U})} e_j^{-1} = \int_{\mathcal{D}_{\mathbb{A}}^1/\mathcal{D}^\times} d\mu_{\mathfrak{U}}(x), \tag{3.39}$$

где $\mu_{\mathfrak{U}}$ – мера Хаара на $\mathcal{D}_{\mathbb{A}}^1$ такая, что $\mu_{\mathfrak{U}}(\mathfrak{U})=1$.

Пусть $\widetilde{R}$ – рассмотренный Эйхлером [8] порядок в $\mathcal{D}$, такой, что порядок $\widetilde{R}_p$ максимален при всех $p\nmid m$ и $\widetilde{R}_p = \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p \\ p\mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p \end{pmatrix}$ при $p\mid m$. Через $\mu_{\widetilde{\mathfrak{U}}^*}$ обозначим меру Хаара на $\mathcal{D}_{\mathbb{A}}^1$, нормированную условием $\mu_{\widetilde{\mathfrak{U}}^*}(\widetilde{\mathfrak{U}}^*)=1$, где

$$\widetilde{\mathfrak{U}}^* = \{\, x\in\mathcal{D}_{\mathbb{A}}^1 \mid x_p\in\widetilde{R}_p^\times \text{ при всех } p<\infty \,\}.$$

В этом случае, как показал Эйхлер [8],

$$\int_{\mathcal{D}_{\mathbb{A}}^1/\mathcal{D}^\times} d\mu_{\widetilde{\mathfrak{U}}^*}(x) = \frac{1}{24}\prod_{p\mid d}(p-1)\prod_{p\mid m}(p+1)$$

Следовательно,

$$\int_{\mathcal{D}_{\mathbb{A}}^1/\mathcal{D}^\times} d\mu_{\mathfrak{U}}(x) = \frac{[\widetilde{\mathfrak{U}}^*:\mathfrak{U}]}{24}\prod_{p\mid d}(p-1)\cdot\prod_{p\mid m}(p+1) =$$

$$= \frac{\varphi(m')}{|\mathfrak{H}|}\,\frac{dm}{24}\prod_{p\mid d}\left(1-\frac{1}{p}\right)\prod_{p\mid m}\left(1+\frac{1}{p}\right) \tag{3.40}$$

поскольку при $r\geqslant 1$

$$\left[\begin{pmatrix} \mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p \\ p^r\mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p \end{pmatrix}^\times : \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p \\ p^{r+1}\mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p \end{pmatrix}^\times\right] = p.$$

Таким образом, вклад сингулярных элементов в формулу следа (2.34) равен второму слагаемому в правой части (3.1).

Теорема доказана.

Замечание 1. Пусть $\tilde{\mathfrak{S}}$ – произвольное подмножество $\mathfrak{S}$, являющееся объединением конечного числа двойных классов смежности по $\mathcal{U}$ и нормализуемое $\mathcal{U}^*$. Леммы 3.2 и 3.4 и их доказательства остаются справедливыми, если всюду заменить $\mathfrak{S}_j(n)$ на $\tilde{\mathfrak{S}}$ и произвести очевидные переобозначения связанных с $\mathfrak{S}_j(n)$ множеств.

Замечание 2. Формула следа (3.1) останется справедливой для операторов $T(1,p)$ (2.36), если в определении $\tilde{A}$ при $p=n$ в условиях теоремы 3.1 мы добавим условие $x \not\equiv 0 \pmod{p}$. Из замечания 1) следует, что единственное отличие в доказательстве соответствующей теоремы возникает лишь при рассмотрении оптимальных погружений в расщепимые компоненты при $p|m$.

Замечание 3. Если при некотором $p|dm$ представление $\pi_p \equiv 1$ и $\mathfrak{S}_p = R_p$, то формула следа (3.1) остается справедливой для операторов $T(n)$ при $p|n$.

Литература

1. Вейль А. Основы теории чисел. М., Мир, 1972, 408 с.
2. Deuring M. Algebren. New York, 1935, 143 p.
3. Фаддеев Д.К. Введение в мультипликативную теорию модулей целочисленных представлений. – Труды МИАН, 1965, 80, с.145–182.
4. Hijikata H. Explicit formula of the traces of Hecke operators for $\Gamma_0(N)$. – J.Math.Soc.Japan, 1974, 26, N 1, p. 56–82.
5. Higikata H., Saito H. On the representability of modular forms by theta-series. – Number theory, Algebraic Geometry and Commutative Algebra, a volume published in honour of Yasuo Akizuki, Tokyo, 1973.
6. Eichler M. Zur Zahlentheorie der Quaternionen-Algebren. – J.reine angew.Math., 1956, 195, Hf.3/4, p.127–151.
7. Eichler M. Quadratische Forusen und Modulfunktionen. – Acta Arithmetica, 1958, 4 N 1, p.23–27.
8. Eichler M. The Basis Problem for modular Forms and the Traces of the Hecke Operators. – In the volume; Modular Functions of one Variable I. Lecture Notes in Math. 320, 1972, Springer-Verlag, New York, p.73–151.