I. R. Shafarevich, Investigations on the theory of finite extensions,
Uspekhi Mat. Nauk, 1947, Volume 2, Issue 2, 223–226

ДИССЕРТАЦИИ

И. Р. Шафаревич

Исследования по теории конечных расширений (аннотация докторской диссертации*).

Задача об исследовании конечных расширений данного поля K является современной переформулировкой классической задачи о решении алгебраических уравнений. Вопросом о решении уравнений алгебраисты занимались ещё в XVI в. После того как Кардано и Феррари вывели формулы, выражающие корни уравнений 3-й и 4-й степени через их коэффициенты, в течение больше 2 веков не прекращались попытки найти аналогичные формулы для уравнений высших степеней.

Только в XIX в. Абель доказал, что не существует формулы, выражающей корни любого уравнения 5-й степени через его коэффициенты при помощи операций сложения, вычитания, умножения, деления и извлечения корня любой степени. Эта теорема, однако, не противоречила тому, что некоторые уравнения,—например двучленные сколь угодно высокой степени,—могут решаться в радикалах. Возникал вопрос о том, как узнать, может ли данное уравнение быть решено в радикалах. Да и корни тех уравнений, которые не могут быть решены в радикалах, представлялись тем более интересными.

Однако не только для исследования, но и для точной постановки всех возникающих здесь вопросов необходимо было по другому поставить самый вопрос о решении уравнений. Прежде всего нужно было точно очертить запас величин, которые можно считать известными и из которых нужно исходить при решении уравнения. Отсюда возникло понятие области рациональности или поля, которое встречается ещё у Абеля, но более точно определено Галуа. В настоящее время понятие поля**) определяется так: полем называется совокупность предметов a, b, c,..., для которых определены две операции, каждая из которых ставит в соответствие любым двум элементам a и b третий элемент— $a+b$ и $a \cdot b$, причём эти операции обладают обычными свойствами операций сложения и умножения для чисел, т. е. они коммутативны

*) Диссертация защищалась 13 июня 1946 г. в Учёном совете Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР. Официальные оппоненты: Н. Г. Чеботарёв, А. И. Мальцев и Д. К. Фаддеев.

**) Подробное изложение теории полей содержится в книге Ван-дер-Вардена «Современная алгебра», т. 1, гл. V.

и ассоциативны; возможно вычитание и деление не на 0 и сложение связано с умножением дистрибутивным законом.

С точки зрения теории полей, задача о решении уравнений ставится следующим образом—дано произвольное поле k и многочлен

$$f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n,$$

коэффициенты которого лежат в поле k; нельзя ли так включить поле k в бо́льшее поле K, чтобы в нём многочлен $f(x)$ имел корень?

Оказывается, что это всегда возможно и при некоторых очень естественных ограничениях даже единственным способом.

Поля, которые таким образом получаются, если исходить из любых многочленов $f(x)$ и повторять этот процесс несколько раз, и называются конечными расширениями поля k. Постепенно выяснилось, что основным объектом исследования в алгебре являются конечные расширения произвольного поля k, а уравнения перешли на роль вспомогательного средства.

Первый исследовал алгебраические свойства конечных расширений Галуа, хотя в его исследованиях многие факты высказывались ещё на языке уравнений. Ему удалось поставить в соответствие каждому конечному расширению K поля k некоторую конечную группу, называемую группой Галуа *) K, которая содержит в себе чрезвычайно много свойств расширения. При помощи этого понятия удалось, в частности, выяснить, когда данное уравнение может быть решено в радикалах, а когда—нет.

Однако группа Галуа далеко не определяет самого расширения K, и мы не знаем, каковы возможные группы Галуа расширений.

Таким образом вопрос о перечислении всех возможных конечных расширений поля k остаётся ещё далеко не решённым, однако возникающие здесь трудности чрезвычайно существенно зависят от группы Галуа.

В настоящее время очень подробно исследован частный случай расширений с коммутативными группами Галуа. В зависимости от того, какое основное поле k мы берём, получаются различные теории. Получены теории, дающие полное перечисление всех конечных расширений с коммутативными группами Галуа, если за поле k взято поле рациональных функций от одной комплексной переменной или его конечное расширение (теория абелевых функций), поле рациональных чисел или его конечное расширение (теория полей классов), поле p-адических чисел (локальная теория полей классов).

В реферируемой диссертации исследуются уже расширения, группы Галуа которых некоммутативны. Именно, рассматриваются расширения, группы Галуа которых имеют порядком степень некоторого простого числа p. Такие группы называются p-группами и расширения — p-расширениями.

Первым полем k, p-расширения которого исследуются, является поле p-адических чисел. Это поле, впервые рассмотренное в алгебре около 50 лет назад, с тех пор играет всё бо́льшую роль в самых различных алгебраических вопросах.

---

*) Ван-дер-Варден, Современная алгебра, т. 1, гл. VII.

Определяется поле p-адических чисел следующим образом: всякое целое число может быть записано единственным образом в виде

$$a_0 + a_1 p + \ldots + a_n p^n, \quad \text{где} \quad 0 \leqslant a_i < p.$$

Расширим теперь область целых чисел, рассмотрев ещё выражение вида $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k p^k$, действия над которыми определим совершенно аналогично действиям над целыми числами. Например, при сложении мы будем складывать соответствующие коэффициенты a_i, а если получатся числа больше p, то кратность p будем относить к следующим членам. Эти новые символы образуют область целостности и называются целыми p-адическими числами. Поле отношений этой области целостности называется полем рациональных p-адических чисел, а самые элементы поля — p-адическими числами *). Любое конечное расширение поля p-адических чисел также называется полем p-адических чисел.

В диссертации за поле k берётся любое поле p-адических чисел, которое не содержит корней степени p из единицы, отличных от единицы. Для таких полей k полное перечисление их p-расширений получается в терминах теории бесконечных групп следующим образом: пусть k является расширением поля рациональных p-адических чисел степени n_0. Обозначим через γ свободную группу с $n_0 + 1$ образующей **). Перечисление всех p-расширений поля k достигается путём установления взаимно однозначного соответствия между этими расширениями и нормальными делителями группы γ, индексы которых суть степени p.

Это соответствие обладает тем свойством, что если p-расширению K_1 соответствует нормальный делитель N_1, а K_2 соответствует N_2, то из $K_1 \supset K_2$ следует $N_1 \supset N_2$ и наоборот. Группа Галуа K_1 оказывается изоморфной γ / N_1.

Это перечисление является основным результатом той части диссертации, которая относится к теории p-адических полей. При помощи его вопросы о p-расширениях поля k сводились к вопросам о нормальных делителях свободной группы γ. Отсюда уже теоретико-групповыми рассуждениями оказалось возможным вывести ряд конкретных свойств p-расширений.

В качестве примера приведём следующий результат: пусть дана p-группа $\mathfrak{G}$, минимальное число образующих которой есть α, а порядок — p^n; над полем k существует расширение с группой Галуа $\mathfrak{G}$ тогда и только тогда, когда $\alpha \leqq n_0 + 1$ и число таких расширений равно:

$$\frac{1}{\varkappa} p^{(n_0+1)(n-\alpha)} (p^{n_0+1} - 1)(p^{n_0+1} - p) \ldots (p^{n_0+1} - p^{\alpha-1}).$$

Здесь $\varkappa$ обозначает число автоморфизмов группы $\mathfrak{G}$.

Другая часть диссертации относится к теории неразветвлённых p-расширений полей алгебраических функций характеристики p. Здесь, как

*) Более подробно построение и свойства p-адических чисел описаны в книге H. Weyl, Algebraic Theory of Numbers, гл. III.

**) Определение свободных групп см. в книге: А. Г. Курош, Теория групп, гл. III, § 13.

и в первой части, речь идёт о перенесении результатов, полученных раньше для расширений с коммутативной группой Галуа, на расширения с некоммутативной группой Галуа. Методы, применяемые в теории p-адических полей, оказываются применимыми и в этой области, в частности, описание полей опять производится при помощи нормальных делителей некоторой свободной группы. Однако доказательства заметно усложняются в связи с арифметическим характером вопроса.

Заключительная часть работы посвящена одному вопросу теории p-адических полей, однако уже не p-расширений. Этот вопрос примыкает к локальной теории полей классов, но относится уже к теории расширений с некоммутативной группой Галуа.

На основании локальной теории полей классов всякое абелево расширение K поля p-адических чисел k задаётся группой по умножению H, состоящей из элементов поля k. В работе рассматривается случай, когда само k является расширением некоторого меньшего поля R и находится группа Галуа поля K как расширения R, если известно поле k и в нём группа H, определяющая расширение K. Вопрос решается при помощи применения теории алгебр.

Г. С. Салехов

К проблеме Коши для линейных уравнений с частными производными в области бесконечно дифференцируемых функций (аннотация докторской диссертации)*)

Работа посвящена изучению проблемы Коши для общих линейных уравнений с бесконечно дифференцируемыми, в общем случае, неаналитическими начальными данными.

Известно, что аналитическая теория так называемых нормальных систем уравнений в частных производных для задачи Коши, начиная со знаменитой теоремы С. Ковалевской, в локальном смысле достаточно полно разработана многими авторами. Между тем в III главе своей классической работы С. Ковалевская ещё в 1875 г. указывала на то обстоятельство, что если в аналитической системе уравнений в частных производных

$$\frac{\partial^{n_i} Z_i}{\partial t^{n_i}} = F_i\left(t, x_1, x_2, \ldots, x_s; Z_1, Z_2, \ldots, Z_N; \ldots \frac{\partial^{k_0+k_1+\ldots+k_s} Z_k}{\partial t^{k_0}\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_s^{k_s}} \ldots\right)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, N),$$

где $n_i > k_0$, и условие $n_i \geqslant \sum_{v=0}^{s} k_v$ не выполнено, то хотя формальные решения этой «анормальной» системы для произвольных аналитических начальных данных Коши можно составить, они, вообще говоря, не будут сходиться. В 1897 г. на это же обстоятельство обращает внимание Рикье. Классический метод мажорант, хорошо применимый для общих нормальных уравнений в вышеуказанном случае, оказывается уже бессильным.

*) Диссертация защищалась в Учёном совете Казанского государственного университета им. В. И. Ленина 1946 г. Официальные оппоненты — Б. М. Гагаев, Л. А. Люстерник, Н. С. Пискунов.