Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

J. A. Lappo-Danilevski, Théorie algorithmique des corps de Riemann,
Mat. Sb., 1927, Volume 34, Number 2, 113–148

https://www.mathnet.ru/eng/sm7440

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
https://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 18.97.14.83
December 6, 2025, 00:33:48

Théorie algorithmique des corps de Riemann.

(Première communication).

Par M. J. A. Lappo-Danilevski (Leningrad).

I. Problèmes fondamentaux.

§ 1.

Considérons un système de m coupures: $(a_1\,\infty)(a_2\,\infty),\ldots\,(a_m\,\infty)$, joignant le point à l'infini à m points fixes $a_1, a_2, \ldots, a_m$. En faisant correspondre à chaque point a_j une substitution linéaire du degré n: $V_j = \| v_{kl}^{(j)} \|$ $(j = 1, 2, \ldots m)$, nous recevons un système de m substitutions, „*localisées* aux points a_j". Nous désignons sous le nom de „système des fonctions, appartenant au *corps de Riemann*:

$$S\begin{pmatrix} V_1 V_2 \ldots V_m \\ a_1 a_2, \ldots, a_m \end{pmatrix}", \tag{1}$$

chaque système de n fonctions analytiques:

$$f_1(x),\quad f_2(x), \ldots, f_n(x), \tag{2}$$

satisfaisant aux conditions suivantes:

1°. dans le domaine E_∞, qu'on obtient du plan de la variable x, en excluant les points, appartenant aux coupures $(a_j\infty)$, les fonctions (2) sont uniformes et holomorphes;

2°. aux bords de chaque coupure $(a_j\,\infty)$ [1]) subsistent les relations:

$$f_k(x) = v_{k1}^{(j)} \overset{+}{f_1}(x) + v_{k2}^{(j)} \overset{+}{f_2}(x) + \cdots + v_{kn}^{(j)} \overset{+}{f_n}(x);\ k = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, m. \tag{3}$$

Le corps (1), traité comme un ensemble de tous les systèmes (2) des fonctions indiquées, est ainsi complètement déterminé par un système des substitutions localisées: V_1, $V_2, \ldots,$ V_m, que nous nommons „*substitutions intégrales*" de ce corps.

---

[1]) En suivant le long de la coupure (a_j, ∞) du point a_j vers l'infini, on a le bord positif à côté gauche.

Nous désignons sous le nom de „*base*“ du corps (1) chaque matrice propre [1]) de n^2 fonctions analytiques:

$$\Psi\left(\begin{matrix} V_1 V_2 \ldots V_m \\ a_1 a_2 \ldots, a_m \end{matrix} \middle| x\right) = \| \Psi_{kl}(x) \| \tag{4}$$

qui est uniforme [2]) dans le domaine E_∞ et satisfait aux bords de chaque coupure $(a_j \infty)$ aux relations:

$$\Psi\left(\begin{matrix} V_1 V_2 \ldots, V_m \\ a_1 a_2 \ldots, a_m \end{matrix} \middle| \overset{-}{x}\right) = V_j \cdot \Psi\left(\begin{matrix} V_1 V_2 \ldots, V_m \\ a_1 a_2 \ldots, a_m \end{matrix} \middle| \overset{+}{x}\right). \tag{5}$$

Si, de plus, étant fixé un point b, on a:

$$\Psi\left(\begin{matrix} V_1 V_2 \ldots, V_m \\ a_1 a_2 \ldots a_m \end{matrix} \middle| b\right) = I \text{ [3])},$$

la base (4) est dite „*normale*“ en ce point [4]).

Chaque système des combinaisons linéaires des fonctions de la base (4):

$$f_k(x) = \psi_{k1}(x) g_1(x) + \psi_{k2}(x) g_2(x) + \cdots + \psi_{kn}(x) g_n(x); \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{6}$$

à coefficients $g_1(x)$, $g_2(x), \ldots g_n(x)$ uniformes dans tout le plan, forme évidemment un système des fonctions, appartenant au corps (1). Réciproquement, chaque fonction du système arbitraire (2), appartenant au corps (1), peut être mise sous forme (6) d'une combinaison linéaire des fonctions de la base, à coefficients uniformes dans tout le plan.

En effet, étant donné un système arbitraire (2) du corps (1) et une base arbitraire (4) de ce corps, nous déterminons n fonctions:

$$g_l(x) = \frac{|\psi_{k1}(x), \ldots, \psi_{kl-1}(x), f_k(x), \psi_{kl+1}(x), \ldots, \psi_{kn}(x)|}{|\psi_{k1}(x), \ldots, \psi_{kl-1}(x), \psi_{kl}(x), \psi_{kl+1}(x), \ldots, \psi_{kn}(x)|}; \quad l = 1, 2, \ldots n,$$

satisfaisant aux rélations (6). En vertu des conditions (3) et (5), nous avons aux bords de chaque coupure $(a_j \infty)$ les relations:

$$g_l(\overset{-}{x}) = \frac{|v_{k1}^{(j)} v_{k2}^{(j)}, \ldots v_{kn}^{(j)}| \cdot |\psi_{k1}(\overset{+}{x}), \ldots, \psi_{kl-1}(\overset{+}{x}), f_k(\overset{+}{x}), \psi_{kl+1}(\overset{+}{x}), \ldots, \psi_{kn}(\overset{+}{x})|}{|v_{k1}^{(j)} v_{k2}^{(j)}, \ldots v_{kn}^{(j)}| \cdot |\psi_{k1}(\overset{+}{x}), \ldots, \psi_{kl-1}(\overset{+}{x}), \psi_{kl}(\overset{+}{x}), \psi_{kl+1}(\overset{+}{x}), \ldots, \psi_{kn}(\overset{+}{x})|} = g_l(\overset{+}{x}).$$

Il en suit, que toutes les fonctions $g_l(x)$ sont uniformes dans tout le plan.

---

[1]) Nous désignons sous le nom de „m a t r i c e p r o p r e“ chaque matrice dont le déterminant est différent de zéro identique.

[2]) Chaque matrice dont les éléments sont des fonctions uniformes de x nous désignons sous le nom d'une „matrice uniforme“.

[3]) Nous désignons par I la matrice identique dont tous les éléments sont nuls, sauf aux éléments diagonaux qui sont égaux à l'unité.

[4]) Cette terminologie présente une généralisation de la terminologie, introduite par M. D e d e k j n d dans la théorie des fonctions algébriques.

Par conséquent, chaque base du corps (1) détermine complètement le caractère de la ramification de tous les systèmes des fonctions, appartenant à ce corps.

Etant fixée une base (4) du corps (1) et une matrice arbitraire propre $G(x) = \| g_{kl}(x) \|$, uniforme dans tout le plan, chaque matrice:

$$\overset{*}{\Psi}\left(\begin{matrix} V_1 V_2, \ldots, V_m \\ a_1 a_2 \ldots, a_m \end{matrix}\middle| x\right) = \Psi\left(\begin{matrix} V_1 V_2, \ldots, V_m \\ a_1\ a_2, \ldots, a_m \end{matrix}\middle| x\right) \cdot G(x) \tag{7}$$

représente évidemment de même une base de ce corps. Réciproquement, chaque base $\overset{*}{\Psi}\left(\begin{matrix} V_1 V_2, \ldots, V_m \\ a_1 a_2 \ldots a, \ _m \end{matrix}\middle| x\right)$ du corps (1) peut être mise sous la forme (7), d'une composition d'une base fixe avec une matrice propre uniforme dans tout le plan, car aux bords de chaque coupure $(a_j\, \infty)$ subsistent les relations:

$$\Psi\left(\begin{matrix} V_1 V_2, \ldots V_m \\ a_1 a_2 \ldots a_m \end{matrix}\middle| \overset{-}{x}\right)^{-1} \overset{*}{\Psi}\left(\begin{matrix} V_1 V_2 \ldots V_m \\ a_1 a_2 \ldots a_m \end{matrix}\middle| x\right) =$$

$$= \Psi\left(\begin{matrix} V_1 V_2 \ldots V_m \\ a_1 a_2 \ldots a_m \end{matrix}\middle| \overset{+}{x}\right)^{-1} V_j^{-1} V_j \overset{*}{\Psi}\left(\begin{matrix} V_1 V_2 \ldots V_m \\ a_1 a_2 \ldots a_m \end{matrix}\middle| \overset{+}{x}\right) =$$

$$= \Psi\left(\begin{matrix} V_1 V_2 \ldots V_m \\ a_1 a_2 \ldots a_m \end{matrix}\middle| \overset{+}{x}\right)^{-1} \overset{*}{\Psi}\left(\begin{matrix} V_1 V_2 \ldots V_m \\ a_1 a_2 \ldots a_m \end{matrix}\middle| \overset{+}{x}\right),$$

et la matrice $\Psi\left(\begin{matrix} V_1 V_2 \ldots V_m \\ a_1 a_2 \ldots a_m \end{matrix}\middle| x\right)^{-1} \overset{*}{\Psi}\left(\begin{matrix} V_1 V_2 \ldots V_m \\ a_1 a_2 \ldots a_m \end{matrix}\middle| x\right)$ est uniforme dans tout le plan.

Etant fixée une base arbitraire (4) du corps (1), chaque système des fonctions: $\frac{d\psi_{1l}(x)}{dx}, \frac{d\psi_{2l}(x)}{dx}, \ldots, \frac{d\psi_{nl}(x)}{dx}$ forme évidemment un système, appartenant à ce corps. En vertu des considérations précédentes, il existe une matrice $P(x) = \| P_{kl}(x) \|$, uniforme dans tout le plan et telle que:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\psi_{kl}(x)}{dx} = \psi_{k1}(x) P_{1l}(x) + \psi_{k2}(x) P_{2l}(x) + \cdots + \psi_{kn}(x) P_{nl}(x) \\ \text{ou} \quad & \\ &\frac{d}{dx} \Psi\left(\begin{matrix} V_1 V_2 \ldots V_m \\ a_1 a_2 \ldots a_m \end{matrix}\middle| x\right) = \Psi\left(\begin{matrix} V_1 V_2 \ldots V_m \\ a_1 a_2 \ldots a_m \end{matrix}\middle| x\right) . P(x). \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Par conséquent, chaque base (4) satisfait à un système d'équations différentielles linéaires de la forme (8), à coefficients uniformes dans tout le plan.

Nous allons désigner sous le nom de base „*régulière*“ du corps (1) chaque base (4) de ce corps qui satisfait à un système régulier d'équations (8)

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\psi_{kl}(x)}{dx} = \sum_{r=1}^{n} \psi_{kr}(x) \sum_{j=1}^{m} \frac{u_{rl}^{(j)}}{x - a_j} \\ \text{ou} \quad & \\ &\frac{d}{dx} \Psi\left(\begin{matrix} V_1 V_2 \ldots V_m \\ a_1 a_2 \ldots a_m \end{matrix}\middle| x\right) = \Psi\left(\begin{matrix} V_1 V_2 \ldots V_m \\ a_1 a_2 \ldots a_m \end{matrix}\middle| x\right) \sum_{j=1}^{m} \frac{U_j}{x - a_j}, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

les coefficients $u_{kl}^{(j)}$ $[k, l = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, m]$ étant indépendants de x [1]). Ces coefficients forment un système de m substitutions: $U_j = \| u_{kl}^{(j)} \|$, que nous allons nommer „système des *substitutions différentielles*“ de la base (4), localisées respectivement aux points a_j. Nous allons dire que le système des substitutions localisées $U_1, U_2, \ldots, U_m$ est un système des substitutions différentielles du corps (1), s'il existe une base régulière (4), appartenant à ce corps, telle que les substitutions $U_1, U_2, \ldots, U_m$ forment le système des substitutions différentielles de cette base.

Etant donné un système des substitutions différentielles U_j du corps (1), localisées respectivement aux points $a_j [j = 1, 2, \ldots, m]$, la condition nécessaire et suffisante, pour que les substitutions $\overset{*}{U}_j$, localisées aux mêmes points, forment de même un sytème des substitutions différentielles de ce corps, est la suivante:

il existe une matrice propre $G(x)$, uniforme dans tout le plan et telle que

$$\frac{dG}{dx} = \sum_{j=1}^{m} \frac{G\overset{*}{U}_j - U_j G}{x - a_j} \text{ [2])}. \tag{10}$$

En effet, si les substitutions U_j et $\overset{*}{U}_j$ forment deux systèmes des substitutions différentielles du même corps (1), les deux bases régulières Ψ et $\overset{*}{\Psi}$ de ce corps identifient les équations:

$$\frac{d\Psi}{dx} = \Psi \sum_{j=1}^{m} \frac{U_j}{x - a_j}; \tag{11}$$

$$\frac{d\overset{*}{\Psi}}{dx} = \overset{*}{\Psi} \sum_{j=1}^{m} \frac{\overset{*}{U}_j}{x - a_j}. \tag{12}$$

Or, en vertu de la relation (7), il existe une matrice propre uniforme G, telle que $\overset{*}{\Psi} = \Psi G$. Par conséquent, conformément aux inégalités (12) et (11), on reçoit:

$$\frac{d\Psi}{dx} G + \Psi \frac{dG}{dx} = \Psi G \sum_{j=1}^{m} \frac{\overset{*}{U}_j}{x - a_j} \quad \text{et} \quad \Psi \frac{dG}{dx} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\Psi G \overset{*}{U}_j - \Psi U_j G}{x - a_j}.$$

Réciproquement, en tenant compte de l'égalité (11), de la condition (10) on remonte à la relation:

$$\frac{d}{dx}(\Psi G) = \Psi G \sum_{j=1}^{m} \frac{\overset{*}{U}_j}{x - a_j}.$$

---

[1]) Le corps de Riemann étant donné par un système arbitraire des substitutions intégrales, l'existence d'une base régulière suit immédiatement des recherches de M. Plemelj [Monatshefte für Mathematik und Physik; Bd 19; 1908; p. 244].

[2]) La condition (10) peut être remplacée par la condition:

$$\frac{dG}{dx} = \sum_{j=1}^{m} \frac{G U_j - \overset{*}{U}_j G}{x - a_j},$$

car de l'égalité (10) il résulte:

$$-G^{-1} \frac{dG}{dx} G^{-1} = \frac{dG^{-1}}{dx} = \sum_{j=1}^{m} \frac{G^{-1} U_j - \overset{*}{U}_j G^{-1}}{x - a_j}.$$

Il existe évidemment une infinité de systèmes des substitutions différentielles, appartenant au même corps. En particulier, si les substitutions $U_1, U_2, \ldots, U_m$ forment un système des substitutions différentielles du corps (1), les substitutions $C^{-1}U_1C$, $C^{-1}U_2C, \ldots C^{-1}U_mC$, C étant une matrice propre arbitraire, représentent aussi un système des substitutions différentielles de ce corps [1]).

Un système donné des substitutions différentielles U_j, localisées aux points a_j, par le système fondamental

$$\Phi_b\left(\begin{matrix} U_1 U_2 \ldots U_m \\ a_1 a_2 \ldots a_m \end{matrix}\middle| x\right) \tag{13}$$

des intégrales des équations (9), traité comme base régulière et normale au point fixe b, détermine complètement, à son tour, un corps de Riemann:

$$R_b\left(\begin{matrix} U_1 U_2 \ldots U_m \\ a_1 a_2 \ldots a_m \end{matrix}\right) = S\left(\begin{matrix} V_1 V_2 \ldots V_m \\ a_1 a_2 \ldots a_m \end{matrix}\right), \tag{14}$$

car le système correspondant des substitutions intégrales V_j, localisées aux points a_j, est ainsi bien défini. Nous désignons la base (13) sous le nom de „*base fondamentale*“ du corps (14). Il est évident, que tous les corps (14), déterminés par le système des substitutions différentielles $U_1, U_2, \ldots, U_m$, se présentent sous la forme:

$$S\left(\begin{matrix} CV_1C^{-1}, & CV_2C^{-1}, & \ldots . & CV_mC^{-1} \\ a_1 & a_2 & \ldots . & a_m \end{matrix}\right).$$

§ 2.

Au point de vue, exposé dans le paragraphe précédent, le fondement de la théorie algorithmique des corps de Riemann est constitué par deux algorithmes suivants:

A. l'algorithme de la construction de toutes les bases et du système des substitutions intégrales du corps de Riemann (14), défini par un système donné des substitutions différentielles localisées;

B. l'algorithme de la construction de toutes les bases et de tous les systèmes des substitutions différentielles du corps de Riemann (1), défini par un système donné des substitutions intégrales localisées.

Le problème de la détermination des coefficients $v_{kl}^{(j)}$ des substitutions V_j en fonctions des coefficients $u_{kl}^{(j)}$ des équations (9) a été posé la première fois par Henri Poincaré dans son mémoire célèbre: „Sur les groupes des équations linéaires“ [2]). L'éminent géomètre a établi, que les coefficients $v_{kl}^{(j)}$ sont des fonctions entières des coefficients $u_{kl}^{(j)}$, sans donner aucune expression explicite de ces fonctions. Les démonstrations directes du théorème de Poincaré ont été présentées par M. M. Picard [3]) et Schlesinger [4]).

---

1) On pose $G = C$ dans la condition (10).

2) Acta mathematica, t. 4, 1884, ou „Oeuvres“, t. II, 1916; p. 310.

3) „Traité d'analyse“, t. III, 1908; p. 306.

4) „Einführung in die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen auf funktionentheoretischer Grundlage“, 1922; p. 301.

C'est *l'algorithme de la construction effective* des substitutions V_j qui manque encore dans cette théorie. Cet algorithme, ainsi que l'algorithme de la construction des bases qui n'est d'ailleurs autre chose, que l'algorithme systématisé des approximations successives, se trouvent établis dans les théorèmes I et II (§ 7) de cette communication.

Le problème **B** se rattache immédiatement au problème bien connu de Riemann, concernant la construction d'un système des fonctions, admettant un groupe de monodromie donné, car, en vertu des considérations du paragraphe précédent, chaque base (4) du corps (1) nous donne les expressions explicites (6) de tous les systèmes des fonctions, admettant le groupe de monodromie, produit par les substitutions $V_1, V_2, \ldots, V_m$.

Le fait de l'existence des systèmes des fonctions, admettant un groupe de monodromie donné, a été établi par M. M. Hilbert [1]) et Plemelj [2]) — à l'aide des méthodes de la théorie des équations intégrales, par M. Birkhoff [3]) — au moyen d'une méthode des approximations successives — et par M. M. Schlesinger [4]) et Garnier [5]) — à l'aide des méthodes de la théorie des équations différentielles.

Cependant, dans la littérature, concernant la question, nous ne trouvons *aucune résolution algorithmique* du problème de Riemann, donnant les *expressions explicites* des fonctions cherchées. Certaines restrictions admises, nous établissons les algorithmes de la résolution du problème de Riemann dans les théorèmes III, IV, V et VII de cette communication. Les algorithmes des théorèmes III, IV et V (§§ 8 — 9) sont applicables, si les écarts des substitutions données de la substitution identique sont bornés. Les théorèmes VI et VII (§ 11) donnent les expressions explicites sous la forme finie des bases et des substitutions cherchées dans le cas, si l'un des deux groupes — produit par les substitutions intégrales, ou produit par des substitutions différentielles — est commutatif.

II. Fonctions analytiques des substitutions linéaires.

§ 3.

Les éléments donnés ainsi que les éléments cherchés des problèmes **A** et **B**, posés dans le paragraphe précédent, sont des substitutions linéaires du degré fixe n. Par conséquent, c'est la notion de la relation fonctionnelle dans le domaine des substitutions linéaires qui présente le fondement logique de l'analyse des problèmes indiqués.

Dans cette exposition primordiale de la théorie des fonctions analytiques des substitutions linéaires nous nous bornerons à établir quelques notions élémentaires, suffisant pour fonder les algorithmes principaux de la théorie des corps de Riemann.

Nous traitons chaque substitution linéaire X du dégré n $X = \| \{X\}_{kl} \|$ comme un système de n^2 éléments $\{X\}_{kl}$ qui sont des nombres complexes. Chaque nom-

---

1) Gött. Nachr. 1905, S. 307 und ff.; „Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen", 1912, S. 81.

2) Loc. cit.

3) Proceedings of the American Academy of arts and sciences. 1913, t. 49, p. 521.

4) Loc. cit.

5) C. R. 1925, t. 181, p. 1046.

bre ξ peut être traité comme une substitution $\xi = X$ aux éléments $\{X\}_{kk} = \xi$, $\{X\}_{kl} = 0$ pour $k \neq l$ [1]). Chaque substitution X dont le déterminant $D(X)$ est nul nous nommons „substitution impropre". Nous désignons par $X = \| \xi \|$ chaque substitution impropre aux éléments $\{X\}_{kk} = \{X\}_{kl} = \xi$. Zéro est évidemment une substitution impropre telle que $\| 0 \| = 0$. Nous désignons par $| X |$ la substitution dont les éléments sont les modules $| \{X\}_{kl} |$ des éléments de la substitution X; ainsi: $\{ | X | \}_{kl} = | \{X\}_{kl} |$; $k, l = 1, 2, \ldots, n$. Posons les n^2 relations de la forme: $\{ | X | \}_{kl} < \{ | Y | \}_{kl}$ ou $\{ | X | \}_{kl} \leqslant \{ | Y | \}_{kl}$ équivalentes à une seule relation $| X | < | Y |$ ou resp. $| X | \leqslant | Y |$. Nommons „voisinage" des substitutions $X_1^0 X_2^0, \ldots, X_m^0$ le domaine de toutes les substitutions X_1, X_2, X_m telles que $| X_j - X_j^0 | < \| \varrho_j \|$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$, ou $| X_1 - X_1^0 | + | X_2 - X_2^0 | + \cdots + | X_m - X_m^0 | < \| \varrho \|$, ϱ_j et ϱ étant des nombres positifs.

Ces notations admises, les définitions usuelles des opérations rationnelles dans le domaine des substitutions linéaires du degré n sont présentées par les formules suivantes:

$$\{X \pm Y\}_{kl} = \{X\}_{kl} \pm \{Y\}_{kl}; \quad \{XY\}_{kl} = \sum_{r=1}^{n} \{X\}_{kr} \{Y\}_{rl};$$

$$\left\{ \frac{1}{X} \right\}_{kl} = \{X^{-1}\}_{kl} = \frac{D_{lk}(X)}{D(X)}; \quad k, l = 1, 2, \ldots, n,$$

où dans le dernier cas la substitution X n'est pas impropre et $D_{lk}(X)$ est le complément algébrique du déterminant $D(X)$ [2]). En posant équivalentes les n^2 relations de la forme: $\lim\limits_{\mu \to \infty} \{X_\mu\}_{kl} = \{X\}_{kl}$ à une seule relation: $\lim\limits_{\mu \to \infty} X_\mu = X$, nous complétons les définitions précédentes par la définition du passage à la limite dans le domaine des substitutions. L'équivalence de n^2 relations de la forme

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} \{X_\mu\}_{kl} = \{X\}_{kl}$$

à une seule relation

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} X_\mu = X$$

donne la définition de la convergence des séries des substitutions.

Considérons maintenant m substitutions variables $X_1, X_2, \ldots, X_m$ aux éléments variables, m substitutions constantes $X_1^0, X_2^0, \ldots, X_m^0$ aux éléments constants et un système des constantes numériques $\alpha_0, \alpha_{j_1, j_2, \ldots, j_\nu}$ $(j_1, j_2, \ldots, j_\nu = 1, 2, \ldots, m;\ \nu = 1, 2, 3, \ldots)$. Les n^2 expressions

$$\{P_\mu(X_1, X_2, \ldots, X_m)\}_{kl} =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\mu\,(1,2,\ldots,m)} \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_\nu} \{(X_{j_1} - X_{j_1}^0)(X_{j_2} - X_{j_2}^0) \ldots (X_{j_\nu} - X_{j_\nu}^0)\}_{kl} \alpha_{j_1, j_2, \ldots, j_\nu}, \qquad (15)$$

où la composition: $\{(X_{j_1} - X_{j_1}^0)(X_{j_2} - X_{j_2}^0) \ldots (X_{j_\nu} - X_{j_\nu}^0)\}_{kl} \alpha_{j_1, j_2, \ldots, j_\nu}$ est égale à α_0

---

[1]) Nous conservons néanmoins parfois la notion usuelle I pour la substitution identique.

[2]) On a évidemment: $X \frac{1}{X} = \frac{1}{X} X = I$.

pour $\nu = 0$ et chaque somme $\sum\limits_{j_1, j_2, \ldots, j_\nu}^{(1,2,\ldots,m)}$ contient m^ν membres, qu'on obtient en faisant les indices $j_1, j_2, \ldots, j_\nu$ parcourir indépendamment les valeurs $1, 2, \ldots, m$, sont les éléments de la substitution:

$$P_\mu(X_1, X_2, \ldots, X_m) = \sum_{\nu=0}^{\mu} \sum_{j_1, j_2 \ldots j_\nu}^{(1,2,\ldots,m)} (X_{j_1} - X_{j_1}^0)(X_{j_2} - X_{j_2}^0) \ldots (X_{j_\nu} - X_{j_\nu}^0) \alpha_{j_1, j_2, \ldots, j_\nu},$$

qu'on peut traiter comme un polynome des substitutions variables $X_1, X_2, \ldots X_m$.

En faisant tendre μ vers l'infini, sous la condition de l'existence de n^2 limites

$$\{F(X_1, X_2, \ldots, X_m)\}_{kl} =$$
$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{j_1, j_2 \ldots j_\nu}^{(1,2,\ldots,m)} \{(X_{j_1} - X_{j_1}^0)(X_{j_2} - X_{j_2}^0) \ldots (X_{j_\nu} - X_{j_\nu}^0)\}_{kl} \alpha_{j_1, j_2, \ldots, j_\nu}, \qquad (16)$$

la substitution

$$F(X_1, X_2, \ldots, X_m) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{j_1 j_2 \ldots j_\nu}^{(1,2,\ldots,m)} (X_{j_1} - X_{j_1}^0)(X_{j_2} - X_{j_2}^0) \ldots (X_{j_\nu} - X_{j_\nu}^0) \alpha_{j_1, j_2, \ldots, j_\nu}, \qquad (17)$$

dont les éléments sont définis par les expressions (16), peut être traitée comme une *fonction analytique des substitutions* $X_1, X_2, \ldots, X_m$ [1]). Les expressions:

$$\{(X_{j_1} - X_{j_1}^0)(X_{j_2} - X_{j_2}^0) \ldots (X_{j_\nu} - X_{j_\nu}^0)\}_{kl}$$

sont les polynomes des éléments

$$\{X_j - X_j^0\}_{kl} \quad [j = 1, 2, \ldots, m;\ k, l = 1, 2, \ldots, n]$$

des substitutions $X_j - X_j^0$ à coefficients entiers positifs, car, conformément aux formules (15), ces polynomes sont définis par les relations de récurrence:

$$\{(X_{j_1} - X_{j_1}^0)(X_{j_2} - X_{j_2}^0) \ldots (X_{j_{\nu-1}} - X_{j_{\nu-1}}^0)(X_{j_\nu} - X^0{}_{j_\nu})\}_{kl} =$$
$$= \sum_{r=1}^{n} \{(X_{j_1} - X_{j_1}^0)(X_{j_2} - X_{j_2}^0) \ldots (X_{j_{\nu-1}} - X_{j_{\nu-1}}^0)\}_{kr} \{X_{j_\nu} - X_{j_\nu}^0\}_{rl}.$$

Il en suit que:

$$|(X_{j_1} - X_{j_1}^0) \cdot (X_{j_2} - X_{j_2}^0) \ldots (X_{j_\nu} - X_{j_\nu}^0)| \leqslant |X_{j_1} - X_{j_1}^0| . |X_{j_2} - X_{j_2}^0| \ldots |X_{j_\nu} - X_{j_\nu}^0| .$$

---

[1]) On peut définir la notion de la fonction analytique des substitutions linéaires plus généralement, en posant:

$$F(X_1, X_2, \ldots, X_m) =$$
$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{j_1 j_2 \ldots j_\nu}^{(1,2,\ldots,m)} A^{(0)}_{j_1, j_2, \ldots, j_\nu} (X_{j_1} - X_{j_1}^0) A^{(1)}_{j_1, j_2, \ldots, j_\nu} (X_{j_2} - X_{j_2}^0) \ldots A^{(\nu-1)}_{j_1, j_2, \ldots, j_\nu} (X_{j_\nu} - X_{j_\nu}^0) A^{(\nu)}_{j_1, j_2, \ldots, j_\nu},$$

où A sont des *substitutions* constantes. Cette généralisation est, par exemple, indispensable, si l'on veut considérer les „prolongements analytiques" des séries de la forme (17). Cependant, le cas traité dans le texte est suffisant pour l'exposition primordiale de la théorie des corps de Riemann.

Le nombre positif ε étant si petit que l'on veut, la valeur

$$n^{\nu-1}(\varrho_{j_1}-\varepsilon)\ (\varrho_{j_2}-\varepsilon)\ldots(\varrho_{j_\nu}-\varepsilon)$$

des élements de la dernière substitution pour $|X_j - X_j^0| = \|\varrho_j - \varepsilon\|$ est au moins égale à ses valeurs pour $|X_j - X_j^0| \leqslant \|\varrho_j - \varepsilon\|$. Par conséquent, la série

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{j_1,j_2,\ldots,j_\nu}^{(1,2,\ldots,m)} n^{\nu-1}(\varrho_{j_1}-\varepsilon)\ (\varrho_{j_2}-\varepsilon)\ldots(\varrho_{j_\nu}-\varepsilon)\,|\alpha_{j_1,j_2,\ldots,j_\nu}| \tag{18}$$

étant convergente, les n^2 séries

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{j_1,j_2,\ldots j_\nu}^{(1,2,\ldots,m)} \{|X_{j_1}-X_{j_1}^0|.|X_{j_2}-X_{j_2}^0|\ldots|X_{j_\nu}-X_{j_\nu}^0|\}_{kl}\,|\alpha_{j_1,j_2,\ldots,j_\nu}|\,, \tag{19}$$

ainsi que n^2 séries (16) sont convergentes dans tout le domaine des substitutions:

$$|X_j - X_j^0| < \|\varrho_j\| \qquad j=1,2,\ldots,m. \tag{20}$$

Sous la condition de la convergence de la série (18), nous traitons la série (17) comme une „*série des compositions*", représentant la fonction analytique $Y = F(X_1, X_2,\ldots, X_m)$ des substitutions $X_1, X_2,\ldots,X_m$, „*holomorphe*" dans le voisinage (20) des substitutions $X_1^0, X_2^0,\ldots, X_m^0$.

En désignant par $|\alpha^{(\nu)}|$ le plus grand des modules $|\alpha_{j_1,j_2,\ldots,j_\nu}|$ et en remarquant que:

$$\sum_{j_1,j_2,\ldots,j_\nu}^{(1,2,\ldots,m)} |X_{j_1}-X_{j_1}^0|.|X_{j_2}-X_{j_2}^0|\ldots|X_{j_\nu}-X_{j_\nu}^0| =$$
$$=(|X_1-X_1|+|X_2-X_2|+\cdots+|X_m-X_m|)^\nu,$$

on conclut, que la convergence de la série

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} n^\nu(\varrho-\varepsilon)^\nu\,|\alpha^{(\nu)}| \tag{21}$$

entraîne la convergence des séries (19) et (16) dans tout le domaine des substitutions:

$$|X_1-X_1^0|+|X_2-X_2^0|+\cdots+|X_m-X_m^0| < \|\varrho\|\,. \tag{22}$$

Sous la condition de la convergence de la série (21), la fonction (17) est nommée „*également holomorphe*" dans le voisinage (22). Si la fonction (17) est holomorphe dans le voisinage $|X_j - X_j^0| < \|\varrho\|$, elle est évidemment également holomorphe dans le voisinage (22).

De ces considérations il résulte immédiatement le lemme suivant:

Lemme I: Si la fonction:

$$f(\xi) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha^{(\nu)}\xi^\nu \tag{23}$$

de la variable numérique ξ est holomorphe dans le cercle:

$$|\xi| < \varrho^n, \tag{24}$$

la fonction (17) des substitutions $X_1, X_2, \ldots, X_m$ est également holomorphe dans le voisinage (22), et, réciproquement, si la fonction (17) est également holomorphe dans le voisinage (22), la fonction (23) est holomorphe dans le cercle (24).

Une fonction des substitutions $X_1, X_2, \ldots, X_m$, holomorphe dans chaque domaine $|X_j| < \| \varrho \|$, ϱ étant un nombre positif, si grand que l'on veut, sera désignée sous le nom d'une fonction entière.

Il suit des définitions établies, que chaque fonction analytique (17) de m substitutions variables X_j du degré n peut être traitée, comme un système de n^2 fonctions analytiques (16) de mn^2 variables numériques $\{X_j\}_{kl}$. Les développements:

$$\{F(X_1, X_2, \ldots, X_m)\}_{kl} = C_{0,0,\ldots,0} +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\Sigma \mu_{kl}^{(j)} = \nu} \left[\prod_{\substack{j=1,2\ldots m \\ k,l=1,2\ldots n}} (\{X_j\}_{kl} - \{X_j^0\}_{kl})^{\mu_{kl}^{(j)}} \right] C_{\mu_{11}^{(1)} \mu_{11}^{(2)}, \ldots, \mu_{11}^{(m)}, \ldots, \mu_{nn}^{(1)} \mu_{nn}^{(2)}, \ldots, \mu_{nn}^{(m)}} \tag{25}$$

de ces n^2 fonctions en séries des puissances dans le voisinage des valeurs $\{x_j^0\}_k$ sont présentés par les développements (16), ordonnés suivant les polynomes d'une forme particulière: $\{(X_{j_1} - X_{j_1}^0)(X_{j_2} - X_{j_2}^0) \ldots (X_{j_\nu} - X_{j_\nu}^0)\}_{kl}$. A ce point de vue, la conception de l'ensemble de toutes fonctions analytiques de m substitutions variables du dégré n n'est autre chose, que la conception d'une *classe particulière* des fonctions analytiques, dépendant de mn^2 variables numériques.

Les coefficients C des développements (25) sont des polynomes des coefficients α des développements (16). En calculant ces polynomes de proche en proche, on vérifie que les relations:

$$C_{\mu_{11}^{(1)} \mu_{11}^{(2)}, \ldots, \mu_{11}^{(m)}, \ldots, \mu_{nn}^{(1)} \mu_{nn}^{(2)}, \ldots, \mu_{nn}^{(m)}} = 0,$$

pour toutes les valeurs entières non négatives des indices $\mu_{kl}^{(j)}$, entraînent les relations $\alpha_0 = \alpha_{j_1, j_2, \ldots, j_\nu} = 0$, pour $j_1, j_2, \ldots, j_\nu = 1, 2, \ldots, m$; $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ Il en résulte *l'unicité de la représentation* de la fonction $F(X_1, X_2, \ldots, X_m)$ des substitutions $X_1, X_2, \ldots, X_m$, holomorphe dans le voisinage (20), par la série des compositions des substitutions $X_j - X_j^0$.

§ 4.

En généralisant quelques principes de la théorie des fonctions des variables complexes nous allons obtenir les propositions correspondantes de la théorie des fonctions des substitutions linéaires dont nous aurons besoin pour fonder la théorie algorithmique des corps de Riemann. Ces propositions se trouvent établies dans les quatre lemmes des §§ 4 — 5.

Nous considérons d'abord les fonctions analytiques ne dépendant que d'une seule substitution X. Il résulte immédiatement du lemme I, que la holomorphie de la fonction

$$f(\xi) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha^{(\nu)} \xi^\nu$$

de la variable numérique ξ dans le cercle $|\xi| < \varrho n$ présente la condition nécessaire et suffisante pour la holomorphie de la fonction

$$F(X) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (X - X^0)^\nu \alpha^{(\nu)}$$

de la substitution variable X dans le voisinage $|X - X^0| < \| \varrho \|$.

L'incommutativité de la composition ne peut être patente dans les raisonnements concernant une seule substitution X, différente des nombres. L'analogie algorithmique complète entre les fonctions, dépendant d'une seule substitution variable, et les fonctions de la variable numérique qui en suit est mise en évidence par le lemme II.

Lemme II. $G(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m)$ étant une fonction entière des variables $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$, si les m fonctions:

$$\varphi_j(\xi) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_j^{(\nu)} \xi^\nu; \quad j = 1, 2, \ldots, m,$$

de la variable numérique ξ identifient l'équation: $G(\varphi_1(\xi), \varphi_2(\xi), \ldots, \varphi_m(\xi)) = 0$, les m fonctions

$$\varphi_j(X) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_j^{(\nu)} X^\nu$$

d'une seule substitution variable X identifient l'équation:

$$G(\varphi_1(X), \varphi_2(X), \ldots, \varphi_m(X)) = 0.$$

En effet, $G(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m)$ étant une fonction entière arbitraire, on peut ordonner la série $G(\varphi_1(\xi), \varphi_2(\xi), \ldots, \varphi_m(\xi))$, suivant les puissances de ξ:

$$G(\varphi_1(\xi), \varphi_2(\xi), \ldots, \varphi_m(\xi)) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \beta^{(\nu)} \xi^\nu.$$

En opérant de la même façon avec la série $G(\varphi_1(X) \ \varphi_2(X), \ldots, \varphi_m(X))$, en vertu de la permanence algorithmique mentionnée, on reçoit la transformation formelle de cette série en série

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \beta^{(\nu)} X^\nu,$$

ordonnée suivant les puissances de la substitution X. Conformément au lemme I, cette dernière série définit une fonction holomorphe dans le voisinage de la substitution zéro, et il en suit l'existence de l'égalité:

$$G(\varphi_1(X), \varphi_2(X), \ldots, \varphi_m(X)) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \beta^{(\nu)} X^\nu.$$

Or, sous les conditions du lemme, on a: $\beta^{(0)} = \beta^{(1)} = \beta^{(2)} = \cdots = 0$, et, par conséquent, $G(\varphi_1(X), \varphi_2(X), \ldots, \varphi_m(X)) = 0$.

Nous définissons la fonction exponentielle de la substitution X par le développement entier

$$e^X = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} X^\nu$$

et le logarithme, ainsi que la puissance générale par les équations: $e^{\lg X} = X$; $X^s = e^{s \lg X}$. En se servant du lemme II, on établit, que la fonction e^X admet la période $2\pi i$ et qu'il existe des déterminations des fonctions $\lg X$ et X^s différant l'une de l'autre par une constante additive $2k\pi i$, ou respectivement par une constante multiplicative $e^{2\pi i k s}$, k étant un entier arbitraire. Conformément au lemme indiqué, dans le voisinage $|X - I| < \left\| \frac{1}{n} \right\|$ de la substitution identique on a les développements:

$$\lg X = 2k\pi i + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} (X - I)^\nu ;$$

$$X^s = e^{2k\pi i s} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{s(s-1)\ldots(s-\nu+1)}{1.2\ldots\nu} (X - I)^\nu .$$

§ 5.

Les opérations de la composition des séries, de la substitution des séries dans les autres séries et de l'inversion des séries dans le domaine des séries, ordonnées suivant les compositions de m substitutions, présentent quelques singularités algorithmiques, concernant la détermination des coefficients qui sont entrainées par l'incommutativité de la composition des substitutions.

Avant d'aborder les lemmes correspondants, nous allons faire une remarque élémentaire sur la majoration des fonctions des substitutions: Si la fonction

$$H(X_1, X_2, \ldots, X_m) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_\nu}^{(1,2\ldots m)} (X_{j_1} - X_{j_1}^0)\ (X_{j_2} - X_{j_2}^0) \ldots (X_{j_\nu} - X_{j_\nu}^0)\, \beta_{j_1, j_2, \ldots, j_\nu} \quad (26)$$

est également holomorphe dans le voisinage (22), la fonction (17), où $|\alpha_{j_1, j_2, \ldots, j_\nu}| \leqslant |\beta_{j_1, j_2, \ldots, j_\nu}|$, est évidemment de même également holomorphe dans ce voisinage. Nous désignons la fonction (26) par le nom de „majorante“ pour la fonction (17) dans le domaine (22). La fonction (17) étant également holomorphe dans le voisinage (22), il existe évidemment un nombre positif g, satisfaisant à l'inégalité: $|\alpha_{j_1, j_2, \ldots, j_\nu}| < \frac{g}{(\varrho' n)^\nu}$, où $\varrho' = \varrho - \varepsilon$, ε étant un nombre positif, si petit que l'on veut. Par conséquent, la fonction

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_\nu}^{(1,2,\ldots,m)} (X_{j_1} - X_{j_1}^0)\ (X_{j_2} - X_{j_2}^0) \ldots (X_{j_\nu} - X_{j_\nu}^0) \frac{g}{(\varrho' n)^\nu} =$$

$$= g \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{X_1 - X_1^0 + X_2 - X_2^0 + \cdots + X_m - X_m^0}{\varrho' n} \right)^\nu ,$$

étant conformément aux lemmes I et II également holomorphe dans le voisinage

$$|X_1 - X_1^0| + |X_2 - X_2^0| + \cdots + |X_m - X_m^0| < \| \varrho' \| \tag{27}$$

et se présentant sous forme finie

$$g\left(I - \frac{X_1 - X_1^0 + X_2 - X_2^0 + \cdots + X_m - X_m^0}{\varrho' n}\right)^{-1},$$

fournit une majorante pour la fonction (17) dans le voisinage (27).

En posant

$$|X_1 - X_1^0| + |X_2 - X_2^0| + \cdots + |X_m - X_m^0| < \| \varrho'' \| < \| \varrho' \|$$

en vertu de la relation:

$$\sum_{j_1, j_2 \cdots j_\nu}^{(1,2,\ldots,m)} |X_{j_1} - X_{j_1}^0| . |X_{j_2} - X_{j_2}^0| \ldots |X_{j_\nu} - X_{j_\nu}^0| \frac{g}{(\varrho' n)^\nu} < \left\| g\left(\frac{\varrho''}{\varrho'}\right)^\nu \right\|,$$

on a l'inégalité:

$$|F(X_1, X_2, \ldots, X_m)| < \left\| g\left(1 - \frac{\varrho''}{\varrho'}\right)^{-1} \right\|. \tag{28}$$

Nous allons établir maintenant les trois lemmes, concernant les opérations, mentionnées au commencement du paragraphe [1]).

Lemme III. Les séries:

$$U = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_\nu}^{(1,2,\ldots,m)} (X_{j_1} - X_{j_1}^0)\ (X_{j_2} - X_{j_2}^0) \ldots (X_{j_\nu} - X_{j_\nu}^0) \alpha_{j_1, j_2, \ldots, j_\nu}$$

$$V = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_\nu}^{(1,2,\ldots,m)} (X_{j_1} - X_{j_1}^0)\ (X_{j_2} - X_{j_2}^0) \ldots (X_{j_\nu} - X_{j_\nu}^0) \beta_{j_1, j_2, \ldots, j_\nu}$$

représentant des fonctions U et V des substitutions $X_1, X_2, \ldots, X_m$ également holomorphes dans le voisinage (22), leur composition UV est encore également holomorphe dans le même voisinage et peut être mise sous la forme:

$$U . V = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_\nu}^{(1,2,\ldots,m)} (X_{j_1} - X_{j_1}^0)\ (X_{j_2} - X_{j_2}^0) \ldots (X_{j_\nu} - X_{j_\nu}^0) \gamma_{j_1, j_2, \ldots, j_\nu}, \tag{29}$$

où

$$\gamma_{j_1, j_2, \ldots, j_{\nu-2}, j_{\nu-1} j_\nu} = \alpha_{j_1, j_2, \ldots, j_{\nu-2}, j_{\nu-1}} \beta_{j_\nu} + \alpha_{j_1, j_2, \ldots, j_{\nu-2}} \beta_{j_{\nu-1} j_\nu} + \ldots + \alpha_{j_1} \beta_{j_2, \ldots, j_{\nu-2}, j_{\nu-1}, j_\nu} \tag{30}$$

---

1) En démontrant les lemmes suivants, nous construisons les séries, satisfaisant formellement aux conditions des lemmes, et nous établissons la convergence de ces séries. Il suit de la définition du passage à la limite dans le domaine des substitutions du degré n (§ 3), que ces deux points sont suffisants pour vérifier les égalités correspondantes.

Démonstration. En faisant la composition formelle des series U et V, on reçoit la série (29) dont les coefficients sont définis par les formules (30). En vertu des inégalités:

$$|\alpha_{j_1, j_2, \ldots, j_\nu}| < \frac{g}{(\varrho' n)^\nu}$$

et

$$|\beta_{j_1, j_2, \ldots, j_\nu}| < \frac{h}{(\varrho' n)^\nu},$$

on a:

$$|\gamma_{j_1, j_2, \ldots, j_\nu}| < \frac{(\nu - 1) g h}{(\varrho' n)^\nu},$$

et, conformément au lemme I, la série (29) définit une fonction également holomorphe dans le voisinage (22).

Lemme IV. 1°. La substitution

$$Z = Z^0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_\nu}^{(1,2,\ldots,m)} (Y_{j_1} - Y_{j_1}^0)\,(Y_{j_2} - Y_{j_2}^0) \ldots (Y_{j_\nu} - Y_{j_\nu}^0)\, \beta_{j_1, j_2, \ldots, j_\nu} \qquad (31)$$

étant une fonction des substitutions $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$, holomorphe dans le voisinage des substitutions $Y_1^0, Y_2^0, \ldots, Y_m^0$, et les substitutions:

$$Y_j = Y_j^0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_\nu}^{(1,2,\ldots,m)} (X_{j_1} - X_{j_1}^0)\,(X_{j_2} - X_{j_2}^0) \ldots (X_{j_\nu} - X_{j_\nu}^0)\, \alpha_{j_1, j_2, \ldots, j_\nu}^{(j)} \quad j = 1, 2, \ldots, m \qquad (32)$$

étant, à leur tour, des fonctions des substitutions $X_1 X_2, \ldots X_m$, holomorphes dans le voisinage des substitutions $X_1^0, X_2^0, \ldots, X_m^0$, la substitution Z est une fonction des substitutions $X_1, X_2, \ldots, X_m$:

$$Z = Z^0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_\nu}^{(1,2,\ldots,m)} (X_{j_1} - X_{j_1}^0)\,(X_{j_2} - X_{j_2}^0) \ldots (X_{j_\nu} - X_{j_\nu}^0)\, \gamma_{j_1, j_2, \ldots, j_\nu} \qquad (33)$$

holomorphe dans le voisinage des substitutions $X_1^0, X_2^0, \ldots, X_m^0$, les coefficients $\gamma_{j_1, j_2, \ldots, j_\nu}$ étant définis par les formules:

$$\gamma_{j_1, j_2, \ldots, j_\nu} = \sum_{h_1=1}^{m} \alpha_{j_1, j_2, \ldots, j_\nu}^{(h_1)} \beta_{h_1} +$$

$$+ \sum_{\mu=2}^{\nu} \sum_{h_1, h_2, \ldots, h_\mu}^{(1,2,\ldots,m)} \sum_{1 \leqslant \varkappa_1 < \ldots < \varkappa_{\mu-1} \leqslant \nu} \alpha_{j_1 \ldots j_\varkappa}^{(h_1)} \cdot \alpha_{j_{\varkappa_1+1} \ldots j_{\varkappa_2}}^{(h_2)} \ldots \alpha_{j_{\varkappa_{\mu-1}+1} \ldots j_\nu}^{(h_\mu)} \beta_{h_1, h_2, \ldots, h_\mu}\ ^{1)}. \qquad (34)$$

2°. Si la substitution Z est une fonction entière des substitutions $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ et ces dernières substitutions sont des fonctions également holomorphes des substi-

---

1) Chaque somme $\sum\limits_{1 \leqslant \varkappa_1 < \ldots < \varkappa_{\mu-1} \leqslant \nu}$ est étendue à toutes les valeurs entières des indices $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_{\mu-1}$ satisfaisant à linégalite indiquée.

tutions $X_1, X_2, \ldots, X_m$ dans un voisinage (22), la substitution Z est une fonction également holomorphe des substitutions $X_1, X_2, \ldots, X_m$ dans le même voisinage.

Démonstration. 1°. En substituant les séries (32) dans la série (31) et en ordonnant le résultat suivant les compositions des substitutions $X_j - X_j^0$, on obtient l'égalite formelle (33), où les coefficients sont définis par les formules (34).

Les fonctions Y_j et Z étant également holomorphes dans les voisinages réspectivement:

$$|X_1 - X_1^0| + |X_2 - X_2^0| + \ldots + |X_m - X_m^0| < \| \varrho \|$$

et

$$|Y_1 - Y_1^0| + |Y_2 - Y_2^0| + \ldots + |Y_m - Y_m^0| < \| \sigma \|,$$

il existe des nombres positifs g et h tels que:

$$|\alpha_{j_1 j_2 \ldots j_\nu}| < \frac{g}{(\varrho' n)^\nu}; \qquad |\beta_{j_1 j_2 \ldots j_\nu}| < \frac{h}{(\sigma' n)^\nu},$$

où

$$\varrho' = \varrho - \varepsilon \quad \text{et} \quad \sigma' = \sigma - \varepsilon,$$

ε étant un nombre positif si petit que l'on veut. Si de plus:

$$|X_1 - X_1^0| + |X_2 - X_2^0| + \ldots + |X_m - X_m^0| < \| \varrho'' \| < \| \varrho' \|,$$

on a conformément à la formule (28):

$$|Y_j - Y_j^0| < \left\| g\left(1 - \frac{\varrho''}{\varrho'}\right)^{-1} \frac{\varrho''}{\varrho'} \right\|.$$

Or, en posant:

$$\varrho'' < \frac{\varrho' \sigma'}{\sigma' + mg},$$

on satisfait aux conditions:

$$|X_1 - X_1^0| + |X_2 - X_2^0| + \ldots + |X_m - X_m^0| < \| \varrho' \|$$

et

$$|Y_1 - Y_1^0| + |Y_2 - Y_2^0| + \ldots + |Y_m - Y_m^0| < \| \sigma' \|$$

à la fois. Par conséquent, sous la condition:

$$|X_1 - X_1^0| + |X_2 - X_2^0| + \ldots + |X_m - X_m^0| < \left\| \frac{\varrho' \sigma'}{\sigma' + mg} \right\|, \qquad (35)$$

les fonctions:

$$g \frac{X_1 - X_1^0 + X_2 - X_2^0 + \ldots + X_m - X_m^0}{\varrho' n} \left(I - \frac{X_1 - X_1^0 + X_2 - X_2^0 + \ldots + X_m - X_m^0}{\varrho' n}\right)^{-}$$

$$h \frac{Y_1 - Y_1^0 + Y_2 - Y_2^0 + \ldots + Y_m - Y_m^0}{\sigma' n} \left(I - \frac{Y_1 - Y_1^0 + Y_2 - Y_2^0 + \ldots + Y_m - Y_m^0}{\sigma' n}\right)^{-}$$

sont des majorantes pour les fonctions:

$$Y_j - Y_j^0 \quad \text{et} \quad Z - Z^0.$$

En posant:

$$X_1 - X_1^0 + X_2 - X_2^0 + \ldots + X_m - X_m^0 = U; \quad V = \frac{gU}{\varrho' n}\left(I - \frac{U}{\varrho' n}\right)^{-1};$$

$$W = \frac{hmV}{\sigma' n}\cdot\left(I - \frac{mV}{\sigma' n}\right)^{-1} = \frac{mghU}{\varrho'\sigma' n^2 - (\sigma' n + mg)U},$$

on conclut, conformément aux lemmes I et II, que la fonction W est développable en série des puissances de la substitution U, pourvu que l'on ait:

$$|U| < \left\| \frac{\varrho'\sigma}{\sigma' + mg} \right\|.$$

En ordonnant cette série suivant les compositions des substitutions $X_j - X_j^0$, on reçoit une fonction également holomorphe des substitutions $X_1, X_2, \ldots, X_m$ dans le voisinage:

$$|X_1 - X_1^0| + |X_2 - X_2^0| + \ldots + |X_m - X_m^0| < \left\| \frac{\sigma'\varrho'}{\sigma' + \frac{mg}{n}} \right\|,$$

ou a fortiori dans le voisinage (35).

Les coefficients des α et β dans les formules (34) étant positifs, cette fonction peut être traitée comme majorante pour la fonction (33). Il en résulte que la série (33), obtenue par le procédé formel, représente une fonction également holomorphe dans le voisinage (35).

2°. La fonction Z étant entière en $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$, on peut prendre σ' si grand que l'on veut. Le nombre g restant fixe, il résulte de la formule (35), que la majoration est valable pour tout le voisinage (22).

Lemme V: 1°. Les m substitutions

$$Y_j = Y_j^0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1 j_2 \ldots j_\nu}^{(1,2,\ldots,m)} (X_{j_1} - X_{j_1}^0)(X_{j_2} - X_{j_2}^0)\ldots(X_{j_\nu} - X_{j_\nu}^0)\, \alpha^{(j)}_{j_1 j_2 \ldots j_\nu} \quad j = 1, 2, \ldots, m \tag{36}$$

étant des fonctions des substitutions $X_1, X_2, \ldots, X_m$, holomorphes dans le voisinage des substitutions $X_1^0, X_2^0, \ldots, X_m^0$ et telles que déterminant $\Delta = |\alpha^{(j)}_{j_1}|$ est différent de zéro, il existe un système des solutions $X_1, X_2, \ldots, X_m$ des équations (36) qui est présenté par les fonctions

$$X_j = X_j^0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1, j_2 \ldots j_\nu}^{(1,2,\ldots,m)} (Y_{j_1} - Y_{j_1}^0)(Y_{j_2} - Y_{j_2}^0)\ldots(Y_{j_\nu} - Y_{j_\nu}^0)\, \beta^{(j)}_{j_1 j_2, \ldots j_\nu} \tag{37}$$

des substitutions $Y_1, Y_2, \ldots Y_m$, holomorphes dans le voisinage des substitutions $Y_1^0, Y_2^0, \ldots Y_m^0$, les coefficients $\beta^{(j)}_{j_1 j_2 \ldots j_\nu}$ étant définis par les rélations de récurrence:

$$\beta^{(j)}_{j_1} = \frac{\Delta_{j_1 j}}{\Delta}; \qquad \beta^{(j)}_{j_1 j_2 \ldots j_\nu} =$$

$$= \sum_{\mu=2}^{\nu} \sum_{h_1 h_2 \ldots h_\mu}^{(1,2,\ldots,m)} \sum_{1 \leqslant \varkappa_1 < \ldots < \varkappa_{\mu-1} \leqslant \nu} \beta^{(h_1)}_{j_1 \ldots j_{\varkappa_1}} \beta^{(h_2)}_{j_{\varkappa_1+1}, \ldots, j_{\varkappa_2}} \ldots \beta^{(h_\mu)}_{j_{\varkappa_{\mu-1}+1} \ldots j_\nu} \ldots \overset{*}{\alpha}{}^{(j)}_{h_1, h_2 \ldots h_\mu}, \tag{38}$$

où

$$\overset{*}{\alpha}{}^{(j)}_{h_1 h_2 \ldots h_\mu} = -\frac{1}{\Delta}\left[\alpha^{(1)}_{h_1 h_2 \ldots h_\mu}\Delta_{1j} + \alpha^{(2)}_{h_1 h_2 \ldots h_\mu}\Delta_{2j} + \ldots + \alpha^{(m)}_{h_1 h_2 \ldots h_\mu}\Delta_{mj}\right]$$

et Δ_{hj} est le complément algébrique de l'élément de la h-ième ligne et de la j-ième colonne du déterminant Δ.

2°. Les coefficients de l'équation (36) satisfaisant aux conditions:

$$\alpha^{(j)}_{j_1} = \alpha \text{ pour } j = j_1; \quad \alpha^{(j)}_{j_1} = 0 \text{ pour } j \neq j_1; \quad |\alpha^{(j)}_{j_1 j_2 \ldots j_\nu}| < \frac{\tau^\nu}{\nu!},$$

où τ est un nombre positif fixe, les solutions (37) sont des fonctions de $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$, également holomorphes dans le voisinage:

$$\begin{aligned} &|Y_1 - Y_1^0| + |Y_2 - Y_2^0| + \ldots + |Y_m - Y_m^0| < \\ &< \left\| \frac{1}{n}\left[\left(1 + \frac{|\alpha|}{m\tau}\right)\lg\left(1 + \frac{|\alpha|}{m\tau}\right) - \frac{|\alpha|}{m\tau}\right]\right\|. \end{aligned} \tag{39}$$

Démonstration. 1°. Nous posons, pour simplifier l'écriture, $X_j^0 = Y_j^0 = 0$. En mettant les équations (36) sous la forme:

$$Y_j - \sum_{\nu=2}^{\infty} \sum_{j_1 j_2 \ldots j_\nu}^{(1,2,\ldots,m)} X_{j_1} X_{j_2} \ldots X_{j_\nu}\, \alpha^{(j)}_{j_1 j_2 \ldots j_\nu} = X_1 \alpha^{(j)}_1 + X_2 \alpha^{(j)}_2 + \ldots + X_m \alpha^{(j)}_m$$

et en les résolvant par rapport à $X_1, X_2, \ldots, X_m$, on trouve:

$$X_j = \beta^{(j)}_1 Y_1 + \beta^{(j)}_2 Y_2 + \ldots + \beta^{(j)}_m Y_m + \sum_{\nu=2}^{\infty} \sum_{j_1 j_2 \ldots j_\nu}^{(1,2,\ldots,m)} X_{j_1} X_{j_2} \ldots X_{j_\nu}\, \overset{*}{\alpha}{}^{(j)}_{j_1 j_2 \ldots j_\nu}. \tag{40}$$

En posant:

$$X_j = \beta^{(j)}_1 Y_1 + \beta^{(j)}_2 Y_2 + \ldots + \beta^{(j)}_m Y_m + \sum_{\nu=2}^{\infty} \sum_{j_1 j_2 \ldots j_\nu}^{(1,2\ldots m)} Y_{j_1} Y_{j_2} \ldots Y_{j_\nu} \beta^{(j)}_{j_1 j_2 \ldots j_\nu}$$

et en identifiant les coefficients auprès les mêmes compositions des substitutions $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ dans les équations (40), on obtient les développements formels (37) pour les solutions X_j.

En supposant les fonctions Y_j également holomorphes dans le voisinage:

$$|X_1| + |X_2| + \ldots + |X_m| < \|\varrho\|,$$

on a les inégalités:

$$|\overset{*}{\alpha}{}^{(j)}_{j_1 j_2 \ldots j_\nu}| < \frac{g}{(\varrho' n)^\nu},$$

où $\varrho' = \varrho - \varepsilon$, ε étant un nombre positif si petit que l'on veut. Considérons l'équation auxiliaire:

$$U_j = (Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_m)\beta + \sum_{\nu=2}^{\infty} \sum_{j_1 j_2 \ldots j_\nu}^{(1,2,\ldots m)} U_{j_1} U_{j_2} \ldots U_{j_\nu} \frac{g}{(\varrho' u)^\nu} \tag{41}$$

où $\beta > |\beta^{(j)}_{j_1}|$. En posant: $U = U_j$; $V = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_m$, sous la condition

$$|U| < \left\| \frac{\varrho'}{m} \right\|,$$

cette équation peut être mise sous la forme:

$$U\left(I - \frac{mU}{n\varrho'}\right) = \beta V\left(I - \frac{mU}{n\varrho'}\right) + g\,\frac{m^2U^2}{n^2\varrho'^2}. \tag{42}$$

La racine de l'équation numérique correspondante

$$\xi\left(1 - \frac{m\xi}{n\varrho'}\right) = \beta\eta\left(1 - \frac{m\xi}{n\varrho'}\right) + g\,\frac{m^2\xi^2}{n^2\varrho'^2}$$

est convergente dans le cercle:

$$|\eta| < \frac{n\varrho' + 2mg - 2\sqrt{mgn\varrho' + m^2g^2}}{\beta m}.$$

Conformément aux lemmes I et II, la série des puissances de la substitution V, représentant la solution de l'équation (42), est convergente, pourvu que l'on ait:

$$|V| < \left\| \frac{n\varrho' + 2mg - 2\sqrt{mgn\varrho' + m^2g^2}}{n\beta m} \right\|.$$

En ordonnant cette série suivant les compositions des substitutions Y_j, on obtient une fonction de ces substitutions, également holomorphe dans le voisinage

$$|Y_1| + |Y_2| + \ldots + |Y_m| < \left\| \frac{n\varrho' + 2mg - 2\sqrt{mgn\varrho' + m^2g^2}}{n\beta m} \right\|. \tag{43}$$

Les coefficients des polynomes en $\overset{*}{\alpha}{}^{(j)}_{j_1 j_2 \ldots j_\nu}$ et $\beta^{(j)}_{j_1}$, représentant les $\beta^{(j)}_{j_1 j_2 \ldots j_\nu}$ au moyen des formules (38), étant positifs, cette fonction peut être traitée comme majorante pour les fonctions (37). Il en suit, que les fonctions (37) sont également holomorphes dans le voisinage (43).

2°. Dans le cas particulier, l'équation auxiliaire (41) peut être écrite sous la forme:

$$|\alpha| \,.\, U_j = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_m + \sum_{\nu=2}^{\infty} \sum_{j_1 j_2 \ldots j_\nu}^{(1,2\ldots m)} U_{j_1} U_{j_2} \ldots U_{j_\nu} \frac{\tau^\nu}{\nu!},$$

ou, en posant: $|\alpha|\, U_j = W$, sous la forme:

$$W = V + e^{\frac{m\tau}{|\alpha|} W} - \frac{m\tau}{|\alpha|} W - I.$$

La solution de l'équation numérique correspondante

$$1 + \left(1 + \frac{m\tau}{|\alpha|}\right)\zeta - e^{\frac{m\tau}{|\alpha|}\zeta} = \eta,$$

s'annulant pour $\eta = 0$, est représentable par la série des puissances de η, convergente dans le cercle

$$|\eta| < \left(1 + \frac{|\alpha|}{m\tau}\right) \lg \left(1 + \frac{|\alpha|}{m\tau}\right) - \frac{|\alpha|}{m\tau} \text{ [1]}.$$

Par conséquent, l'inversion est valable et les solutions (37) sont également holomorphes dans le voisinage (39).

III. Résolution algorithmique du problème de Poincaré.

§ 6.

Les éléments de l'algorithme du problème A, dépendant de la variable x et de la configuration des points singuliers $a_1, a_2, \ldots a_m$, sont représentés par un système des fonctions de la forme:

$$L_b(a_{j_1} a_{j_2} \ldots a_{j_\nu} | x); \quad j_1, j_2, \ldots, j_\nu = 1, 2, \ldots, m; \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots, \tag{44}$$

définies par la relation de récurrence:

$$L_b(a_{j_1} | x) = \int_b^x \frac{dx}{x - a_{j_1}}; \quad L_b(a_{j_1} a_{j_2} \ldots a_{j_{\nu-1}} a_{j_\nu} | x) = \int_b^x \frac{L_b(a_{j_1} a_{j_2} \ldots a_{j_{\nu-1}} | x)\, dx}{x - a_{j_\nu}}, \tag{45}$$

b étant un point fixe à distance finie, indépendant de x et différent des points singuliers [2]). Nous appellerons „*hyperlogarithmes de la première espèce*“ de la configuration $a_1, a_2, \ldots, a_m$ le système des fonctions (44). Le point b est nommé „l'origine“ et le nombre ν — „rang“ du hyperlogarithme (44). Le hyperlogarithme du rang zéro sera posé égal à l'unité.

En excluant du plan $\mathcal{E}$ de la variable x les points, appartenant au système des coupures (a_j, ∞), nous recevons le domaine $\mathcal{E}_\infty$, dans lequel tous les hyperlogarithmes du système (44) sont uniformes et holomorphes. Quand la variable x décrit un contour fermé, croisant quelques coupures (a_j, ∞), chaque hyperlogarithme du rang ν se transforme en une combinaison linéaire des hyperlogarithmes des rangs au plus égaux à ν. Le caractère indiqué de la ramification des hyperlogarithmes est établi par le lemme suivant:

Lemme VI. Les valeurs des hyperlogarithmes aux bords de chaque coupure (a_j, ∞) sont liées par la relation:

$$\left.\begin{aligned} L_b(a_{j_1} a_{j_2} \ldots a_{j_{\nu-1}} a_{j_\nu} | \overline{x}) &= P_b^{(j)}(a_{j_1} a_{j_2} \ldots a_{j_{\nu-1}} a_{j_\nu}) + \\ + P_b^{(j)}(a_{j_1} a_{j_2} \ldots a_{j_{\nu-1}}) L_b(a_{j_\nu} | \overset{+}{x}) + \ldots + P_b^{(j)}(a_{j_1}) L_b(a_{j_1} a_{j_2} \ldots a_{j_{\nu-1}} a_{j_\nu} | \overset{+}{x}) &+ \\ + L_b(a_{j_1} a_{j_2} \ldots a_{j_{\nu-1}} a_{j_\nu} | \overset{+}{x}), & \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

---

[1]) On démontre aisement, que le rayon de convergence de la solution cherchée est donné par l'expression indiquée, en se servant de la formule de Bürmann-Lagrange et en présentant cette solution sous la forme

$$\xi = \frac{\frac{|\alpha|}{m\tau}}{1 + \frac{|\alpha|}{m\tau}} \left[\eta - 1 + \frac{1}{1 + \frac{|\alpha|}{m\tau}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \left(\frac{\nu + 1}{1 + \frac{|\alpha|}{m\tau}} \right)^{\nu-1} e^{\frac{(\eta-1)(\nu+1)}{1 + \frac{|\alpha|}{m\tau}}} \right].$$

[2]) Les fonctions de la forme (45) ont été mentionnées par H. Poincaré (loc. cit.).

les coefficients $P_b^{(j)}(a_{j_1}a_{j_2}\ldots a_{j_\mu})$ ne dépendant que de la configuration des points $a_1, a_2, \ldots a_m$ et étant donnés par les expressions:

$$P_b^{(j)}(a_{j_1}a_{j_2}\ldots a_{j_{\mu-1}}a_{j_\mu}) = \int_{(a_j)} \frac{L_b(a_{j_1}a_{j_2}\ldots a_{j_{\mu-1}}|x)}{x-a_{j_\mu}}\,dx, \tag{47}$$

où l'intégrale est prise dans le sens positif, suivant un contour arbitraire (a_j) qui commence et finit au point b et n'enferme qu'un seul point singulier a_j.

Démonstration. Fixons une suite arbitraire des points singuliers:

$$a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_{\varkappa-1}}, a_{j_\varkappa}, a_{j_{\varkappa+1}}, \ldots, a_{j_\nu}, \ldots,$$

où les points $a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots a_{j_{\varkappa-1}}$ sont distincts du point a_j et $a_{j_\varkappa} = a_j$, et désignons par $\Delta_{a_j} L_b(a_{j_1}\, a_{j_2}\ldots a_{j_\nu}|x)$ la différence: $L_b(a_{j_1}a_{j_2}\ldots a_{j_\nu}|\overset{-}{x}) - L_b(a_{j_1}a_{j_2}\ldots a_{j_\nu}|\overset{+}{x})$ des valeurs de $L_b(a_{j_1}\, a_{j_2}\ldots a_{j_\nu}|x)$ aux bords négatif et positif de la coupure (a_j, ∞). Si l'on a $\nu < \varkappa$ le lemme est évident, car on a: $\Delta_{a_j} L_b(a_{j_1}\, a_{j_2}\ldots a_{j_\nu}|x) = 0$.

Dans le voisinage de chaque point x de la coupure (a_j, ∞), distinct du point a_j, les deux valeurs $L_b(a_{j_1}\, a_{j_2}\ldots a_{j_\nu}|\overset{-}{x})$ et $L_b(a_{j_1}\, a_{j_2}\ldots a_{j_\nu}|\overset{+}{x})$ sont des fonctions holomorphes de x, et, par conséquent, les opérations $\frac{d}{dx}$ et Δ_{a_j} sont permutables. Il en résulte que

$$\frac{d}{dx}\Delta_{a_j} L_b(a_{j_1}, a_{j_2}\ldots a_{j_{\varkappa-1}}\, a_{j_\varkappa}|x) = \Delta_{a_j}\frac{L_b(a_{j_1}\, a_{j_2}\ldots a_{j_{\varkappa-1}}|x)}{x-a_{j_\varkappa}} = 0$$

et $\Delta_{a_j} L_b(a_{j_1}, a_{j_2}\ldots a_{j_{\varkappa-1}}\, a_{j_\varkappa}|x) = P_b^{(j)}(a_{j_1}, a_{j_2}\ldots a_{j_{\varkappa-1}}a_{j_\varkappa})$, où $P_b^{(j)}(a_{j_1}\ldots a_{j_\varkappa})$ est une valeur indépendante de x. Donc, la relation de la forme (46) est établie dans le cas $\nu = \varkappa$. En supposant, qu'elle subsiste pour une valeur fixe de l'indice $\nu \geqslant \varkappa$, on a:

$$\frac{d}{dx}\Delta_{a_j} L_b(a_{j_1}\, a_{j_2}\ldots a_{j_\nu}\, a_{j_{\nu+1}}|x) = \Delta_{a_j}\frac{L_b(a_{j_1}\, a_{j_2}\ldots a_{j_\nu}|x)}{x-a_{j_{\nu+1}}} =$$
$$= \frac{1}{x-a_{j_{\nu+1}}}[P_b^{(j)}(a_{j_1}a_{j_2}\ldots a_{j_{\nu-1}}, a_{j_\nu}) + P_b^{(j)}(a_{j_1}a_{j_2}\ldots a_{j_{\nu-1}})\, L_b(a_{j_\nu}|\overset{+}{x}) + \ldots +$$
$$+ P_b^{(j)}(a_{j_1})\, L_b(a_{j_2}\ldots a_{j_{\nu-1}}a_{j_\nu}|\overset{+}{x})],$$

où tous les $P_b^{(j)}(a_{j_1}\ldots a_{j_\mu})$ sont des valeurs indépendantes de x. En intégrant, on obtient:

$$\Delta_{a_j} L_b(a_{j_1}a_{j_2}\ldots a_{j_\nu}\, a_{j_{\nu+1}}|x) = P_b^{(j)}(a_{j_1}a_{j_2}\ldots a_{j_\nu}\, a_{j_{\nu+1}}) + P_b^{(j)}(a_{j_1}\, a_{j_2}\ldots a_{j_\nu})\, L_b(a_{j_{\nu+1}}|\overset{+}{x}) +$$
$$+ P_b^{(j)}(a_{j_1}\, a_{j_2}\ldots a_{j_{\nu-1}})\, L_b(a_{j_\nu}\, a_{j_{\nu+1}}|\overset{+}{x}) + \ldots + P_b^{(j)}(a_{j_1})\, L_b(a_{j_2}\ldots a_{j_\nu}\, a_{j_{\nu+1}}|\overset{+}{x}).$$

Il en resulte, que les relations de la forme (46) subsistent pour toutes les valeurs de l'indice ν.

Il ne reste qu'à établir les expressions pour les coefficients $P_b^{(j)}(a_{j_1}\, a_{j_2}\ldots a_{j_\mu})$. Fixons un point ξ et un contour $(\overset{*}{a}_j)$ qui commence et finit au point ξ et n'enferme

qu'un seul point critique a_j. En partant du point ξ avec la valeur $L_b(a_{j_1}a_{j_2}\ldots a_{j_\nu}\,|\,\xi)$ et en suivant le contour $(\overset{*}{a}_j)$ dans le sens positif, conformément à la relation (46), on revient au point ξ avec la valeur:

$$P_b^{(j)}(a_{j_1}a_{j_2}\ldots a_{j_\nu})+P_b^{(j)}(a_{j_1}a_{j_2}\ldots a_{j_{\nu-1}})\,L_b(a_{j_\nu}\,|\,\xi)+\ldots+P_b^{(j)}(a_{j_1})\,L_b(a_{j_2}\ldots a_{j_\nu}\,|\,\xi)+$$
$$+L_b(a_{j_1}a_{j_2}\ldots a_{j_\nu}\,|\,\xi).$$

Il en résulte, que:

$$\int_{(\overset{*}{a}_j)}\frac{L_b(a_{j_1}a_{j_2}\ldots a_{j_{\nu-1}}\,|\,x)}{x-a_{j_\nu}}\,dx=P_b^{(j)}(a_{j_1}a_{j_2}\ldots a_{j_\nu})+P_b^{(j)}(a_{j_1}a_{j_2}\ldots a_{j_{\nu-1}})\,L_b(a_{j_\nu}\,|\,\xi)+$$
$$+\ldots+P_b^{(j)}(a_{j_1})\,L_b(a_{j_2}\ldots a_{j_\nu}\,|\,\xi).$$

Or, en posant $\xi=b$, tous le hyperlogarithmes au côté droit s'évanouissent, et il reste la relation (47).

En vertu du lemme demontré, la ramification des hyperlogarithmes est déterminée par les coefficients $P_b^{(j)}(a_{j_1}a_{j_2}\ldots a_{j_\nu})$ ne dépendant que de la configuration des points $a_1\,a_2\ldots a_m$. Nous appellerons ces coefficients „*paramètres de la configuration* $a_1, a_2,\ldots a_m$“ [1]).

Chaque hyperlogarithme de la première espèce $L_b(a_{j_1}a_{j_2}\ldots a_{j_\nu}\,|\,x)$, sur le plan $\mathcal{E}$ de la variable x, est évidemment une fonction multiforme de x, dont on obtient toutes les valeurs, en faisant les prolongements analytiques du développement:

$$\int_b^x\frac{L_b(a_{j_1}a_{j_2}\ldots a_{j_{\nu-1}}\,|\,x)}{x-a_{j_\nu}}\,dx=c_1(x-b)+c_2(x-b)^2+\ldots,$$

pour le voisinage de l'origine b, suivant tous les chemins possibles sur $\mathcal{E}$. On peut traiter chaque hyperlogarithme du système (44), comme une fonction uniforme sur la surface de superposition universelle $\mathfrak{S}(a_1,\ a_2,\ldots a_m)$, pour les points singuliers $a_1,\ a_2,\ldots a_m\infty$ du type logarithmique. L'origine b étant fixée sur l'un des feuillets de la surface $\mathfrak{S}(a_1,\ a_2,\ldots,a_m)$, nous allons établir les bornes supérieures des modules des hyperlogarithmes aux points de cette surface, distincts des points $a_1, a_2\ldots, a_m, \infty$.

Si le point x de la surface $\mathfrak{S}(a_1,\ a_2,\ldots a_m)$ peut être lié à l'origine b par un chemin W, passant sur cette surface, dont la longueur est σ et dont la distance des points $a_1, a_2,\ldots, a_m$ est au moins égale à δ, il subsiste l'inégalité:

$$|\,L_b(a_{j_1}a_{j_2}\ldots a_{j_\nu}\,|\,x)\leqslant\frac{1}{\nu!}\left(\frac{\sigma}{\delta}\right)^\nu. \tag{48}$$

En effet, pour le premier rang on a:

$$|\,L_b(a_{j_1}\,|\,x)\,|=\left|\int_b^x\frac{dx}{x-a_{j_1}}\right|\leqslant\frac{1}{\delta}\int_0^\sigma d\sigma=\frac{\sigma}{\delta},$$

---

[1]) On peut exprimer les paramètres de la configuration par des combinaisons linéaires des valeurs des hyperlogarithmes aux points singuliers. Cependant, les expressions du texte sont suffisantes pour l'exposition primordiale de la théorie. Il est clair, que les hyperlogarithmes et les paramètres de la configuration, appartenant aux systèmes définis par des origines diverses, sont liés par des relations linéaires.

et, en supposant que l'inégalité (48) subsiste pour le rang fixe r on trouve:

$$|L_b(a_{j_1}, a_{j_2}\ldots a_{j_\nu}, a_{j_{\nu+1}}|x)| = \left|\int_b^x \frac{L_b(a_{j_1}a_{j_2}\ldots a_{j_\nu}|x)}{x-a_{j_{\nu+1}}}dx\right| \leqslant \frac{1}{\delta}\int_0^\sigma \frac{1}{r!}\left(\frac{\sigma}{\delta}\right)^\nu d\sigma =$$
$$= \frac{1}{(r+1)!}\left(\frac{\sigma}{\delta}\right)^{\nu+1}.$$

Nous allons appliquer la même méthode pour évaluer la borne supérieure des modules des paramètres de la configuration. En désignant par $\sigma_b^{(j)}$ la longueur de l'un des contours (a_j) du lemme VI et par $\delta_b^{(j)}$ sa distance minimale des points $a_1, a_2, \ldots, a_m$, on a en vertu de la relation (48) l'inégalité:

$$|P_b^{(j)}(a_{j_1}a_{j_2}\ldots a_{j_\nu})| = \left|\int_{(a_j)} \frac{L_b(a_{j_1}a_{j_2}\ldots a_{j_{\nu-1}}|x)}{x-a_{j_\nu}}dx\right| \leqslant \frac{1}{r!}\left(\frac{\sigma_b^{(j)}}{\delta_b^{(j)}}\right)^\nu.$$

En désignant par $M_b[(a_1), (a_2), \ldots (a_m)]$ la plus grande des valeurs:

$$\frac{\sigma_b^{(1)}}{\delta_b^{(1)}}, \frac{\sigma_b^{(2)}}{\delta_b^{(2)}}, \ldots \frac{\sigma_b^{(m)}}{\delta_b^{(m)}}$$

nous nommons „*caractéristique de la configuration* $a_1, a_2, \ldots, a_m$ pour l'origine b" la limite inférieure $\tau_b(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ des valeurs de $M_b[(a_1), (a_2), \ldots (a_m)]$ pour toutes les formes possibles des contours indiqués $(a_1), (a_2), \ldots (a_m)$.

La borne supérieure des modules des paramètres de la configuration est évidemment définie par l'inégalité:

$$|P_b^{(j)}(a_{j_1}a_{j_2}\ldots\ldots a_{j_\nu})| \leqslant \frac{1}{r!}[\tau_b(a_1, a_2, \ldots, a_m)]^\nu; \quad j = 1, 2, \ldots, m. \tag{49}$$

On a toujours $\tau_b(a_1, a_2, \ldots, a_m) \geqslant 2\pi$, car $P_b^{(j)}(a_{j_1}) = 2\pi i$ pour $j = j_1$ et $P_b^{(j)}(a_{j_1}) = 0$ pour $j \neq j_1$. En particulier, si, outre le point à l'infini, il n'existe que deux points singuliers: a_1 et a_2, on a: $\tau_{\frac{a_1+a_2}{2}}(a_1, a_2) = 2\pi$.

§ 7.

En se servant des lemmes demontrés, nous établirons deux théorèmes fondamentaux qui donnent la résolution algorithmique du problème de Poincaré.

Theorème I. La base fondamentale $\Phi_b\left(\begin{matrix} U_1 U_2 \ldots U_m \\ a_1 a_2 \ldots a_m \end{matrix}\middle| x\right)$ du corps

$$R_b\left(\begin{matrix} U_1 U_2 \ldots U_m \\ a_1 a_2 \ldots a_m \end{matrix}\right),$$

donné par un système des substitutions différentielles $U_1, U_2, \ldots, U_m$, localisées aux points $a_1, a_2, \ldots, a_m$, est une fonction entière de ces substitutions:

$$\Phi_b\left(\begin{matrix} U_1 U_2 \ldots U_m \\ a_1 a_2 \ldots a_m \end{matrix}\middle| x\right) = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1 j_2 \ldots j_\nu}^{(1,2\ldots m)} U_{j_1} U_{j_2} \ldots U_{j_\nu} L_b(a_{j_1}a_{j_2}\ldots a_{j_\nu}|x), \tag{50}$$

les coefficients étant des hyperlogarithmes de la première espèce. Le développement (50) converge uniformément par rapport à x et représente la base dans chaque portion finie de la surface $\mathfrak{S}(a_1, a_2, \ldots, a_m)$, n'enfermant aucun des points $a_1, a_2, \ldots, a_m$.

Démonstration. En vertu du lemme I et de la formule (48), on établit immédiatement le caractère indiqué de la convergence de la série (50). En remarquant, que:

$$\frac{d}{dx}\Phi_b\left(\begin{matrix} U_1 U_2 \ldots U_m \\ a_1\, a_2 \ldots a_m \end{matrix}\middle| x\right) =$$

$$= \frac{d}{dx}\left[I + \sum_{j=1}^{m}\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{j_1 j_2 \ldots j_\nu}^{(1,2\ldots m)} U_{j_1} U_{j_2} \ldots U_{j_\nu} U_j L_b(a_{j_1} a_{j_2} \ldots a_{j_\nu} a_j | x)\right]$$

$$\sum_{j=1}^{m}\left[I + \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1 j_2 \ldots j_\nu}^{(1,2\ldots m)} U_{j_1} U_{j_2} \ldots U_{j_\nu} L_b(a_{j_1} a_{j_2} \ldots a_{j_\nu} | x)\right] \frac{U_j}{x - a_j} =$$

$$= \Phi_b\left(\begin{matrix} U_1 U_2 \ldots U_m \\ a_1\, a_2 \ldots a_m \end{matrix}\middle| x\right) \sum_{j=1}^{m} \frac{U_j}{x - a_j},$$

on achève la démonstration.

En prenant dans les séries (50) les coefficients hyperlogarithmiques à l'origine b', on obtient la base fondamentale: $\Phi_{b'}\left(\begin{matrix} U_1 U_2 \ldots U_m \\ a_1\, a_2 \ldots a_m \end{matrix}\middle| x\right)$ du corps $R_{b'}\left(\begin{matrix} U_1 U_2 \ldots U_m \\ a_1\, a_2 \ldots a_m \end{matrix}\right)$. Il est évident, que les deux bases mentionnées sont liées par la rélation:

$$\left.\begin{aligned} &\Phi_{b'}\left(\begin{matrix} U_1 U_2 \ldots U_m \\ a_1\, a_2 \ldots a_m \end{matrix}\middle| x\right) = C\Phi_b\left(\begin{matrix} U_1 U_2 \ldots U_m \\ a_1\, a_2 \ldots a_m \end{matrix}\middle| x\right), \text{ où} \\ &C = \Phi_{b'}\left(\begin{matrix} U_1 U_2 \ldots U_m \\ a_1\, a_2 \ldots a_m \end{matrix}\middle| b\right) = \Phi_b\left(\begin{matrix} U_1 U_2 \ldots U_m \\ a_1\, a_2 \ldots a_m \end{matrix}\middle| b'\right)^{-1} \end{aligned}\right\} \qquad (51)$$

Toutes les bases du corps $R_b\left(\begin{matrix} U_1 U_2 \ldots U_m \\ a_1\, a_2 \ldots a_m \end{matrix}\right)$ sont enfermées dans la formule: $\Phi_b\left(\begin{matrix} U_1 U_2 \ldots U_m \\ a_1\, a_2 \ldots a_m \end{matrix}\middle| x\right) \cdot G(x)$, où $G(x)$ est une matrice propre arbitraire uniforme dans tout le plan. Il s'ensuit, que la question concernant la construction algorithmique d'une base arbitraire du corps de Riemann, donné par un système des substitutions différentielles, est épuisée par le théorème I.

Theorème II. Le corps de Riemann $R_b\left(\begin{matrix} U_1 U_2 \ldots U_m \\ a_1\, a_2 \ldots a_m \end{matrix}\right)$ étant donné par un système des substitutions différentielles $U_1, U_2, \ldots, U_m$, localisées aux points $a_1, a_2, \ldots, a_m$, les substitutions intégrales $V_1, V_2, \ldots, V_m$ de ce corps, localisées respectivement aux mêmes points, sont des fonctions entières des substitutions différentielles, représentées par les développements:

$$\left.\begin{aligned} V_j &= \Omega_b^{(j)}\left(\begin{matrix} U_1 U_2 \ldots U_m \\ a_1\, a_2 \ldots a_m \end{matrix}\right) = \\ &= I + \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1 j_2 \ldots j_\nu}^{(1,2,\ldots,m)} U_{j_1} U_{j_2} \ldots U_{j_\nu} P_b^{(j)}(a_{j_1} a_{j_2} \ldots a_{j_\nu}) \end{aligned}\right\} \qquad (52)$$

dont les coefficients sont les paramètres de la configuration $a_1, a_2, \ldots, a_m$.

Démonstration. En se servant du lemme I et de la formule (49), on conclut que les fonctions (52) sont entières par rapport aux $U_1, U_2, \ldots, U_m$. Conformément au lemme III et au théorème I, on a:

$$\left.\begin{aligned}
&V_j \Phi_b\left(\begin{matrix} U_1 U_2 \ldots U_m \\ a_1\, a_2 \ldots a_m \end{matrix}\middle| x\right) = \\
&= \left[I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1 j_2 \ldots j_\nu}^{(1,2,\ldots,m)} U_{j_1} U_{j_2} \ldots U_{j_\nu} P_b^{(j)}(a_{j_1} a_{j_2} \ldots a_{j_\nu})\right] \cdot \\
&\cdot \left[I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1 j_2 \ldots j_\nu}^{(1,2,\ldots,m)} U_{j_1} U_{j_2} \ldots U_{j_\nu} L_b(a_{j_1} a_{j_2} \ldots a_{j_\nu} | x)\right] = \\
&= I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1 j_2 \ldots j_\nu}^{(1,2\ldots m)} \{U_{j_1} U_{j_2} \ldots U_{j_\nu} \cdot \\
&\cdot [P_b^{(j)}(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu}) + P_b^{(j)}(a_{j_1} \ldots a_{j_{\nu-1}}) L_b(a_{j_\nu} | x) + \cdots + \\
&+ P_b^{(j)}(a_{j_1}) L_b(a_{j_2} \ldots a_{j_\nu} | x) + L_b(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu} | x)]\}.
\end{aligned}\right\} \tag{53}$$

D'après le lemme VI, aux points $\overset{+}{x}$ et $\overset{-}{x}$ de la coupure (a_j, ∞) subsiste la relation:

$$P_b^{(j)}(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu}) + P_b^{(j)}(a_{j_1} \ldots a_{j_{\nu-1}}) L_b(a_{j_\nu} | \overset{+}{x}) + \cdots + P_b^{(j)}(a_{j_1}) L_b(a_{j_2} \ldots a_{j_\nu} | \overset{+}{x}) +$$
$$+ L_b(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu} | \overset{+}{x}) = L_b(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu} | \overset{-}{x}).$$

Par conséquent, en faisant dans la formule (53) $x = \overset{+}{x}$, on a aux bords de la coupure (a_j, ∞) la relation:

$$V_j \cdot \Phi_b\left(\begin{matrix} U_1 U_2 \ldots U_m \\ a_1\, a_2 \ldots a_m \end{matrix}\middle| \overset{+}{x}\right) = \Phi_b\left(\begin{matrix} U_1 U_2 \ldots U_m \\ a_1\, a_2 \ldots a_m \end{matrix}\middle| \overset{-}{x}\right).$$

Il résulte de la relation (52), que les substitutions intégrales

$$\Omega_b^{(j)}\left(\begin{matrix} U_1 U_2 \ldots U_m \\ a_1\, a_2 \ldots a_m \end{matrix}\right) \text{ et } \Omega_{b'}^{(j)}\left(\begin{matrix} U_1 U_2 \ldots U_m \\ a_1\, a_2 \ldots a_m \end{matrix}\right)$$

des corps

$$R_b\left(\begin{matrix} U_1 U_2 \ldots U_m \\ a_1\, a_2 \ldots a_m \end{matrix}\right) \text{ et } R_{b'}\left(\begin{matrix} U_1 U_2 \ldots U_m \\ a_1\, a_2 \ldots a_m \end{matrix}\right)$$

sont liées par les relations:

$$\Omega_{b'}^{(j)}\left(\begin{matrix} U_1 U_2 \ldots U_m \\ a_1\, a_2 \ldots a_m \end{matrix}\right) = C \Omega_b^{(j)}\left(\begin{matrix} U_1 U_2 \ldots U_m \\ a_1\, a_2 \ldots a_m \end{matrix}\right) C^{-1}. \tag{54}$$

En se servant des considérations du commencement du § 5, du lemme II et des formules (48) et (49), on vérifie aisement les inégalités:

$$\left|\Phi_b\left(\begin{matrix} U_1 U_2 \ldots U_m \\ a_1\, a_2 \ldots a_m \end{matrix}\right)\right| \leqslant e^{\frac{\tau}{\delta}(|U_1| + |U_2| + \ldots + |U_m|)}; \quad \left|\Phi_b\left(\begin{matrix} U_1 U_2 \ldots U_m \\ a_1\, a_2 \ldots a_m \end{matrix}\middle| x\right)\right| \leqslant \left\| e^{\frac{\sigma n \rho}{\delta}} \right\|$$

$$\left|\Omega_b^{(j)}\left(\begin{matrix} U_1 U_2 \ldots U_m \\ a_1\, a_2 \ldots a_m \end{matrix}\right)\right| \leqslant e^{\tau_b(a_1, a_2, \ldots, a_m) \cdot (|U_1| + |U_2| + \ldots + |U_m|)}; \quad \left|\Omega_b^{(j)}\left(\begin{matrix} U_1 U_2 \ldots U_m \\ a_1\, a_2 \ldots a_m \end{matrix}\right)\right| \leqslant \left\| e^{\tau_b(a_1, a_2, \ldots, a_m) \cdot n \rho} \right\|,$$

où $|U_1| + |U_2| + \cdots + |U_m| < \|\varrho\|$.

Ces relations établissent le caractère de la „croissance“ des fonctions entières $\Phi_b\left(\begin{matrix} U_1 U_2 \ldots U_m \\ a_1\, a_2 \ldots a_m \end{matrix}\middle| x\right)$ et $\Omega_b^{(j)}\left(\begin{matrix} U_1 U_2 \ldots U_m \\ a_1\, a_2 \ldots a_m \end{matrix}\right)$ des substitutions $U_1, U_2, \ldots, U_m$.

Les théorèmes I et II donnent évidemment la résolution algorithmique complète du problème de Poincaré.

IV. Résolution algorithmique du problème de Riemann pour le voisinage de la substitution identique.

§ 8.

Des théorèmes I et II résolvant le problème de Poincaré, il suit immédiatement le théorème III qui nous donne la résolution algorithmique du problème de Riemann, sous certaines restrictions concernant les écarts des substitutions intégrales données de la substitution identique.

Théorème III. Si le corps de Riemann $S\left(\begin{matrix} V_1 V_2 \ldots V_m \\ a_1\, a_2 \ldots a_m \end{matrix}\right)$ est donné par un système des substitutions intégrales $V_1, V_2, \ldots V_m$ satisfaisant à l'inégalité:

$$|V_1 - I| + |V_2 - I| + \cdots + |V_m - I| < \left\| \frac{1}{n}\left[\left(1 + \frac{2\pi}{m\tau_b}\right) \lg\left(1 + \frac{2\pi}{m\tau_b}\right) - \frac{2\pi}{m\tau_b}\right]\right\|, \quad (55)$$

où τ_b est la caractéristique de la configuration $a_1, a_2, \ldots, a_m$ pour une origine arbitraire b et n — le degré des substitutions:

1° il existe un système „*primitif*“ des substitutions différentielles $U_1, U_2, \ldots, U_m$ de ce corps, représentant un système des fonctions également holomorphes des substitutions $V_1, V_2, \ldots, V_m$ dans le voisinage (55):

$$U_j = A_b^{(j)}\left(\begin{matrix} V_1 V_2 \ldots V_m \\ a_1\, a_2 \ldots a_m \end{matrix}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1 j_2 \ldots j_\nu}^{(1,2,\ldots,m)} (V_{j_1} - I)(V_{j_2} - I) \ldots (V_{j_\nu} - I) Q_b^{(j)}(a_{j_1} a_{j_2} \ldots a_{j_\nu}), \quad (56)$$

les coefficients $Q_b^{(j)}(a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_\nu})$ étant des combinaisons linéaires des paramètres de la configuration $a_1, a_2, \ldots, a_m$ à l'origine b, définies par les relations de récurrence:

$$Q_b^{(j)}(a_{j_1}) = 1 \text{ pour } j = j_1; \quad Q_b^{(j)}(a_{j_1}) = 0 \text{ pour } j \neq j_1; \quad Q_b^{(j)}(a_{j_1}\, a_{j_2} \ldots a_{j_\nu} =$$

$$= -\sum_{\mu=2}^{\nu} \sum_{h_1 h_2 \ldots h_\mu}^{(1,2,\ldots,m)} \sum_{1 \leqslant \varkappa_1 < \ldots < \varkappa_{\mu-1} \leqslant \nu} Q_b^{(h_1)}(a_{j_1} \ldots a_{j_{\varkappa_1}})\, Q_b^{(h_2)}(a_{j_{\varkappa_1+1}} \ldots a_{j_{\varkappa_2}}) \ldots Q_b^{(h_\mu)}(a_{j_{\varkappa_{\mu-1}+1}} \ldots a_{j_\nu}) \cdot$$

$$\cdot \frac{P_b^{(j)}(a_{h_1}\, a_{h_2} \ldots a_{h_\mu})}{(2\pi i)^\mu}. \quad (57)$$

2°. Il existe la base „*primitive*“ $\Theta_b\left(\begin{matrix} V_1 V_2 \ldots V_m \\ a_1\, a_2 \ldots a_m \end{matrix}\middle| x\right)$ de ce corps, normale au

point b et admettant le système primitif (56) des substitutions différentielles, représentée par le développement:

$$\Theta_b\left(\begin{matrix} V_1 V_2 \dots V_m \\ a_1 a_2 \dots a_m \end{matrix}\middle| x\right) =$$

$$= I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1 j_2 \dots j_\nu}^{(1,2\dots m)} A_b^{(j_1)}\left(\begin{matrix} V_1 V_2 \dots V_m \\ a_1 a_2 \dots a_m \end{matrix}\right) A_b^{(j_2)}\left(\begin{matrix} V_1 V_2 \dots V_m \\ a_1 a_2 \dots a_m \end{matrix}\right) \dots A_b^{(j_\nu)}\left(\begin{matrix} V_1 V_2 \dots V_m \\ a_1 a_2 \dots a_m \end{matrix}\right) \cdot$$

$$\cdot I_b(a_{j_1} a_{j_2} \dots a_{j_\nu} | x). \tag{58}$$

Démonstration. Si les substitutions $U_1, U_2, \dots, U_m$ représentent les solutions des équations

$$V_j = \Omega_b^{(j)}\left(\begin{matrix} U_1 U_2 \dots U_m \\ a_1 a_2 \dots a_m \end{matrix}\right) \quad j = 1, 2, \dots, m, \tag{59}$$

la base régulière $\Phi_b\left(\begin{matrix} U_1 U_2 \dots U_m \\ a_1 a_2 \dots a_m \end{matrix}\middle| x\right)$ admettant le système des substitutions différentielles $U_1, U_2, \dots, U_m$, en vertu du théorème II, appartient au corps $S\left(\begin{matrix} V_1 V_2 \dots V_m \\ a_1 a_2 \dots a_m \end{matrix}\right)$, et les substitutions $U_1, U_2, \dots, U_m$ forment un système des substitutions différentielles de ce corps. Conformément au lemme V, 2°, les équations (59) admettent des solutions, se réduisant à zéro pour $V_j = I$ [1]), qui sont des fonctions également holomorphes des substitutions $V_1, V_2, \dots, V_m$, dans le vosinage (55) de la substitution identique, représentées par les séries (56). En vertu du théorème I, l'expression (58) donne la base correspondante:

$$\Phi_b\left(\begin{matrix} U_1 U_2 \dots U_m \\ a_1 a_2 \dots a_m \end{matrix}\middle| x\right) = \Phi_b\left(\begin{matrix} A_1 A_2 \dots A_m \\ a_1 a_2 \dots a_m \end{matrix}\middle| x\right) = \Theta_b\left(\begin{matrix} V_1 V_2 \dots V_m \\ a_1 a_2 \dots a_m \end{matrix}\middle| x\right).$$

Il résulte de la relation (54), que les substitutions: $A_b^{(j)}\left(\begin{matrix} V_1 V_2 \dots V_m \\ a_1 a_2 \dots a_m \end{matrix}\right)$ et $A_{b'}^{(j)}\left(\begin{matrix} V_1 V_2 \dots V_m \\ a_1 a_2 \dots a_m \end{matrix}\right)$, formant les deux systèmes primitifs des substitutions différentielles du corps $S\left(\begin{matrix} V_1 V_2 \dots V_m \\ a_1 a_2 \dots a_m \end{matrix}\right)$, ainsi que les deux bases primitives correspondantes $\Theta_b\left(\begin{matrix} V_1 V_2 \dots V_m \\ a_1 a_2 \dots a_m \end{matrix}\middle| x\right)$ et $\Theta_{b'}\left(\begin{matrix} V_1 V_2 \dots V_m \\ a_1 a_2 \dots a_m \end{matrix}\middle| x\right)$, sont liées par les relations:

$$A_{b'}^{(j)}\left(\begin{matrix} V_1 V_2 \dots V_m \\ a_1 a_2 \dots a_m \end{matrix}\right) = C^{-1} A_b^{(j)}\left(\begin{matrix} V_1 V_2 \dots V_m \\ a_1 a_2 \dots a_m \end{matrix}\right) C; \quad \Theta_{b'}\left(\begin{matrix} V_1 V_2 \dots V_m \\ a_1 a_2 \dots a_m \end{matrix}\middle| x\right) =$$

$$= \Theta_b\left(\begin{matrix} V_1 V_2 \dots V_m \\ a_1 a_2 \dots a_m \end{matrix}\middle| x\right) C,$$

où

$$C = \Theta_b\left(\begin{matrix} V_1 V_2 \dots V_m \\ a_1 a_2 \dots a_m \end{matrix}\middle| b'\right)^{-1} = \Theta_{b'}\left(\begin{matrix} V_1 V_2 \dots V_m \\ a_1 a_2 \dots a_m \end{matrix}\middle| b\right). \tag{60}$$

Le théorème III, donnant les expressions explicites (58) des bases primitives du corps $S\left(\begin{matrix} V_1 V_2 \dots V_m \\ a_1 a_2 \dots a_m \end{matrix}\right)$, laisse tout de même peut évident le caractère de la

---

[1]) Cette condition est considérée comme caractéristique pour les systèmes primitifs.

dépendance de ces bases des substitutions intégrales données. Pour cette raison nous avons à transformer les expressions indiquées.

En se servant du lemme IV, 2°, nous pouvons représenter la base $\Theta_b\left(\begin{matrix} V_1 V_2 \dots V_m \\ a_1\, a_2 \dots a_m \end{matrix} \middle| x\right)$, comme une fonction des substitutions intégrales, par son développement, ordonné suivant les compositions des substitutions $V_1 - I$, $V_2 - I, \dots V_m - I$. Il en résulte le théorème suivant:

Theorème IV. La base primitive $\Theta_b\left(\begin{matrix} V_1 V_2 \dots V_m \\ a_1\, a_2 \dots a_m \end{matrix} \middle| x\right)$ du corps $S\left(\begin{matrix} V_1 V_2 \dots V_m \\ a_1\, a_2 \dots a_m \end{matrix}\right)$, donné par un système des substitutions intégrales $V_1, V_2, \dots, V_m$, est une fonction également holomorphe:

$$\Theta_b\left(\begin{matrix} V_1 V_2 \dots V_m \\ a_1\, a_2 \dots a_m \end{matrix} \middle| x\right) = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1 j_2 \dots j_\nu}^{(1,2,\dots,m)} (V_{j_1} - I)(V_{j_2} - I) \dots (V_{j_\nu} - I) \frac{1}{(2\pi i)^\nu} H_b(a_{j_1} a_{j_2} \dots a_{j_\nu} | x) \qquad (61).$$

des substitutions intégrales dans le voisinage (55) de la substitution identique. Chaque coefficient $H_b(a_{j_1} a_{j_2} \dots a_{j_\nu} | x)$ s'exprime par une combinaison linéaire des hyperlogarithmes de la première espèce du rang au plus égal à r:

$$H_b(a_{j_1} | x) = L_b(a_{j_1} | x); \quad H_b(a_{j_1} a_{j_2} \dots a_{j_\nu} | x) = \sum_{h_1=1}^{m} Q_b^{(h_1)}(a_{j_1} a_{j_2} \dots a_{j_\nu}) L_b(a_{h_1} | x) +$$

$$+ \sum_{\mu=2}^{\nu} \sum_{h_1 h_2 \dots h_\mu}^{(1,2,\dots,m)} \sum_{1 \leqslant \varkappa_1 < \dots < \varkappa_{\mu-1} \leqslant \nu} Q_b^{(h_1)}(a_{j_1} \dots a_{j_{\varkappa_1}}) Q_b^{(h_2)}(a_{j_{\varkappa_1+1}} \dots a_{j_{\varkappa_2}}) \dots Q_b^{(h_\mu)}(a_{j_{\varkappa_{\mu-1}+1}} \dots a_{j_\nu}) \cdot$$

$$\cdot L_b(a_{h_1} a_{h_2} \dots a_{h_\mu} | x). \qquad (62)$$

La transformation effectuée ne change pas évidemment le caractère de la convergence de la série (58) par rapport à x, et les séries (61) restent convergentes et présentent la base dans chaque position finie de la surface $\mathfrak{S}(a_1, a_2, \dots, a_m)$, ne contenant aucun des points $a_1, a_2, \dots, a_m$. Au point de vue de la théorie des fonctions analytiques des substitutions linéaires, le développement (61) met complètement en évidence le caractère de la dépendance de la base primitive des substitutions intégrales dans le voisinage de la substitution identique.

Reste encore à précisier le caractère de la dépendance des coefficients $H_b(a_{j_1} a_{j_2} \dots a_{j_\nu} | x)$ de la configuration des points singuliers. Pour cette raison nous allons introduire la notion des „hyperlogarithmes de la deuxième espèce" et, en se servant de cette notion, nous établirons les relations de récurrence pour les coefficients indiqués.

§ 9.

Nous allons désigner sous le nom de „*hyperlogarithmes de la deuxième espèce* de la configuration $a_1, a_2, \dots, a_m$" le système des fonctions

$$E_b(a_{j_1} a_{j_2} \dots a_{j_\nu} | x); \quad j_1, j_2, \dots, j_\nu = 1, 2, \dots, m; \quad \nu = 1, 2, 3, \dots \qquad (63)$$

définies par les relations de récurrence:

$$E_b(a_j | x) = -\int_{a_j}^{b} \frac{ds}{s - x}; \quad E_b(a_{j_0} a_{j_1} a_{j_2} \dots a_{j_\nu} | x) = -\int_{a_{j_0}}^{b} \frac{E_b(a_{j_1} a_{j_2} \dots a_{j_\nu} | s) ds}{s - x}, \qquad (64)$$

b étant un point fixe arbitraire, distinct des points $a_1, a_2, \ldots, a_m$ et situé à distance finie et les intégrales étant prises suivant les bords positifs des coupures fixes (a_j, b). Le nombre r est nommé „rang" du hyperlogarithme (63). Nous posons le hyperlogarithme du rang zéro égal à l'unité.

En vertu du théorème bien connu, concernant les valeurs limites de l'integrale de Cauchy[1]), aux bords de chaque coupure (a_j, b) subsistent les rélations:

$$E_b(a_{j_0}a_{j_1}a_{j_2}\ldots a_{j_\nu}|\bar{x}) - E_b(a_{j_0}a_{j_1}a_{j_2}\ldots a_{j_\nu}|\overset{+}{x}) = \\ = \begin{cases} 2\pi i E_b(a_{j_1}a_{j_2}\ldots a_{j_\nu}|\overset{+}{x}) & \text{pour } j_0 = j \\ 0 & \text{pour } j_0 \neq j \end{cases} \tag{65}$$

Ces relations déterminent complètement le caractère de la ramification des hyperlogarithmes de la deuxième espèce aux points singuliers $a_1, a_2, \ldots, a_m$.

En se servant des définitions établies, nous allons démontrer le théorème suivant.

Théorème V. En désignant par β et γ deux nombres arbitraires, tels que $\beta b \neq \gamma$, le développement de la base primitive $\Theta_b\left(\begin{matrix} V_1 V_2 \ldots V_m \\ a_1 a_2 \ldots a_m \end{matrix}\middle| x\right)$ du corps $S\left(\begin{matrix} V_1 V_2 \ldots V_m \\ a_1 a_2 \ldots a_m \end{matrix}\right)$, donné par un système des substitutions intégrales $V_1, V_2, \ldots, V_m$, pour le voisinage (56) de la substitution identique peut être mise sous la forme:

$$\Theta_b\left(\begin{matrix} V_1 V_2 \ldots V_m \\ a_1 a_2 \ldots a_m \end{matrix}\middle| x\right) = I + \tag{66}$$

$$+\sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1, j_2 \ldots j_\nu}^{(1,2,\ldots,m)} (V_{j_1} - I)(V_{j_2} - I)\ldots(V_{j_\nu} - I) \frac{1}{(2\pi i)^\nu} E_\beta\left(\frac{\beta a_{j_1} - \gamma}{a_{j_1} - b}, \frac{\beta a_{j_2} - \gamma}{a_{j_2} - b}, \ldots \frac{\beta a_{j_\nu} - \gamma}{a_{j_\nu} - b}\middle| \frac{\beta x - \gamma}{x - b}\right),$$

les coefficients étant les hyperlogarithmes de la deuxième espèce. Le développement indiqué présente la base dans chaque portion finie de la surface $\mathfrak{S}(a_1 a_2 \ldots a_m)$, n'enfermant aucun des poins $a_1, a_2, \ldots a_m$.

Démonstration. Conformément à la définition des substitutions intégrales, il existe aux bords de la coupure (a_j, ∞) la relation:

$$\Theta_b\left(\begin{matrix} V_1 V_2 \ldots V_m \\ a_1 a_2 \ldots a_m \end{matrix}\middle| \bar{x}\right) - \Theta_b\left(\begin{matrix} V_1 V_2 \ldots V_m \\ a_1 a_2 \ldots a_m \end{matrix}\middle| \overset{+}{x}\right) = (V_j - I)\, \Theta_b\left(\begin{matrix} V_1 V_2 \ldots V_m \\ a_1 a_2 \ldots a_m \end{matrix}\middle| \overset{+}{x}\right).$$

Par conséquent, en vertu du théorème IV, on a:

$$\sum_{j_0=1}^{m} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{j_1 j_2 \ldots j_\nu}^{(1,2\ldots m)} (V_{j_0} - I)(V_{j_1} - I)(V_{j_2} - I)\ldots(V_{j_\nu} - I) \frac{1}{(2\pi i)^{\nu+1}} [H_b(a_{j_0}a_{j_1}a_{j_2}\ldots a_{j_\nu}|\bar{x}) - \\ - H_b(a_{j_0}a_{j_1}a_{j_2}\ldots a_{j_\nu}|\overset{+}{x})] = V_j - I + \\ + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1 j_2 \ldots j_\nu}^{(1,2\ldots m)} (V_j - I)(V_{j_1} - I)(V_{j_2} - I)\ldots(V_{j_\nu} - I) \frac{1}{(2\pi i)^\nu} H_b(a_{j_1}a_{j_2}\ldots a_{j_\nu}|\overset{+}{x}). \tag{67}$$

---

[1]) Ce théorème a été établi la première fois par M. Sokhotski [„Sur les intégrales définies etc." St. Pétersbourg, 1873, p. 4].

En vertu de l'unicité de la représentation d'une fonction holomorphe par série des compositions (§ 3), on peut égaler les coefficients auprès des mêmes compositions dans la relation (67). Il en suit, qu'aux bords de chacune des coupures (a_j, ∞) subsistent les relations:

$$H_b(a_{j_0}a_{j_1}a_{j_2}\ldots a_{j_\nu}|\bar{x}) - H_b a_{j_0}a_{j_1}a_{j_2}\ldots a_{j_\nu}|\overset{+}{x}) =$$
$$= \left\{ \begin{array}{ll} 2\pi i H_b(a_{j_1}a_{j_2}\ldots a_{j_\nu}|\overset{+}{x}) & \text{pour } j_0 = j, \\ 0 & \text{pour } j_0 \neq j. \end{array} \right\} \tag{68}$$

En se servant de ces relations, on démontre aisément l'égalité:

$$H_b(a_{j_1}a_{j_2}\ldots a_{j_\nu}|x) = E_\beta\left(\frac{\beta a_{j_1}-\gamma}{a_{j_1}-b}, \frac{\beta a_{j_2}-\gamma}{a_{j_2}-b}, \ldots \frac{\beta a_{j_\nu}-\gamma}{a_{j_\nu}-b} \middle| \frac{\beta x-\gamma}{x-b}\right). \tag{69}$$

En effet, pour le premier rang, en tenant compte des formules (62), on a:

$$E_\beta\left(\frac{\beta a_j-\gamma}{a_j-b} \middle| \frac{cx-\gamma}{x-b}\right) = I_b(a_j|x) = H_b(a_j|x),$$

car

$$\int_\beta^{\frac{\beta a_j-\gamma}{a_j-b}} \frac{ds}{s-\frac{\beta x-\gamma}{x-b}} = \int_b^x \frac{dx}{s-a_j} = \lg\frac{x-a_j}{b-a_j}.$$

En supposant, que l'égalité (69) subsiste pour un rang fixe r, on obtient conformément aux égalités (68) et (65), aux bords de chaque coupure (a_j, ∞) les relations:

$$H_b(a_{j_0}a_{j_1}\ldots a_{j_\nu}|\bar{x}) - H_b(a_{j_0}a_{j_1}\ldots a_{j_\nu}|\overset{+}{x}) =$$
$$= \left\{ \begin{array}{ll} 2\pi i E_\beta\left(\frac{\beta a_{j_1}-\gamma}{a_{j_1}-b}, \ldots, \frac{\beta a_{j_\nu}-\gamma}{a_{j_\nu}-b} \middle| \frac{\beta\overset{+}{x}-\gamma}{\overset{+}{x}-b}\right) & \text{pour } j_0 = j. \\ 0 & \text{pour } j_0 \neq j. \end{array} \right.$$

$$E_\beta\left(\frac{\beta a_{j_0}-\gamma}{a_{j_0}-b}, \frac{\beta a_{j_1}-\gamma}{a_{j_1}-b}, \ldots, \frac{\beta a_{j_\nu}-\gamma}{a_{j_\nu}-b} \middle| \frac{\beta\bar{x}-\gamma}{\bar{x}-b}\right) -$$
$$- E_\beta\left(\frac{\beta a_{j_0}-\gamma}{a_{j_0}-b}, \frac{\beta a_{j_1}-\gamma}{a_{j_1}-b}, \ldots \frac{\beta a_{j_\nu}-\gamma}{a_{j_\nu}-b} \middle| \frac{\beta\overset{+}{x}-\gamma}{\overset{+}{x}-b}\right) =$$
$$= \left\{ \begin{array}{ll} 2\pi i E_\beta\left(\frac{\beta a_{j_1}-\gamma}{a_{j_1}-b}, \ldots, \frac{\beta a_{j_\nu}-\gamma}{a_{j_\nu}-b} \middle| \frac{\beta\overset{+}{x}-\gamma}{\overset{+}{x}-b}\right) & \text{pour } j = j_0, \\ 0 & \text{pour } j \neq j_0. \end{array} \right.$$

Il suit de ces relations, que la fonction:

$$H_b(a_{j_0}a_{j_1}\ldots a_{j_\nu}|x) - E_\beta\left(\frac{\beta a_{j_0}-\gamma}{a_{j_0}-b}, \frac{\beta a_{j_1}-\gamma}{a_{j_1}-b}, \ldots, \frac{\beta a_{j_\nu}-\gamma}{a_{j_\nu}-b} \middle| \frac{\beta x-\gamma}{x-b}\right) \tag{70}$$

est uniforme dans tout le plan de la variable x. La fonction (70), ne pouvant admettre que des points singuliers du type logarithmique [1]), est holomorphe dans tout le plan et se réduit à une constante qui doit être nulle, car au point $x=0$ les deux membres de l'expression (70) sont nuls. Par conséquent, l'égalité (69) subsiste pour tous les rangs r et les coefficients des développements des théorèmes IV et V sont identiques.

Une base arbitraire du corps $S\begin{pmatrix} V_1 V_2 \ldots V_m \\ a_1 a_2 \ldots a_m \end{pmatrix}$ est représentable par une base primitive $\Theta_b\left(\begin{matrix} V_1 V_2 \ldots V_m \\ a_1 a_2 \ldots a_m \end{matrix}\middle| x\right)$ sous la forme: $\Theta_b\left(\begin{matrix} V_1 V_2 \ldots V_m \\ a_1 a_2 \ldots a_m \end{matrix}\middle| x\right) G(x)$, $G(x)$ étant une matrice uniforme dans tout le plan. Il en suit, que les résultats des théorèmes III, IV et V épuisent la question, concernant la résolution algorithmique du problème de Riemann, si les substitutions intégrales sont données dans le voisinage de la substitution identique.

V. Corps commutatifs.

§ 10.

On reçoit les résultats les plus simples et les plus instructifs, en appliquant la théorie précédente aux corps de Riemann

$$R_b\begin{pmatrix} U_1 U_2 \ldots U_m \\ a_1 a_2 \ldots a_m \end{pmatrix} \text{ et } S\begin{pmatrix} V_1 V_2 \ldots V_m \\ a_1 a_2 \ldots a_m \end{pmatrix},$$

definis par les substitutions différentielles: $U_1, U_2, \ldots, U_m$, ou respectivement par les substitutions intégrales $V_1, V_2, \ldots, V_m$, produisant des *groupes commutatifs*.

Avant d'aborder l'étude des corps indiqués, nous avons à établir les expressions explicites des éléments des substitutions: t^X et X^t en fonctions de t et des éléments de la substitution X, t étant un nombre arbitraire. Les éléments indiqués sont déterminés par les relations de la forme:

$$\{t^X\}_{kl} = \sum_{r=1}^{\lambda} t^{\omega_r}[\alpha_{kl}^{(r0)} + \alpha_{kl}^{(r1)} \lg t + \cdots + \alpha_{kl}^{(r\varkappa_r-1)} \lg^{\varkappa_r-1} t], \tag{71}$$

$$\{X^t\}_{kl} = \sum_{r=1}^{\lambda} \omega_r^t[\beta_{kl}^{(r0)} + \beta_{kl}^{(r1)} t + \cdots + \beta_{kl}^{(r\varkappa_r-1)} t^{\varkappa_r-1}] \tag{72}$$

---

[1]) En se servant des relations de récurrence (45) et (65), on vérifie aisement, que dans le voisinage des points singuliers a_j et ∞ les hyperlogarithmes $L_b(a_{j_1} a_{j_2}, \ldots a_{j_\nu} | x)$ et

$$E_\beta\left(\frac{\beta a_{j_1} - \gamma}{a_{j_1} - b}, \frac{\beta a_{j_2} - \gamma}{a_{j_2} - b}, \ldots \frac{\beta a_{j_\nu} - \gamma}{a_{j_\nu} - b} \middle| \frac{\beta x - \gamma}{x - b}\right)$$

de la première et de la deuxième espèce sont représentables par les développements de la forme;

$$\sum_{\varkappa=0}^{\mu} \mathfrak{P}_\varkappa(x - a_j) \lg^\varkappa (x - a_j) \quad \text{et} \quad \sum_{\varkappa=0}^{\mu} \mathfrak{P}_\varkappa\left(\frac{1}{x}\right) \lg^\varkappa \frac{1}{x},$$

où μ est un entier non négatif et $\mathfrak{P}_\varkappa$ sont des séries des puissances entières.

où les coefficients α et β, idépendents de t, sont des fonctions rationelles des nombres caractéristiques $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k$, des dégrés, de multiplicité resp. $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_k$, ainsi que des éléments $\{X\}_{kl}$ de la substitution X.

En effet, considérons le corps de Riemann $R\begin{pmatrix} U \\ a \end{pmatrix}$ défini par une seule substitution différentielle U, localisée au point a. En remarquant que:

$$L_b(\overbrace{a, a, \ldots, a}^{\mu \text{ fois}} | x) = \frac{1}{\mu!} \lg^\mu \frac{x-a}{b-a},$$

il suit du théorème I et du lemme II, que la base fondamentale du corps $R\begin{pmatrix} U \\ a \end{pmatrix}$ peut être mise sous la forme:

$$\Phi_b\left(\begin{matrix} U \\ a \end{matrix} \middle| x\right) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{U^\nu}{\nu!} \lg^\nu \frac{x-a}{b-a} = e^{U \lg \frac{x-a}{b-a}} = \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^U. \qquad (73)$$

D'autre côté, la base $Y = \Phi_b\left(\begin{matrix} U \\ a \end{matrix}\right)\Big|_x$ est une matrice des fonctions, satisfaisant au système des équations différentielles: $\frac{dY}{dx} = \frac{YU}{x-a}$, et se réduisant à l'unité pour $x = b$. En exprimant les éléments de cette base par des combinaisons linéaires des intégrales canoniques des équations indiquées et en posant $\frac{x-a}{b-a} = t$; $U = X$, on obtient les formules (71).

Pour établir les formules (72), nous remarquons, que les paramètres de la configuration, dans le cas que nous venons de considérer, sont de la forme:

$$P_b(\overbrace{aa \ldots a}^{\mu \text{ fois}}) = \frac{(2\pi i)^\mu}{\mu!}.$$

Conformément au théorème II, il en résulte, qu, une substitution intégrale du corps $R_b\begin{pmatrix} U \\ a \end{pmatrix}$ est représentée par l'expression:

$$V = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(2\pi i U)^\nu}{\nu!} = e^{2\pi i U}.$$

En comparant cette expression et les expression bien connues des bases regulières dans le cas du corps considéré (v. p. ex. Plemelj, op. cit.), et en posant $V = X$: $\frac{1}{2\pi i} \lg \frac{x-a}{b-a} = t$, on obtient les formules (72).

Il résulte de ces considérations, que les éléments des substitutions t^X et X^t s'expriment sous forme finie en fonctions rationnelles, exponentielles et logarithmiques de t, ainsi que des éléments et des nombres caractéristiques de la substitution X.

§ 11.

Nous abordons maintenant les théorèmes concernant les résolution algorithmiques des problèmes de Poincaré et de Riemann dans le cas des corps commutatifs.

Théorème VI. Si un système des substitution différentielles $U_1, U_2, \ldots, U_m$, définissant un corps $R\begin{pmatrix} U_1 U_2 \ldots U_m \\ a_1 a_2 \ldots a_m \end{pmatrix}$, produit un groupe commutatif:

1° la base fondamentale de ce corps est représentable sous forme finie:

$$\Phi_b\left(\begin{matrix} U_1 U_2 \ldots U_m \\ a_1 a_2 \ldots a_m \end{matrix}\middle| x\right) = \left(\frac{x-a_1}{b-a_1}\right)^{U_1}\left(\frac{x-a_2}{b-a_2}\right)^{U_2}\cdots\left(\frac{x-a_m}{b-a_m}\right)^{U_m}, \quad (75)$$

2° les substitutions intégrales V_j du corps indiqué, localisées respectivement aux point a_j, produisent de même un groupe commutatif et sont définies par les expressions:

$$V_j = e^{2\pi i U_j} \quad (j = 1, 2, \ldots m). \quad (76)$$

Démonstration. On vérifie aisément, que la somme de la forme

$$\sum_{j_1 j_2 \ldots j_\nu}^{(\nu_1)(\nu_2)\ldots(\nu_m)} L_b(a_{j_1} a_{j_2} \ldots a_{j_\nu} | x),$$

étendue à toutes les valeurs des indices $j_1, j_2, \ldots, j_\nu = 1, 2, \ldots, m$, d'une telle façon que dans chaque ligne: $a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_\nu}$ la lettre a_1 est répétée μ_1 fois, la lettre $a_2 - \mu_2$ fois, ... la lettre $a_m - \mu_m$ fois, $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_m$ étant des entiers non négatifs, peut être mise sous la forme élémentaire:

$$\frac{1}{\mu_1! \mu_2! \ldots \mu_m!} \lg^{\nu_1} \frac{x-a_1}{b-a_1} \lg^{\nu_2} \frac{x-a_2}{b-a_2} \ldots \lg^{\nu_m} \frac{x-a_m}{b-a_m}.$$

Il en suit que:

$$\sum_{j_1 j_2 \ldots j_\nu}^{(\nu_1)(\nu_2)\ldots(\nu_m)} P_b^{(j)}(a_{j_1} a_{j_2} \ldots a_{j_\nu}) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{(2\pi i)^{\nu_j}}{\mu_j!} & \text{si } \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_{j-1} = \mu_{j+1} = \cdots = \mu_m = 0, \\ 0 & \text{dans tous autres cas.} \end{cases}$$

Par conséquent, en tenant compte de la commutativité des substitutions U_j, conformément aux théorèmes I et II et au lemme II, on reçoit les expressions suivantes:

$$\Phi_b\left(\begin{matrix} U_1 U_2 \ldots U_m \\ a_1 a_2 \ldots a_m \end{matrix}\middle| x\right) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_m=\nu} \frac{U_1^{\nu_1} U_2^{\nu_2} \ldots U_m^{\nu_m}}{\mu_1! \mu_2! \ldots \mu_m!} \lg^{\nu_1} \frac{x-a_1}{b-a_1} \lg^{\nu_2} \frac{x-a_2}{b-a_2} \ldots \lg^{\nu_m} \frac{x-a_m}{b-a_m} =$$

$$= e^{U_1 \lg \frac{x-a_1}{b-a_1}} e^{U_2 \lg \frac{x-a_2}{b-a_2}} \ldots e^{U_m \lg \frac{x-a_m}{b-a_m}} = \left(\frac{x-a_1}{b-a_1}\right)^{U_1}\left(\frac{x-a_2}{b-a_2}\right)^{U_2}\cdots\left(\frac{x-a_m}{b-a_m}\right)^{U_m}.$$

$$V_j = \sum_{\nu_j=0}^{\infty} \frac{(2\pi i U_j)^{\nu_j}}{\mu_j!} = e^{2\pi i U_j}.$$

En vertu des considérations du § 10, les éléments des matrices obtenues peuvent être mises sous forme finie. La commutativité du groupe, produit par les substitutions, V_j, suit immédiatement du lemme III.

Il résulte du théorème démontré une méthode simple pour résoudre les systèmes des équations différentielles aux singularités régulières

$$\frac{dY}{dx} = Y \sum_{j=1}^{m} \frac{U_j}{x - a_j},$$

dans le cas si les substitutions U_j produisent un groupe commutatif: on trouve les matrices intégrales Y_j de chacune des équations: $\frac{dY_j}{dx} = \frac{Y_j U_j}{x - a_j}$, et on obtient la solution générale des équations proposées, en posant: $Y = C \,.\, Y_1 \,.\, Y_2 \ldots Y_m$, C étant une matrice constante arbitraire.

Théorème VII. Si le système des substitutions intégrales $V_1, V_2, \ldots, V_m$, definissant le corps $S\begin{pmatrix} V_1 V_2 \ldots V_m \\ a_1 a_2 \ldots a_m \end{pmatrix}$, produit un groupe commutatif:

1° la valeurs des logarithmes étant arbitraires, chacune des expressions finies:

$$\Psi_b\left(\begin{matrix} V_1 V_2 \ldots V_m \\ a_1 a_2 \ldots a_m \end{matrix} \middle| x\right) =$$

$$= \left(\frac{x - a_1}{b - a_1}\right)^{\frac{1}{2\pi i} \lg V_1} \left(\frac{x - a_2}{b - a_2}\right)^{\frac{1}{2\pi i} \lg V_2} \cdots \left(\frac{x - a_m}{b - a_m}\right)^{\frac{1}{2\pi i} \lg V_m} \tag{77}$$

représente une base du corps indiqué régulière et normale au point b;

2° les substitutions différentielles correspondantes U_j, localisées réspectivement aux points a_j, produisent de même un groupe commutatif et sont déterminées par les expressions:

$$U_j = \frac{1}{2\pi i} \lg V_j, \; j = 1, 2, \ldots m. \tag{78}$$

Démonstration. En remarquant que les substitutions (78) produisent un groupe commutatif, on conclut conformément au théorème VI, que la matrice (77) satisfaisant à l'équation différentielle

$$\frac{d\Psi_b}{dx} = \Psi_b \sum_{j=1}^{m} \frac{\frac{1}{2\pi i} \lg V_j}{x - a_j},$$

admet les substitutions intégrales: $e^{2\pi i \frac{1}{2\pi i} \lg V_j} = V_j$ et, par conséquent, définit une base régulière du corps $S\begin{pmatrix} V_1 V_2 \ldots V_m \\ a_1 a_2 \ldots a_m \end{pmatrix}$. En mettant la matrice (77) sous la forme:

$$V_1^{\frac{1}{2\pi i} \lg \frac{x - a_1}{b - a_1}} V_2^{\frac{1}{2\pi i} \lg \frac{x - a_2}{b - a_2}} \ldots V_m^{\frac{1}{2\pi i} \lg \frac{x - a_m}{b - a_m}}$$

on conclut, conformément aux considérations du § 10, qu'on peut obtenir tous ses éléments au moyen des opérations élémentaires, les éléments et les nombres caractéristiques des substitutions V_j étant donnés.

On obtient le résultat analogue, concernant une base primitive, en considérant le développement (66) du théorème V. En effet, on établit aisément les égalités:

$$\sum_{j_1 j_2 \ldots j_\nu}^{(\nu_1)(\nu_2)\ldots(\nu_m)} E_b(a_{j_1} a_{j_2} \ldots a_{j_\nu} | x) =$$

$$= \prod_{j=1}^{m} \left[\frac{1}{\mu_j!} \lg \frac{x-a_j}{x-b} \left(\lg \frac{x-a_j}{x-b} - 2\pi i \right) \cdots \left(\lg \frac{x-a_j}{x-b} - 2\pi \overline{\mu_j - 1}\, i \right) \right].$$

et on écrit le développement indiqué sous la forme:

$$\Theta_b \left(\begin{matrix} V_1 V_2 \ldots V_m \\ a_1 a_2 \ldots a_m \end{matrix} \middle| x \right) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_m=\nu} \prod_{j=1}^{\infty} \frac{(V_j - I)^{\nu_j}}{\mu_j!} \cdot \frac{1}{2\pi i} \lg \frac{x-a_j}{b-a_j} \left(\frac{1}{2\pi i} \lg \frac{x-a_j}{b-a_j} - 1 \right) \cdots$$

$$\cdots \left(\frac{1}{2\pi i} \lg \frac{x-a_j}{b-a_j} - \mu_j + 1 \right).$$

D'après le lemme II, en faisant la sommation, on reçoit l'expression (77), où on prend les valeurs des $\log V_j$, s'annulant pour $V_j = I$.

Il résulte de l'étude entreprise des corps commutatifs, qu'en effectuant les sommations partielles des développements hyperlogarithmiques des théorèmes I et V, on arrive aux expressions (75) et (77) d'un type nouveau, la dernière expression, qui fournit la résolution du problème de Riemann, restant valable hors du voisinage de la substitution identique. Nous allons nous servir d'une méthode analogue dans l'investigation du problème de Riemann, concernant le cas des substitutions intégrales données arbitrairement.

19/VII, 1927.

Алгоритмическая теория Riemann'овых корпусов.

(Первое сообщение.)

И. А. Лаппо-Данилевский (Ленинград).

(*Резюме.*)

1. Матриссу Ψ, имеющую определитель отличный от тождественного нуля и состоящую из n^2 аналитических функций, претерпевающих данные линейные подстановки V_1, V_2, V_m при обходе независимым переменным x фиксированных особых точек $a_1, a_2, \ldots, a_m$, автор полагает „базисом Riemann'ова корпуса", определяемого системой „интегральных" подстановок $V_1, V_2, \ldots, V_m$. Всякий базис Ψ, выполняющий регулярную (в смысле Fuchs'а) систему линейных дифференциальных уравнений, автор называет „регулярным". Регулярный базис, равно как и соответствующий корпус, могут быть определены системой „дифференциальных" подстановок U_1. $U_2, \ldots, U_m$, составленных из коэффициентов упомянутой регулярной системы дифференциальных уравнений. Основными задачами теории Riemann'овых корпусов автор полагает: А) определение регулярного базиса и системы соответствующих интегральных подстановок Riemann'ова корпуса, заданного системой дифференциальных подстановок и Б) определение регулярного базиса и системы соответствующих дифференциальных подстановок Riemann'ова корпуса, заданного системой интегральных подстановок. Задачи А и Б заключают в себе известные задачи Poincaré и Riemann'а. Эти задачи исследовались до сего времени лишь в плоскости „теории существования". Автор имеет в виду вопрос об алгоритмах эффективного построения искомых функций и подстановок.

2. Аналитический аппарат построения указанных алгоритмов доставляется теорией „аналитических функций линейных подстановок". Дополняя обычные определения рациональных операций в области линейных подстановок фиксированной степени и определением предельного перехода, автор устанавливает понятие „голоморфной" функции от линейных подстановок, представимой „рядом композиций" переменных подстановок, и распространяет на упомянутые функции некоторые определения и положения обычной теории функций комплексных переменных.

3. Элементы алгоритмов задач А и Б, зависящие от текущего переменного x и конфигурации особых точек $a_1, a_2, \ldots, a_m$, представляются системой функций, определяемых рекуррентными соотношениями в виде итераций интегралов с фиксированным нижним пределом и переменным верхним. Эти функции автор называет гиперлогарифмами первого рода. Гиперлогарифмы первого рода суть многозначные аналитические функции от x, обращающиеся в линейные комбинации таких же функций при обходе переменной x особых точек $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Автор дает выражения для коэффициентов указанных линейных комбинаций, называя их „параметрами конфигурации" и устанавливает верхние границы модулей гиперлогарифмов первого рода и параметров конфигурации.

4. Пользуясь понятиями и положениями, упомянутыми в пп. 2 и 3, автор дает алгоритмическое решение задачи А: базис и интегральные подстановки представляются в виде „целых" функций от данных дифференциальных подстановок, причем коэффициентами соответствующих разложений по композициям этих подстановок являются: в первом случае — гиперлогарифмы первого рода, а во втором — параметры конфигурации. Автор приводит неравенства, указывающие на характер „роста" упомянутых целых функций от дифференциальных подстановок.

5. Обращая целые функции дифференциальных подстановок, представляющие интегральные подстановки, автор получает алгоритмическое решение задачи Б для интегральных подстановок, заданных в окрестности идентичной подстановки. Базис и дифференциальные подстановки оказываются голоморфными функциями интегральных подстановок, причем коэффициенты соответствующих разложений по композициям разностей интегральных и идентичной подстановок являются линейными комбинациями: в первом случае — гиперлогарифмов первого рода, а во втором — параметров конфигурации.

6. Коэффициенты упомянутых в п. 5 разложений базиса определяются простыми рекуррентными соотношениями в виде итерации интегралов типа Cauchy. Эти функции, зависящие от текущей переменной x и от конфигурации особых точек $a_1, a_2 \ldots, a_m$, автор называет „гиперлогарифмами второго рода". Задача Riemann'a для интегральных подстановок, заданных в окрестности идентичной подстановки, получает таким образом алгоритмическое решение в виде рядов композиций разностей данных подстановок и идентичной подстановки с коэффициентами, являющимися гиперлогарифмами второго рода.

7. Применяя положения пп. 4, 5 и 6 к Riemann'овым корпусам, определяемым дифференциальными или интегральными подстановками, производящими произвольные коммутативные группы, автор дает выражения в конечном виде для искомых функций и подстановок.

(Rec. Math. XXXIV:2; 1927)