



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

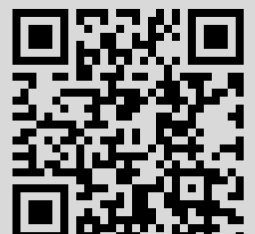
Б. И. Заславский, Об отражении сферической ударной волны в воде от свободной поверхности, *Прикл. мех. техн. физ.*, 1963, том 4, выпуск 6, 50–58

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением  
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.170

26 марта 2025 г., 23:54:49



ОБ ОТРАЖЕНИИ СФЕРИЧЕСКОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ  
В ВОДЕ ОТ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Б. И. Заславский  
(Новосибирск)

В работе [1] рассмотрена задача об отражении плоской ударной волны в воде от свободной поверхности в одномерной постановке, но с учетом в первом приближении зависимости параметров потока от амплитуды давления. Полученная в этом случае картина отражения существенно отличается от рассчитанной в акустическом приближении. Причина такого расхождения в том, что исследования течений, примыкающих к фронту взрывной волны, даже при относительно небольших перепадах давления не могут опираться на линейное уравнение акустики. Учет зависимости скорости ударной волны, скорости звука, скорости частиц за фронтом от величины избыточного давления приводит уже в одномерном случае к картине течения, качественно отличной от акустической [2-5]. Для двумерных течений такого вида, названных в работе [6] «короткими волнами», О. С. Рыжов и С. А. Христианович вывели асимптотические уравнения, учитывающие в первом приближении зависимость параметров потока от амплитуды давления. Эти уравнения использовались в работе [7], а также в работе [8], где была рассмотрена та же задача, что и в работе [1], но в двумерной постановке. В ней было найдено решение уравнений коротких волн, удовлетворяющее всем граничным условиям, за исключением условия непрерывности составляющей вектора скорости, параллельной ударному фронту. Ниже, используя некоторые частные решения уравнений коротких волн, полученные в работе [9], приближенно решается задача о нелинейном отражении сферической ударной волны в воде от свободной поверхности.

§ 1. Рассматриваются слабые ударные волны, когда изменением энтропии при переходе потока через ударный фронт можно пренебречь.

Связь давления и плотности для воды принимается в виде

$$p = B [(\rho / \rho_0)^n - 1] \quad (1.1)$$

где  $\rho_0$  — начальная плотность,  $p$  — давление,  $n$ ,  $B$  — постоянные,  $B = 3045$  атм,  $n = 7.15$ . При небольших перепадах давления зависимость плотности от давления можно представить в виде [1]

$$\rho / \rho_0 = 1 + p / Bn - 1/2(n-1)(p/Bn)^2 + O(p/Bn)^3 \quad (1.2)$$

Будем рассматривать осесимметричные течения. Поместим центр сферической системы координат  $r, \theta$  на оси симметрии, угол  $\theta$  будем отсчитывать от плоскости, перпендикулярной оси.

Следуя [6], введем безразмерные величины следующими равенствами:

$$r = a_0 t [1 + 1/2(n+1)M_0\delta], \quad U = a_0 M_0 \mu \quad (1.3)$$

$$a = a_0 [1 + 1/2(n-1)M_0\alpha], \quad \theta = \sqrt{1/2(n+1)M_0} y$$

$$\tau = \ln(a_0 t / \beta r_0), \quad M = M_0 \mu = U / a_0, \quad V = a_0 M_0 \sqrt{1/2(n+1)M_0} v$$

$$a = a_0 (\rho / \rho_0)^{1/2(n-1)}, \quad a_0 = (nB / \rho_0)^{1/2} \quad (1.4)$$

где  $t$  — время,  $r$  — расстояние,  $U, V$  — проекции вектора скорости на направление радиуса-вектора и направление, перпендикулярное к нему,  $a$  — скорость звука,  $r_0$  — радиус заряда,  $a_0 t / r_0 \approx R$  расстоянию от места взрыва до фронта ударной волны, выраженному в радиусах заряда,  $\beta$  — постоянная порядка единицы,  $M_0$  — некоторая постоянная значительно меньше единицы.

Подставляя (1.3) в уравнения газовой динамики и отбрасывая малые члены, получаем уравнения коротких волн [6,10]

$$\frac{\partial \mu}{\partial \tau} + (\mu - \delta) \frac{\partial \mu}{\partial \delta} + \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial \mu} + \mu = 0, \quad \frac{\partial \mu}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial \delta} = 0, \quad \mu = \alpha, \quad M_0 \mu = \frac{p}{Bn} \quad (1.5)$$

§ 2. Пусть сферический заряд взорван в безграничной жидкости. В момент времени, когда ударная волна достигла расстояния  $r = r_*$ , плоскостью, проходящей через центр заряда, разобьем все пространство на две части. Будем рассматривать течение вблизи фронта ударной волны, начиная с этого момента времени, считая, что проведенная нами плоскость является свободной поверхностью. Задача решается в приближении теории коротких волн.

Поместим центр сферической системы координат в центр заряда, угол  $\theta$  будем отсчитывать от плоскости, совмещенной со свободной поверхностью, искомое течение будем определять уравнениями (1.5).

Пусть  $\delta_0(\tau)$  соответствует координате точки  $A$  (фиг. 1) пересечения фронта ударной волны со свободной поверхностью,  $\mu_0(\tau)$  — значение  $\mu$  на ударном фронте в точке  $A$ . Произведем следующую замену переменных

$$\delta = [\delta^\circ + \delta_0(\tau)] e^{-\tau}, \quad \mu = [\mu^\circ + \mu_0(\tau)] e^{-\tau} \quad (2.1)$$

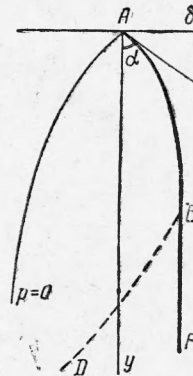
$$y = y^\circ e^{-\tau/2}, \quad v = [v^\circ - 2d\mu_0/d\tau y^\circ] e^{-\tau/2}$$

Эта замена позволяет выделить зависимость параметров течения от времени, связанную с геометрией течения, и перейти в подвижную систему координат с центром в точке  $A$ .

Подставляя (2.1) в (1.5), получаем

$$\frac{\partial \mu^\circ}{\partial \tau} + \left[ \mu^\circ + \mu_0 - \frac{d\delta_0}{d\tau} \right] \frac{\partial \mu^\circ}{\partial \delta^\circ} + \frac{y^\circ}{2} \frac{\partial \mu^\circ}{\partial y^\circ} + \frac{1}{2} \frac{\partial v^\circ}{\partial y^\circ} = 0$$

$$\frac{\partial v^\circ}{\partial \delta^\circ} - \frac{\partial \mu^\circ}{\partial y^\circ} = 0 \quad (2.2)$$



Фиг. 1

Ниже будет принято  $\mu_0(\tau) = d\delta_0(\tau)/d\tau$ . При этом условии система (2.2) примет вид

$$\frac{\partial \mu^\circ}{\partial \tau} + \mu^\circ \frac{\partial \mu^\circ}{\partial \delta^\circ} + \frac{y^\circ}{2} \frac{\partial \mu^\circ}{\partial y^\circ} + \frac{1}{2} \frac{\partial v^\circ}{\partial y^\circ} = 0, \quad \frac{\partial v^\circ}{\partial \delta^\circ} - \frac{\partial \mu^\circ}{\partial y^\circ} = 0 \quad (2.3)$$

§ 3. Рассмотрим граничные условия задачи. Пусть ударная волна распространяется в воде с начальным давлением  $p_0 = 0$  и начальной плотностью  $\rho_0$ . На фронте ударной волны должны выполняться условия динамической совместности

$$p = \rho_0 N U_n, \quad \rho_0 N_s = \rho (N - U_n), \quad U_t = 0 \quad (3.1)$$

где  $U_n, U_t$  — нормальная и касательная к ударному фронту составляющие вектора скорости частиц;  $N$  — скорость распространения ударного фронта в направлении нормали к нему.

Можно показать [1], что уравнения (3.1) эквивалентны с точностью до величин порядка  $(p/Bn)^2$  следующим равенствам

$$N = a_0 [1 + 1/4(n+1)p/Bn], \quad U = a_0 p/Bn$$

$$a = a_0 [1 + 1/2(n-1)p/Bn], \quad U \sin \psi + V \cos \psi = 0 \quad (3.2)$$

где  $\psi$  — угол между нормалью к фронту и радиус-вектором

$$\operatorname{tg} \psi = (1/r) dr/d\theta = \sqrt{M_0} \sqrt{1/2(n+1)} \partial\delta/\partial y$$

В обозначениях (1.3) (3.2) примут вид

$$N = a_0(1 + 1/4(n+1) M_0\mu), \quad \alpha = \mu, \quad \mu\partial\delta/\partial y + \nu = 0 \quad (3.3)$$

§ 4. Пусть  $\mu = \mu(\delta, y, \tau)$ ,  $\nu = \nu(\delta, y, \tau)$  — решения уравнений (1.5). Скорость распространения фронта ударной волны в направлении радиуса-вектора

$$N_r = \partial r/\partial t = a_0 [1 + 1/2(n+1) M_0(\delta + t\partial\delta/\partial t)] \quad (4.1)$$

С другой стороны, эта скорость может быть вычислена из уравнения (3.3)

$$N_r = N \sec \psi = a_0 [1 + 1/4(n+1) M_0\mu + 1/2\psi^2] \quad (4.2)$$

Приравнявая (4.1) и (4.2), получаем дифференциальное уравнение, определяющее положение ударного фронта

$$\delta + \partial\delta/\partial\tau = 1/2\mu + 1/2(\partial\delta/\partial y)^2 \quad (4.3)$$

которое после преобразований (2.1) в переменных  $y^\circ$ ,  $\tau$  примет вид

$$\frac{d\delta_0}{d\tau} - \frac{1}{2}\mu_0(\tau) + \frac{\partial\delta^\circ}{\partial\tau} + \frac{1}{2}y^\circ \frac{\partial\delta^\circ}{\partial y^\circ} = \frac{1}{2}\mu^\circ + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\delta^\circ}{\partial y^\circ}\right)^2 \quad (4.4)$$

Второе условие на ударном фронте выполняется с принятой степенью точности, так как оно верно во всем потоке. Условие  $U_t = 0$  должно быть удовлетворено дополнительно.

§ 5. В начальный момент времени одномерное течение непосредственно граничит со свободной поверхностью. В дальнейшем от каждой точки свободной поверхности, находящейся за фронтом ударной волны, начнут распространяться волны разрежения. Область их взаимодействия будем называть возмущенным течением. Область, куда не дошли возмущения, — невозмущенной областью. В последней течение будет такое же, как от взрыва заряда в безграничной жидкости. Уравнение этого течения можно получить, если положить в уравнениях (2.2)  $\nu^\circ = 2\mu_0'(\tau)y^\circ$  (т. е. при  $\nu = 0$ ). Тогда уравнения (2.2) переходят в уравнение одномерного течения

$$\frac{\partial\mu^\circ}{\partial\tau} + \left(\mu^\circ + \mu_0 - \frac{d\delta_0}{d\tau}\right) \frac{\partial\mu^\circ}{\partial\delta^\circ} + \frac{d\mu_0}{d\tau} = 0 \quad (5.1)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\delta^\circ = (\mu^\circ + \mu_0)(\tau + d) - \delta_0 + \Phi(\mu^\circ + \mu_0)$$

где  $d$  — постоянная,  $\Phi$  — произвольная функция. Будем считать, что ударная волна имеет треугольный профиль, тогда

$$\delta^\circ = (\mu^\circ + \mu_0)(\tau + d) - \delta_0 + C_1 \quad (5.2)$$

Уравнение фронта ударной волны (4.4) в одномерном случае примет вид

$$\frac{d\delta_0}{d\tau} - \frac{1}{2}\mu_0 + \frac{\partial\delta^\circ}{\partial\tau} = \frac{1}{2}\mu^\circ \quad (5.3)$$

Отсюда, используя (5.2), получаем

$$\mu_0 + \mu^\circ = b/\sqrt{\tau + d}, \quad \delta^\circ = b\sqrt{\tau + d} - \delta_0 + C_1 \quad (5.4)$$

Здесь  $b$ ,  $d$ ,  $C_1$  — постоянные,  $\mu^\circ$  и  $\delta^\circ$  — значения  $\mu^\circ$ ,  $\delta^\circ$  на фронте ударной волны. Выражения (5.2) и (5.4) совпадают с решениями, полу-

ченными Ландау для ударных волн на далеком расстоянии от места взрыва. Так как

$$\tau + d = \ln(a_0 t / \beta r_0) + d$$

то выберем  $\beta$  так, чтобы  $d = 0$ .

Тогда формула для давления на фронте ударной волны, не возмущенном влиянием свободной поверхности, запишется в виде

$$p = D / R \sqrt{\ln R - \ln \beta} \quad (5.5)$$

Величина  $\beta$  может быть найдена при сопоставлении формулы (5.5) с экспериментом. Для сопоставления приводим измеренные значения давления на фронте ударной волны, взятые из книги Коула [11] и рассчитанные на основании формулы (5.5) при  $\beta = 1.7$ ,  $D = 16400 \text{ атм}$ :

	$R = 30$	$40$	$50$	$60$	$90$	$120$	$180$
$\tau$	$2.87$	$3.16$	$3.38$	$3.56$	$3.87$	$4.26$	$4.66$
$P_{(5.5)}$	$323$	$231$	$178$	$145$	$91.6$	$66.3$	$42.27$
$P_{[11]}$	$315$	$228$	$177$	$144$	$91$	$65.7$	$41.6$

Отметим, что из формул (5.4) и (5.5) следует, что время  $\Theta$ , за которое давление падает в  $e$  раз (постоянная времени эпюры давления), может быть записано в виде

$$\Theta = \frac{r_0}{a_0} \frac{n+1}{2} \frac{e-1}{e} \frac{D}{Bn} \sqrt{\ln R - \ln \beta}$$

Вычисленные по этой формуле значения  $\Theta$  достаточно хорошо совпадают с измеренными значениями.

§ 6. Огибающая волн разрежения нулевой амплитуды, бегущих от каждой точки свободной поверхности, отделяет область возмущенного течения от области, куда возмущения не дошли. Эта элементарная волна разрежения будет характеристической поверхностью уравнений (2.2).

Выпишем уравнения характеристических поверхностей этой системы

$$\frac{d\delta_0}{d\tau} - \mu_0 + \mu^\circ - \frac{\partial \delta^\circ}{\partial \tau} - \frac{1}{2} \dot{y}^\circ \frac{\partial \delta^\circ}{\partial y^\circ} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \delta^\circ}{\partial y^\circ} \right)^2 = 0 \quad (6.1)$$

Поверхность  $BD$  (фиг. 1) является интегральной поверхностью этого уравнения. Она распространяется по невозмущенному течению, следовательно, связь между  $\mu^\circ$ ,  $\delta^\circ$  и  $\tau$  определяется выражением (5.2). В начальный момент времени, т. е. на расстоянии  $r = r_*$ , или соответственно при  $\tau = \tau_*$ , искомая поверхность совпадает со свободной поверхностью и проходит через точку  $A$ . Интегрируя уравнения (6.1) при этих условиях, получаем уравнения характеристической поверхности  $BD$

$$\delta^\circ = q_0(\tau) y^{\circ 2} - \delta_0 + C\tau - C\tau_*, \quad q_0(\tau) = \frac{\varepsilon \tau}{2\varepsilon(\tau+1) - e^\tau}, \quad \varepsilon = \frac{e^{\tau_*}}{2(\tau_*+1)} \quad (6.2)$$

Из (6.2) видно, что при  $\tau_* \ll 1$  величина  $\varepsilon$  мало зависит от  $\tau_*$  и равна приблизительно 0.5. Из условия, что возмущенный фронт при  $\tau = \tau_*$  проходит через точку  $A$ , определим постоянные, входящие в (5.4) и (5.2)

$$b = C\sqrt{\tau_*}, \quad C_1 = -C\tau_* \quad (6.3)$$

Постоянная  $C$  без ограничений общности может быть положена равной единице. Переход к другой константе всегда может быть осуществлен преобразованием  $\mu^{\circ\circ} = \mu^\circ C$ ,  $\delta^{\circ\circ} = \delta^\circ C$ ,  $y^{\circ\circ} = y^\circ C^{1/2}$ ,  $v^{\circ\circ} = v^\circ C^{3/2}$ . Таким образом, течение в невозмущенной области определяется выражением

$$\delta^\circ = (\mu^\circ + \mu_0) \tau - \delta_0 - \tau_* \quad (6.4)$$

Характеристика  $BD$  выражением

$$\delta^\circ = \frac{\varepsilon\tau}{2\varepsilon(\tau+1) - e^\tau} y^{\circ 2} - \delta_0 + \tau - \tau_* \quad (6.5)$$

Для  $\mu^\circ$  и  $\delta^\circ$  на невозмущенном ударном фронте получим

$$\mu^\circ = \frac{V\tau_*}{V\tau} - \mu_0, \quad \delta^\circ = V\tau_* V\tau - \delta_0 - \tau_* \quad (6.6)$$

Из (6.5) и (6.6) получаем значение  $y^\circ$ , при котором ударный фронт, искаженный влиянием свободной поверхности, переходит в невозмущенный фронт

$$y_B^\circ = \left( \frac{V\tau - V\tau_*}{\varepsilon V\tau} [e^\tau - 2\varepsilon(\tau+1)] \right)^{1/2} \quad (6.7)$$

§ 7. В окрестности точки  $A$  давление падает от  $p'$  — давления на фронте ударной волны до нуля, т. е. в подвижной системе координат имеет место течение, аналогичное течению Прандтля — Майера. На это обстоятельство впервые было указано в работе [1].

Для исследования течения в окрестности точки  $A$  поместим начало полярной системы координат в эту точку и введем координаты

$$r = \sqrt{y^{\circ 2} + \delta^{\circ 2}}, \quad \varphi = \arctg(\delta^\circ / y^\circ) \quad (7.1)$$

Подставляя (7.1) в (2.2) и при  $r \rightarrow 0$  отбрасывая члены порядка  $r$ , получаем

$$\left( \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \varphi + \mu^\circ + \mu_0 - \frac{d\delta_0}{d\tau} \right) \frac{d\mu^\circ}{d\varphi} = 0, \quad \frac{dv^\circ}{d\varphi} = -\operatorname{tg} \varphi \frac{d\mu^\circ}{d\varphi} \quad (7.2)$$

Система (7.2) имеет две группы решений  $\mu^\circ = \text{const}$ ,  $v^\circ = \text{const}$

$$\mu^\circ = -\mu_0 + \frac{d\delta_0}{d\tau} - \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \varphi, \quad v^\circ = \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \varphi + \text{const} \quad (7.3)$$

Равенства (7.3) определяют постоянное течение, сопряженное с течением разрежения, аналогичным течению Прандтля — Майера. Из уравнения фронта (4.4) можно видеть, что угол, под которым фронт ударной волны подходит к свободной поверхности

$$\alpha' = \left[ \frac{\partial \delta^\circ}{\partial y^\circ} \right]_{y^\circ=0} = \sqrt{2 \frac{d\delta_0}{d\tau} - \mu_0}$$

Следуя [1], будем считать, что ударная волна все время идет под критическим углом, т. е.  $\alpha' = \sqrt{\mu_0}$ ; откуда

$$\mu_0 = d\delta_0 / d\tau \quad (7.4)$$

§ 8. Для определения течения в области  $ABD$  (фиг. 1), ограниченной фронтом ударной волны  $AB$  (4.4), характеристикой  $BD$  (6.5) и линией  $\mu = -\mu_0$  (т. е. линией нулевого давления), воспользуемся частными решениями, полученными в работе [9]. Эти решения имеют вид

$$\begin{aligned} \mu^\circ &= \varphi_2 y^{\circ 2} + \varphi_0, & v^\circ &= \psi_3 y^{\circ 3} + \psi_1 y^\circ + v_0(\tau) \\ \delta^\circ &= q y^{\circ 2} + \chi_0, & \chi_{0q} &= v, & \varphi_{0q} &= \varphi_{2q} v + u \end{aligned} \quad (8.1)$$

Здесь  $v_0(\tau)$  — произвольная функция. Функции  $u$ ,  $v$ ,  $\psi_3$ ,  $\psi_1$  определяются из уравнений

$$\begin{aligned} u_\tau + (\varphi_2 - q + 2q^2) u_q + u(2\varphi_{2q} - 1 + 3q) &= 0 \\ v_\tau + (\varphi_2 - q + 2q^2) v_q + v(4q - 1) - u &= 0 \\ \psi_3 &= -3/2 [\varphi_{2\tau} + \varphi_{2q}(\varphi_2 - q + 2q^2) - 2\varphi_{2q} + \varphi_2] \\ \psi_1 &= -2 [\varphi_{0\tau} + \varphi_{0q}(\varphi_2 - q + 2q^2)] \end{aligned} \quad (8.2)$$

Функция  $\varphi_2$  из уравнения

$$\varphi_{2q\tau} + \varphi_{2q^2}(\varphi_2 - q + 2q^2) + \varphi_{2\tau^2} - \varphi_{2q}q + \varphi_2 = 0 \quad (8.3)$$

Положим

$$\varphi_2 = -\frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{3}q + \frac{2}{27} + \frac{3}{2}Z, \quad \xi_1 = q - \frac{2}{9} \quad (8.4)$$

Получим уравнение для определения  $Z(\xi, \tau)$

$$\frac{2}{3}Z_{\xi\tau} + Z_{\xi\xi}(Z + \xi^2) + Z_{\xi}(Z_{\xi} - 2\xi) = -\frac{4}{81} \quad (8.5)$$

Решение этого уравнения будем искать в виде ряда

$$Z = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{81}\right)^n Z_n \quad (8.6)$$

Подставляя (8.6) в (8.5), получаем систему уравнений для определения  $Z_n$

$$\frac{2}{3}Z_{n\xi\tau} + Z_{n\xi\xi}\xi^2 - 2\xi Z_{n\xi} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} (Z_{n-i-1}Z_i)_{\xi\xi} \quad (8.7)$$

Пользуясь двумя членами ряда и тем обстоятельством, что в дальнейшем будет поставлено условие  $Z/q^2 \rightarrow 0$  при  $q \rightarrow -\infty$ , получаем

$$Z = \frac{4}{243} \ln \xi - \frac{1}{60} \left(\frac{4}{81}\right)^2 \frac{0.3 - \ln \xi}{\xi^2} + F(\tau) \quad (8.8)$$

где  $F(\tau)$  — произвольная функция, или, переходя от  $Z$  и  $\xi$  к  $\varphi_2$  и  $q$

$$\varphi_2 = -\frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{3}q + \frac{2}{81} \ln \left(\frac{2}{9} - q\right) - \frac{1}{60} \left(\frac{4}{81}\right)^2 \frac{0.3 - \ln \left(\frac{2}{9} - q\right)}{\left(\frac{2}{9} - q\right)^2} + \frac{2}{27} + F(\tau) \quad (8.9)$$

Легко видеть, что граничные условия в точке  $A$  (7.3) выполняются, если при  $\delta^0 \rightarrow 0$ ,  $y^0 \rightarrow 0$  параметр  $q \rightarrow -\infty$

$$\chi_0 \rightarrow 0, \quad \varphi_0 \rightarrow 0, \quad \frac{\varphi_2}{q^2} \rightarrow -\frac{1}{2}, \quad \frac{\psi_3}{q^2} \rightarrow \frac{1}{3} \quad (8.10)$$

Можно показать, что первые два условия могут быть выполнены только при  $u \equiv 0$ . Вторые два условия, как видно из (8.9), выполняются автоматически.

На характеристике  $BD$  течение (8.1) должно переходить в одномерное течение (6.4). Представим (6.4) в виде

$$\mu^0 = \frac{q}{\tau} y^{02} + 1 - \mu_0, \quad \delta^0 = qy^{02} + \tau - \tau_* - \int_{\tau_*}^{\tau} \mu_0 d\tau, \quad v^0 = 2 \frac{d\mu_0}{d\tau} y^0 \quad (8.11)$$

Из условия сопряжений решений (8.1) и (8.11) на характеристической поверхности  $BD$ , на которой

$$q = q_0(\tau) = \frac{\varepsilon\tau}{2\varepsilon(\tau+1) - e^\tau} \quad (8.12)$$

имеем

$$\varphi_2(q_0, \tau) = q_0 / \tau, \quad \varphi_0(q_0, \tau) = 1 - \mu_0$$

$$\chi_0(q_0, \tau) = \tau - \tau_* - \int_{\tau_*}^{\tau} \mu_0 d\tau, \quad \psi_1 = 2d\mu_0 / d\tau, \quad \psi_3 = 0 \quad (8.13)$$

Из первого равенства определяем произвольную функцию  $F(\tau)$

$$F(\tau) = \frac{q_0}{\tau} + \frac{1}{2} q_0^2 - \frac{2}{81} \ln \left( \frac{2}{9} - q_0 \right) - \frac{1}{3} q_0 + \\ + \frac{1}{60} \left( \frac{4}{81} \right)^2 \frac{0.3 - \ln(2/9 - q_0)}{(2/9 - q_0)^2} - \frac{2}{27} \quad (8.14)$$

Покажем, что при выполнении условия  $\varphi_0(q_0, \tau) = 1 - \mu_0$  последние равенства (8.13) выполняются тождественно. Заметим, что

$$\frac{dq_0}{d\tau} = \frac{q_0}{\tau} - q_0 + 2q_0^2 = \varphi_2(q_0, \tau) - q_0 + 2q_0^2 \quad (8.15)$$

и, следовательно, вдоль кривой  $q = q_0(\tau)$

$$\varphi_{2\tau} + \varphi_{2q}(\varphi_2 - q + 2q^2) = \frac{d\varphi_2}{d\tau}, \quad \varphi_{0\tau} + \varphi_{0q}(\varphi_2 - q + 2q^2) = \frac{d\varphi_0}{d\tau} \quad (8.16)$$

Подставляя (8.16) в соответствующие выражения из (8.2) и производя дифференцирование, получаем

$$\psi_3(q_0, \tau) = 0, \quad \psi_1(q_0, \tau) = 2d\mu_0/d\tau$$

Таким образом, задача свелась к интегрированию уравнения

$$v_\tau + v_q(\varphi_2 - q + 2q^2) + v(4q - 1) = 0 \quad (8.17)$$

Причем, функция  $v = v(q, \tau)$ , как следует из (8.10) и (8.13), должна удовлетворять следующим условиям:

$$\int_{-\infty}^{q_0} v dq = \tau - \tau_* - \int_{\tau_*}^{\tau} \mu_0 d\tau, \quad \int_{-\infty}^{q_0} \varphi_{2q} v dq = 1 - \mu_0 \quad (8.18)$$

Второе условие является следствием первого. Действительно, уравнение (8.17) можно представить в виде

$$v_\tau + [v(\varphi_2 - q + 2q^2)]_q = v\varphi_{2q} \quad (8.19)$$

проинтегрировав почленно это уравнение и воспользовавшись тем, что

$$\frac{d}{d\tau} \int_{-\infty}^{q_0} v dq = \int_{-\infty}^{q_0} v_\tau dq + v(q_0, \tau) [\varphi_2(q_0, \tau) - q_0 + 2q_0^2] \quad (8.20)$$

получим

$$\int_{-\infty}^{q_0} \varphi_{2q} v dq = \frac{d}{d\tau} \int_{-\infty}^{q_0} v dq = 1 - \mu_0 \quad (8.21)$$

§ 9. При определении функций  $\varphi_0$  и  $\chi_0$  более удобна для интегрирования система уравнений

$$\varphi_{0q} = \varphi_{2q}\chi_{0q}, \quad \chi_{0\tau} + \chi_{0q}(\varphi_2 - q + 2q^2) = \varphi_0 \quad (9.1)$$

эквивалентная уравнению (8.17). Причем, граничные условия (8.10) и (8.13), налагаемые на эти функции, задаются на характеристических кривых, так как кривые

$$q = q_0(\tau), \quad q = -\infty \quad (9.2)$$

удовлетворяют уравнению характеристик этой системы. Таким образом, для определения функций  $\varphi_0$  и  $\chi_0$  должна быть решена задача Гурса.



§ 10. Положение ударного фронта  $\delta^\circ = \delta^\circ(y^\circ, \tau)$  определяется дифференциальным уравнением в частных производных первого порядка

$$\frac{1}{2}\mu_0 + \frac{\partial \delta^\circ}{\partial \tau} + \frac{1}{2}y^\circ \frac{\partial \delta^\circ}{\partial y^\circ} = \frac{1}{2}\mu^\circ + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \delta^\circ}{\partial y^\circ}\right)^2 \quad (10.1)$$

Причем на характеристике  $BD$  ударный фронт (10.1), нарушенный влиянием свободной поверхности, должен переходить в невозмущенный ударный фронт  $BF$  (фиг. 1), положение которого определяется (6.6), т. е.

$$\delta^\circ(y_B^\circ, \tau) = \sqrt{\tau_*} \sqrt{\tau} - \delta_0 - \tau_* = \sqrt{\tau_*} \sqrt{\tau} - \int_{\tau_*}^{\tau} \mu_0 d\tau - \tau_* \quad (10.2)$$

$$\frac{\partial \delta^\circ}{\partial y^\circ} = 0 \quad \text{при } y^\circ = y_B^\circ$$

Таким образом, чтобы определить положение ударного фронта при любом  $\tau$ , необходимо решить задачу Коши.

§ 11. В уравнение (10.1) и граничные условия (8.13) и (10.2) входит произвольная функция  $\mu_0(\tau)$ . Эта функция определяется из условия

$$\delta^\circ(0, \tau) = 0 \quad (11.1)$$

Как показали расчеты, достаточно эффективным методом решения этой задачи оказался метод итерации. Итерационный процесс строился следующим образом: искомая функция была взята в виде

$$\mu_0(\tau) = 0.5 \frac{\sqrt{\tau_*}}{\sqrt{\tau}} - B \left(\frac{\tau_*}{\tau}\right)^\gamma \quad (B, \gamma = \text{const}) \quad (11.2)$$

При этом значении  $\mu_0$  на электронной счетной машине методом характеристик решались совместно задача Гурса и задача Коши (см. § 9 и § 10), т. е. полностью рассчитывалось поле давлений и скоростей при любом  $\tau$  ( $\tau$  бралось в интервале от 1.15 до 4.6, что соответствует расстоянию до 180 радиусов заряда). Из условия (11.1) вычислялись поправки к значению функции  $\mu_0(\tau)$ . Полученная таким образом  $\mu_0(\tau)$  опять интерполировалась подбором  $B$  и  $\gamma$  формулой (11.2) и т. д. Лучше всего условие (11.1) выполняется, если положить

$$\mu_0(\tau) = 0.5 \sqrt{\tau_*} / \sqrt{\tau} - 0.143 (\tau_* / \tau)^{0.72} \quad (11.3)$$

Следует отметить, что степень удовлетворения условия (11.1) весьма чувствительна к изменению функции  $\mu_0(\tau)$ . Это позволяет считать, что функция  $\mu_0(\tau)$  найдена достаточно точно.

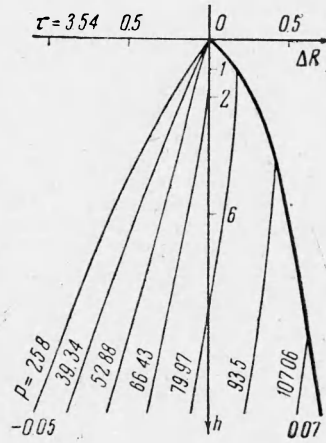
На фиг. 2 приведены поля давлений при  $\tau = 3.54$  (т. е. на расстоянии 60 радиусов заряда) в координатах  $h, \Delta R$ , где  $h$  — глубина в радиусах заряда,  $\Delta R$  — расстояние в радиусах заряда от точки  $A$ . Из (1.4) имеем

$$\Delta R = \frac{1}{2}(n+1)\beta M_0 \delta^\circ, \quad h = \beta \sqrt{1/2(n+1)} \sqrt{M_0} y^\circ e^{1/2\tau} \quad (11.4)$$

Постоянная  $M_0$  определена по формуле

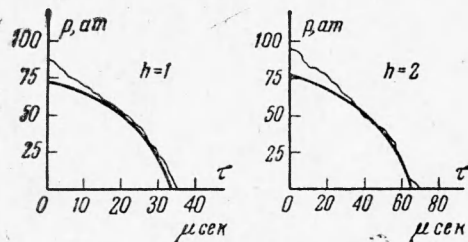
$$p/Bn = M_0 [\mu^\circ + \mu_0(\tau)] e^{-\tau} \quad (11.5)$$

где  $p$  определено по формуле (5.5), а  $\mu^\circ$  — из (6.6).



Фиг. 2

На фиг. 3 приведено сравнение теоретических и экспериментальных кривых давления — время на глубине  $h = 1$ ,  $h = 2$ . Экспериментальные кривые взяты из работы Б. Д. Христофорова [12].



Фиг. 3

Представляет интерес величина

$$k = \frac{p'}{p_1} = \frac{\mu_0(\tau)}{V\tau_* / V\tau}$$

где  $p'$  — давление на фронте ударной волны в точке  $A$ ,  $p_1$  — давление на невозмущенном ударном фронте. По расчетам  $k \approx 0.4$  слабо зависит от расстояния.

При определении течения в возмущенной области нами из физических соображений, изложенных в работе [1], в качестве граничного условия на свободной поверхности было принято соотношение (7.4). Необходимость привлечения этой гипотезы отпала бы в случае точного решения задачи. Однако частные решения (8.1) не обладают степенью произвола, достаточной для точного удовлетворения условию равенства касательных к ударному фронту составляющих вектора скорости потока по обе стороны ударного фронта, которое в наших обозначениях имеет вид

$$\mu \frac{\partial \delta}{\partial y} + \nu = 0 \quad (11.6)$$

Соотношение (7.4) является в этом случае некоторым аналогом (11.6), хотя, конечно, не обладает полнотой этого граничного условия, поскольку решение в этом случае не единственно. Тем не менее (7.4) — весьма жесткое ограничение, налагаемое на класс решений, удовлетворяющих всем остальным граничным условиям.

Действительно, в этом случае «фиксируются» относительно точки  $A$  положение невозмущенного ударного фронта, положение характеристики  $BD$ , направление изобар в точке  $A$  и направление ударного фронта в этой точке. При этом условие равенства касательных к ударному фронту составляющих вектора скорости потока по обе стороны от фронта, пользуясь тем обстоятельством, что к функции  $\nu$  можно прибавить произвольную функцию от времени  $\nu_0(\tau)$ , можно удовлетворить приближенно в интегральном смысле (интегрирование производится вдоль ударного фронта)

$$\int_e \left( \mu \frac{\partial \delta}{\partial y} + \nu \right) de = 0$$

В заключение автор благодарит С. А. Христиановича, под руководством которого была выполнена эта работа.

Поступила 21 V 1962

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гриб А. А., Рябинин А. Г., Христианович С. А. Об отражении плоской ударной волны в воде от свободной поверхности. ПММ, 1956, т. XX, вып. 4.
2. Ландау Л. Д. Об ударных волнах на далеких расстояниях от места их возникновения. ПММ, 1945, т. IX, вып. 64.
3. Христианович С. А. Ударная волна на значительном расстоянии от места взрыва. ПММ, 1956, т. XX, вып. 5.
4. Губкин К. Распространение разрывов в звуковых волнах. ПММ, 1958, XXII, вып. 4.
5. Коротков П. Ф. Об ударных волнах на значительном расстоянии от места взрыва. Изв. АН СССР, ОТН, 1958, № 3.
6. Рыжов О. С., Христианович С. А. О нелинейном отражении слабых ударных волн. ПММ, 1958, т. XXII, вып. 5.
7. Луговцов Б. А. Распространение ударной волны в водоеме постоянной глубины на большом расстоянии от места взрыва. ПМТФ, 1962, № 3.
8. Гриб А. А., Березин А. Г. Нерегулярное отражение плоской ударной волны в воде от свободной поверхности. ПМТФ, 1960, № 2.
9. Заславский Б. И. Некоторые частные решения уравнений «коротких волн». ПМТФ, 1962, № 1.
10. Гриб А. А., Рыжов О. С., Христианович С. А. Теория коротких волн. ПМТФ, 1960, № 1.
11. Коул. Подводный взрыв. ИЛ, 1950.
12. Христофоров Б. Д. Взаимодействие ударной волны со свободной поверхностью. ПМТФ, 1961, № 1.