И. М. Гельфанд, М. И. Граев, Интегральные преобразования, связанные с комплексами прямых в комплексном аффинном пространстве, *Докл. АН СССР*, 1961, том 138, номер 6, 1266–1269

Доклады Академии наук СССР
1961. Том 138, № 6

МАТЕМАТИКА

Член-корреспондент АН СССР И. М. ГЕЛЬФАНД и М. И. ГРАЕВ

# ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ, СВЯЗАННЫЕ С КОМПЛЕКСАМИ ПРЯМЫХ В КОМПЛЕКСНОМ АФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Рассмотрим трехмерное комплексное аффинное пространство точек $z = (z^1, z^2, z^3)$ и в нем всевозможные комплексные прямые. Будем задавать эти прямые плюкеровыми координатами $\alpha = (\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$ и $p = (p_1, p_2, p_3)$. По определению, $\alpha$ есть направляющий вектор прямой, а $p$ — векторное произведение $p = [\alpha, z]$ вектора $\alpha$ и радиуса-вектора произвольной точки $z$ прямой *.

Плюкеровы координаты связаны между собой соотношением $\alpha^1 p_1 + \alpha^2 p_2 + \alpha^3 p_3 = 0$. Любое однородное уравнение $F(\alpha, p) = 0$ между координатами $\alpha$, $p$, не являющееся следствием уравнения $\alpha^1 p_1 + \alpha^2 p_2 + \alpha^3 p_3 = 0$, определяет некоторое трехпараметрическое семейство прямых, называемое комплексом ([1]). В дальнейшем предполагается, что $F$ — однородный многочлен от $\alpha$ и $p$.

Сформулируем задачу интегральной геометрии для комплекса прямых. Пусть задана функция $f(z) = f(z^1, z^2, z^3)$. Будем предполагать, что она достаточное число раз дифференцируема (по $z$ и $\bar{z}$) и достаточно быстро убывает на бесконечности. Определим интегралы функции $f(z)$ по прямым $\alpha$, $p$ комплекса следующим образом:

$$\varphi(\alpha, p) = \frac{i}{2} \int f(\alpha t + \beta)\, dt\, d\bar{t}, \tag{1}$$

где $\beta$ — произвольная точка прямой $\alpha, p$, т. е. $p = [\alpha, \beta]$**. Задача состоит в том, чтобы по функции $\varphi(\alpha, p)$ восстановить исходную функцию $f(z)$, т. е. чтобы получить обращение формулы (1).

В данной заметке эта задача решается для комплексов, удовлетворяющих следующему дополнительному условию.

Условие касания. Пусть $\alpha$, $p$ — произвольная прямая комплекса; $z'$, $z''$ — произвольные точки на прямой $\alpha$, $p$. Рассмотрим все прямые комплекса, проходящие через $z'$ или $z''$. Эти прямые образуют две конические поверхности с общей образующей $\alpha$, $p$ ***. Требуется, чтобы эти конические поверхности всегда касались друг друга вдоль общей образующей $\alpha$, $p$.

Условию касания удовлетворяют комплексы следующего вида: комплекс всех прямых, касающихся некоторой (алгебраической) поверхности; комплекс всех прямых, пересекающих некоторую (алгебраическую) кривую; комплекс всех прямых, параллельных образующим некоторой (алгебраической) конической поверхности.

* Таким образом, равенство $p = [\alpha, z]$ можно рассматривать как векторное уравнение прямой, заданной плюкеровыми координатами $\alpha$ и $p$.

** По определению, $\frac{i}{2}\, dt\, d\bar{t} = d\sigma\, d\tau$, где $t = \sigma + i\tau$.

*** Не считая особого случая, когда все прямые, проходящие через одну из точек $z'$, $z''$, принадлежат комплексу. В этом случае будем предполагать условие касания выполненным.

*Для того чтобы комплекс, заданный уравнением $F(\alpha, p) = 0$, удовлетворял условию касания, необходимо и достаточно, чтобы плюкеровы координаты прямых комплекса удовлетворяли соотношению*

$$F'_{\alpha^1} F'_{p_1} + F'_{\alpha^2} F'_{p_2} + F'_{\alpha^3} F'_{p_3} = 0.$$

Для комплексов, удовлетворяющих условию касания, задача интегральной геометрии имеет единственное решение. Это решение локально. Именно, чтобы восстановить значение функции $f$ в некоторой точке $z_0$, достаточно знать только интегралы по прямым комплекса, проходящим через точку $z_0$, и по бесконечно близким к ним прямым комплекса (притом можно рассматривать лишь бесконечно близкие параллельные прямые). Оказывается, что рассматриваемые комплексы — это в некотором смысле наиболее общие комплексы, для которых решение задачи интегральной геометрии единственно и локально (см. примечание ниже). Дадим решение задачи.

Пусть комплекс задан уравнением $F(\alpha, p) = 0$. Будем искать значение функции $f(z)$ в некоторой точке $z_0$. Для этого проведем сперва через точку $z_0$ всевозможные прямые комплекса. Направляющие векторы $\alpha$ этих прямых удовлетворяют уравнению

$$G(\alpha; z_0) \equiv F(\alpha, [\alpha, z_0]) = 0. \qquad (2)$$

Введем обозначение $a_i(\alpha; z_0) = G'_{\alpha^i}(\alpha; z_0)$, $i = 1, 2, 3$. Сдвинем затем в комплексе каждую из прямых $\alpha$, $p$, проходящих через точку $z_0$, параллельно себе на бесконечно малое расстояние. Плюкеровы координаты $\alpha$ при этом сдвиге не изменятся, а координаты $p$ получат приращение $dp = (dp_1, dp_2, dp_3)$. Можно показать, что в комплексе, удовлетворяющем условию касания, вектор $(dp_1, dp_2, dp_3)$ пропорционален вектору $(a_1, a_2, a_3)$.

Введем операторы «бесконечно малого параллельного сдвига прямых комплекса, проходящих через точку $z_0$»:

$$L_{z_0}\varphi = \sum a_i(\alpha; z_0)\, \varphi'_{p_i}(\alpha, [\alpha, z_0]),$$

$$\overline{L}_{z_0}\varphi = \sum \overline{a_i(\alpha; z_0)}\, \varphi'_{\overline{p}_i}(\alpha, [\alpha, z_0]),$$

где $\alpha$ удовлетворяет уравнению (2).

Теорема. *Предположим, что комплекс $F(\alpha, p) = 0$ удовлетворяет условию касания, и пусть в конусе, образованном прямыми комплекса, проходящими через точку $z_0$, точка $z_0$ является единственной особой точкой. Тогда значение функции $f(z)$ в точке $z_0$ выражается через интегралы $\varphi(\alpha, p)$ функции $f(z)$ по прямым комплекса следующей формулой обращения:*

$$f(z_0) = C_{z_0} \int_{\Gamma} L_{z_0} \overline{L}_{z_0} \varphi(\alpha, [\alpha, z_0])\, \omega_{z_0}(\alpha)\, \overline{\omega_{z_0}(\alpha)}. \qquad (3)$$

*Интегрирование ведется по произвольному контуру $\Gamma$ на конусе (2), пересекающему каждую образующую конуса по одному разу*; $\omega_{z_0}(\alpha)$ — дифференциальная форма на конусе (2) вида*

$$\omega_{z_0}(\alpha) = a_3^{-1}(\alpha^1 d\alpha^2 - \alpha^2 d\alpha^1) = a_1^{-1}(\alpha^2 d\alpha^3 - \alpha^3 d\alpha^2) = a_2^{-1}(\alpha^3 d\alpha^1 - \alpha^1 d\alpha^3).$$

*Постоянная $C_{z_0}$ в формуле (3) выражается формулой*

$$C_{z_0}^{-1} = \pi\Delta \int_{\Gamma} B(a_1, a_2, a_3)\, A^{-2}(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)\, \omega_{z_0}(\alpha)\, \overline{\omega_{z_0}(\alpha)},$$

*где $A$, $B$ — произвольная пара сопряженных эрмитовых положительно определенных форм, $\Delta$ — дискриминант формы $A$.*

* На самом деле такого контура $\Gamma$, пересекающего каждую образующую конуса по одному разу, не существует, и приведенное выражение следует понимать так. Пространство образующих конуса разбивается на достаточно малые области, и для каждой области берется контур $\Gamma_i$, пересекающий образующие этой области по одному разу. Интеграл (3) определяется как сумма интегралов по $\Gamma_i$. Легко показать, что интегралы по $\Gamma_i$ не зависят от выбора контуров $\Gamma_i$, а их сумма не зависит от способа разбиения пространства образующих на части.

Ранее формула обращения была получена другим методом для частных случаев, а именно в ([2]) для комплекса прямых, пересекающих окружность, и затем в ([3]) для комплекса прямых, пересекающих произвольную алгебраическую кривую.

П р и м е ч а н и е. Формулу обращения можно получить и в более общем виде:

$$f(z_0) = C_{z_0}\int\limits_\Gamma (\mathcal{L}_{z_0} + w)(\overline{\mathcal{L}}_{z_0} + \bar{w})\,\varphi(\alpha, [\alpha, z_0])\,\omega_{z_0}(\alpha)\,\overline{\omega_{z_0}(\alpha)}, \tag{4}$$

где $\mathcal{L}_{z_0}$, $\overline{\mathcal{L}}_{z_0}$ — операторы бесконечно малого (не обязательно параллельного) сдвига прямых комплекса, проходящих через точку $z_0$:

$$\mathcal{L}_{z_0}\varphi = \sum (u^i\varphi'_{\alpha^i} + v_i\varphi'_{p_i}),$$

$$\overline{\mathcal{L}}_{z_0}\varphi = \sum (\bar{u}^i\varphi'_{\bar{\alpha}^i} + \bar{v}_i\varphi'_{\bar{p}_i}),$$

$w = w(\alpha)$ — некоторая функция. Нетрудно найти необходимые и достаточные условия на функции $u^i$, $v_i$, $w$, при которых имеет место формула обращения (4). Этих условий мы приводить здесь не будем.

*Формула обращения вида* (4) *имеет место только для тех комплексов, которые удовлетворяют условию касания.*

Существуют комплексы прямых, для которых задача интегральной геометрии имеет неоднозначное решение. В качестве примера укажем комплекс первого порядка $k_1\alpha^1 + k_2\alpha^2 + k_3\alpha^3 + l^1p_1 + l^2p_2 + l^3p_3 = 0$, где $k_1l^1 + k_2l^2 + k_3l^3 \neq 0$ *.

Поставим для комплекса первого порядка другую, эквивалентную предыдущей, задачу интегральной геометрии: зная интегралы функции $f(z)$ по прямым комплекса, вычислить интеграл функции $f(z)$ по произвольной прямой.

С комплексом первого порядка связано инволютивное преобразование в пространстве всех прямых, сохраняющее прямые комплекса. Именно, если провести прямые комплекса, пересекающие заданную прямую $\pi$, то эти прямые пересекут также некоторую другую прямую $\pi'$. Прямую $\pi'$ назовем с о п р я ж е н н о й с прямой $\pi$ относительно комплекса. Оказывается, *если известны интегралы функции* $f(z)$ *по прямым комплекса* $k_1\alpha^1 + k_2\alpha^2 + k_3\alpha^3 + l^1p_1 + l^2p_2 + l^3p_3 = 0$, *где* $k_1l^1 + k_2l^2 + k_3l^3 \neq 0$, *то однозначно определена лишь сумма интегралов функции* $f(z)$ *по любой паре сопряженных прямых. Тем самым задача интегральной геометрии имеет однозначное решение в классе таких функций* $f(z)$, *для которых совпадают их интегралы по сопряженным прямым.*

Рассмотрим для простоты комплекс $\alpha^1 = \lambda p_1$, где $\lambda \neq 0$ (к виду $\alpha^1 = \lambda p_1$ может быть приведено подходящим аффинным преобразованием пространства уравнение любого комплекса первого порядка). Прямая, сопряженная прямой $(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3;\ p_1, p_2, p_3)$ относительно комплекса $\alpha^1 = \lambda p_1$, имеет плюкеровы координаты $(\lambda p_1, \alpha^2, \alpha^3;\ \lambda^{-1}\alpha^1, p_2, p_3)$. *Сумма интегралов функции* $f(z)$ *по паре сопряженных относительно комплекса* $\alpha^1 = \lambda p_1$ *прямых выражается через интегралы функции* $f(z)$ *по прямым комплекса следующим образом*:

$$\varphi(\alpha_0^1, \alpha_0^2, \alpha_0^3;\ p_1^0, p_2^0, p_3^0) + \varphi(\lambda p_1^0, \alpha_0^2, \alpha_0^3;\ \lambda^{-1}\alpha_0^1, p_2^0, p_3^0) =$$
$$= C|\alpha_0^1 - \lambda p_1^0|^2 \int L\bar{L}\varphi(\lambda, \alpha^2, \alpha^3;\ 1, p_2, p_3)\,|\alpha_0^2\alpha^3 - \alpha_0^3\alpha^2|^{-4}\,d\alpha^2\,d\alpha^3\,d\bar{\alpha}^2\,d\bar{\alpha}^3. \tag{5}$$

* Геометрия комплексов первого порядка подробно рассмотрена в ([1]).

Здесь $L\varphi = \alpha^2\varphi'_{p_3} - \alpha^3\varphi'_{p_2}$, $\bar{L}\varphi = \bar{\alpha}^2\varphi'_{\bar{p}_3} - \bar{\alpha}^3\varphi'_{\bar{p}_2}$ — операторы бесконечно малого параллельного сдвига в комплексе; интеграл берется по множеству всех прямых комплекса, пересекающих данную пару сопряженных прямых $(\alpha_0^1, \alpha_0^2, \alpha_0^3; p_1^0, p_2^0, p_3^0)$ и $(\lambda p_1^0, \alpha_0^2, \alpha_0^3; \lambda^{-1}\alpha_0^1, p_2^0, p_3^0)$ *.

Поступило
8 III 1961

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ф. Клейн, Высшая геометрия, 1939. [2] И. М. Гельфанд, УМН, **15**, в. 2 (92), 155 (1960). [3] А. А. Кириллов, ДАН, **137**, № 2 (1961).

* При $\alpha_0^2 = \alpha_0^3 = 0$ интеграл в (5) следует понимать в смысле предельного значения при $\alpha_0^2, \alpha_0^3 \to 0$. Отметим, что при $\alpha_0^2 = \alpha_0^3 = 0$ одна из сопряженных прямых становится бесконечно удаленной, и тем самым интеграл $\varphi$ по этой прямой обращается в нуль.