



Общероссийский математический портал

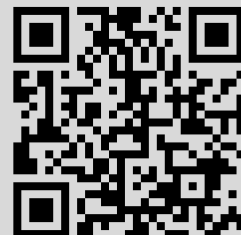
М. И. Белишев, А. Ф. Вакуленко, Трехмерная обратная задача акустического рассеяния (ВС-метод), *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 2024, том 533, 55–76

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.84

20 марта 2025 г., 15:39:52



М. И. Белишев, А. Ф. Вакуленко

**ТРЕХМЕРНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА
АКУСТИЧЕСКОГО РАССЕЯНИЯ (ВС-МЕТОД)**

§1. ВВЕДЕНИЕ

О работе. Метод граничного управления (*ВС-метод*) это один из подходов к обратным задачам математической физики [2–4, 8, 9]. Он имеет междисциплинарный характер и использует разнообразные связи обратных задач с теорией систем и теорией управления, функциональным анализом (функциональные модели операторов, банаховы алгебры), асимптотическими методами (геометрической оптикой), комплексным анализом. В данной работе предлагается версия ВС-метода для трехмерной обратной задачи рассеяния для локально возмущенного волнового (акустического) уравнения. Ее особенность и преимущество состоят в локальном (оптимальном по времени) восстановлении подлежащих определению параметров. Это свойство востребовано в актуальных приложениях, таких как акустика и геофизика.

Постановки и результаты.

• Обозначим $B_R(x) := \{x' \in \mathbb{R}^3 \mid |x - x'| < R\}$, $S^2 := \{\theta \in \mathbb{R}^3 \mid |\theta| = 1\}$, $\Sigma := [0, \infty) \times S^2$. Пусть $q \in L_\infty(\mathbb{R}^3)$ есть вещественная финитная функция (*потенциал*) и выполнено $\text{supp } q \subset B_a(0)$.

Рассматривается система

$$u_{tt} - \Delta u + qu = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^3 \times (-\infty, 0); \quad (1)$$

$$u|_{|x| < -t} = 0, \quad t < 0; \quad (2)$$

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} s u((-s + \tau)\omega, s) = f(\tau, \omega), \quad (\tau, \omega) \in \Sigma; \quad (3)$$

Ключевые слова: трехмерная динамическая система, описываемая локально возмущенным волновым уравнением, определение потенциала по данным рассеяния, метод граничного управления.

в которой $f \in L_2(\Sigma)$ есть *управление*, $u = u^f(x, t)$ – решение (*волна*); значение $t = 0$ считается финальным моментом. В силу гиперболичности системы, ее расширение

$$u_{tt} - \Delta u + qu = 0 \quad \text{в } \{(x, t) \mid x \in \mathbb{R}^3, -\infty < t < |x|\}; \quad (4)$$

$$u|_{|x| < -t} = 0, \quad t < 0; \quad (5)$$

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} s u((-s + \tau)\omega, s) = f(\tau, \omega), \quad (\tau, \omega) \in \Sigma; \quad (6)$$

корректно определено. Расширенной системе приписывается *оператор реакции*

$$(Rf)(\tau, \omega) := \lim_{s \rightarrow +\infty} s u^f((s + \tau)\omega, s), \quad (\tau, \omega) \in \Sigma.$$

Обратная задача, постановка которой уточняется ниже, состоит в определении q по заданному R .

• Для формулировки результата введем пространства $\mathcal{F} := L_2(\Sigma)$ и $\mathcal{H} := L_2(\mathbb{R}^3)$ вместе с семействами их подпространств $\mathcal{F}^\xi := \{f \in \mathcal{F} \mid f|_{\tau < \xi} = 0\}$ и $\mathcal{H}^\xi := \{y \in \mathcal{H} \mid y|_{B_\xi(0)} = 0\}$ при $\xi > 0$. Пусть X^ξ есть проектор в \mathcal{F} на \mathcal{F}^ξ , срезающий управления на $\Sigma^\xi := \{(\tau, \omega) \in \Sigma \mid \tau \geq \xi\}$.

Оператор $W : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{H}$, $Wf := u^f(\cdot, 0)$ ограничен (см., например, [11]). По гиперболичности системы, из $f \in \mathcal{F}^\xi$ следует $u^f(\cdot, 0) \in \mathcal{H}^\xi$, а значения волны $u^f(\cdot, 0)$ определяются частью $q|_{|x| \geq \xi}$ потенциала (не зависят от $q|_{|x| < \xi}$). По той же причине, значения $(Rf)|_{\tau \geq \xi}$ также определяются значениями $q|_{|x| \geq \xi}$. Такая локальность соответствия $q \Rightarrow R$ мотивирует следующую постановку *обратной задачи*: для произвольно выбранного $\xi > 0$, определить $q|_{|x| \geq \xi}$ по оператору $X^\xi R \upharpoonright \mathcal{F}^\xi$, действующему в подпространстве "запаздывающих" управлений \mathcal{F}^ξ .

Наш главный результат состоит в следующем. Для произвольного $\xi > 0$, по заданному оператору $R^\xi := X^\xi R \upharpoonright \mathcal{F}^\xi$, действующему в \mathcal{F}^ξ , мы восстанавливаем оператор $W^\xi := W \upharpoonright \mathcal{F}^\xi$, который действует из \mathcal{F}^ξ в \mathcal{H}^ξ . Соответствующая процедура интерпретируется как *визуализация волн*. Знание W^ξ дает возможность восстановить график оператора $(\Delta - q) \upharpoonright \mathcal{H}^\xi$. График очевидным образом определяет часть $q|_{\mathbb{R}^3 \setminus B_\xi(0)}$ потенциала. Локальность (оптимальность по времени) восстановления $R^\xi \Rightarrow q|_{\mathbb{R}^3 \setminus B_\xi(0)}$ является специфической чертой и главным преимуществом ВС-метода.

Комментарии.

- Рассматриваемая задача – "давний долг" ВС-метода. Ее решение подготовлено работами [10–13]. Заключительный шаг сделан в недавней работе [15], которая прояснила характер управляемости системы (1)–(3). Это соответствует тезису теории систем, которым руководствуется ВС-метод: чем лучше система управляема, тем богаче информация, которую можно извлечь о системе из внешних наблюдений над ней [18]. Удачным оказалось то, что установленный характер управляемости позволил использовать ВС-технику [15].

- Еще один тезис философского плана из теории систем [18], которому следует ВС-метод, состоит в следующем. Наблюдатель, проводящий внешние измерения над системой, не имеет возможности оперировать с ее (невидимыми) внутренними состояниями. Для восстановления системы наблюдатель создает и использует "копии" внутренних состояний, извлекая их из данных измерений. Создание копий недоступных внутренних состояний интерпретируется как их *визуализация*. Во всех версиях ВС-метода такие копии присутствуют и используются в явной или неявной форме. В данной работе эту роль играет пространство $\widehat{\mathcal{H}}^\xi$, элементы которого доставляют копии \tilde{w}^f невидимых наблюдателю волн w^f из \mathcal{H}^ξ . Пространство $\widehat{\mathcal{H}}^\xi$ конструируется по оператору R^ξ .

Заметим, что визуализация волн по динамическим данным рассеяния использовалась и ранее в работах других авторов: [22].

- Основным инструментом решения класса обратных задач ВС - методом является *амплитудный интеграл* (АИ), обобщающий конструкцию операторного интеграла треугольного усечения М.С.Бродского и М.Г.Крейна [4, 7, 16, 17]. Мы приводим версию АИ, адекватную задаче рассеяния. Теоретико-операторная схема ВС-метода, основанная на треугольной факторизации, представлена в работе [9], в которой АИ интерпретируется как *диагональ* оператора W .

§2. ПРЯМАЯ ЗАДАЧА

Пространства и операторы. Опишем стандартные атрибуты теории систем для системы (1)–(3).

- *Внешнее пространство* управлений есть $\mathcal{F} := L_2(\Sigma)$. Оно содержит подпространства

$$\mathcal{F}^\xi := \{f \in \mathcal{F} \mid f|_{\tau < \xi} = 0\}, \quad \xi > 0,$$

образованные задержанными управлениями (ξ – величина задержки).

- *Внутреннее пространство состояний* есть $\mathcal{H} := L_2(\mathbb{R}^3)$; волны $u^f(\cdot, t)$ суть зависящие от времени элементы \mathcal{H} . Оно содержит подпространства

$$\mathcal{H}^\xi := \{y \in \mathcal{H} \mid \text{supp } y \subset \mathbb{R}^3 \setminus B_\xi(0)\}, \quad \xi > 0.$$

Внутреннее пространство также содержит *достижимые множества*

$$\mathcal{U}^\xi := \{u^f(\cdot, 0) \mid f \in \mathcal{F}^\xi\}, \quad \xi > 0.$$

Они замкнуты и, по гиперболичности задачи (1)–(3), имеет место вложение $\mathcal{U}^\xi \subset \mathcal{H}^\xi$ (см., например, [11]).

Подпространства (недостижимые множества)

$$\mathcal{D}^\xi := \mathcal{H}^\xi \ominus \mathcal{U}^\xi, \quad \xi > 0$$

называются *дефектными*. Следующий важный факт недавно установлен в [15]. Скажем, что $y \in \mathcal{H}^\xi$ есть *полигармоническая* функция порядка $n \in \mathbb{N}$, если она удовлетворяет уравнению $(-\Delta + q)^n y = 0$ в $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_\xi(0)}$, и будем писать $y \in \mathcal{A}_n^\xi$. Обозначим $\mathcal{A}^\xi := \text{span} \{\mathcal{A}_n^\xi \mid n \geq 1\}$ (замыкание в \mathcal{H}).

Предложение 1. *Справедливо соотношение*

$$\mathcal{A}^\xi = \mathcal{D}^\xi, \quad \xi > 0. \quad (7)$$

Соотношение (7) усиливает вложение $\mathcal{A}^\xi \subset \mathcal{D}^\xi$, установленное в [11]

- *Оператор управления* системы есть $W : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{H}$

$$Wf := u^f(\cdot, 0).$$

Он ограничен [11, 19] и справедливо представление

$$W = W_0 + K$$

с компактным оператором K , где W_0 – оператор управления (невозмущенной) системы (1)–(3) с $q = 0$. Отметим, что компактность K установлена в [11] в предположении, что потенциал q финитен. В дальнейшем через u_0^f мы обозначаем волны в невозмущенной системе.

Напомним, что $\text{supp } q \subset B_a(0)$. Область влияния потенциала есть

$$D := \{(x, t) \mid t > -a, t < |x| < t + 2a\}.$$

Вне ее, волны возмущенной и невозмущенной систем совпадают:

$$u^f = u_0^f \quad \text{в } \mathbb{R}^3 \setminus D. \quad (8)$$

Оператор W_0 унитарен: выполнено $W_0^* = W_0^{-1}$. Ниже мы рассматриваем W_0 и W более подробно.

- Оператор реакции $R : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$

$$(Rf)(\tau, \omega) := \lim_{s \rightarrow +\infty} s u^f((s + \tau)\omega, s), \quad (\tau, \omega) \in \Sigma$$

определен в расширенной системе (4)–(6). Он компактен и самосопряжен [11]. Соотношение (8) легко ведет к

$$Rf|_{\tau > 2a} = 0, \quad f \in \mathcal{F}. \quad (9)$$

Так как оператор $\Delta - q$, определяющий эволюцию системы, не зависит от времени, выполняется соотношение

$$u^f(\cdot, t - h) = u^{T_h f}(\cdot, t), \quad -\infty < t < \infty, \quad h \geq 0, \quad (10)$$

в котором T_h есть оператор задержки (сдвига), действующий в \mathcal{F} по правилу $(T_h f)(\cdot, t) := f(\cdot, t - h)$ (в предположении $f|_{\tau < 0} = 0$). Как следствие, можно вывести соотношение $RT_h = T_h^* R$.

Если потенциал достаточно гладкий, то оператор реакции допускает представление вида

$$(Rf)(\tau, \omega) = \int_{\Sigma} p(t + s; \omega, \theta) d\tau d\theta, \quad (\tau, \omega) \in \Sigma. \quad (11)$$

Зависимость ядра от суммы $t + s$ соответствует сплетению со сдвигом, отмеченному выше. В то же время, в силу (9), ядро p подчинено условию $\text{supp } p \subset [0, 2a] \times S^2 \times S^2$.

- Отображение $C : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$,

$$C := W^* W$$

называется *связывающим оператором*. Это ограниченный положительный оператор. По его определению, для $f, g \in \mathcal{F}$ имеем

$$(Cf, g)_{\mathcal{F}} = (Wf, Wg)_{\mathcal{H}} = (u^f(\cdot, 0), u^g(\cdot, 0))_{\mathcal{H}}, \quad (12)$$

т.е. C связывает гильбертовы метрики внешнего и внутреннего подпространств. Как показано в [11], справедливо соотношение

$$C = I + R. \quad (13)$$

Невозмущенная система. Невозмущенная система имеет вид

$$u_{tt} - \Delta u = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^3 \times (-\infty, 0); \quad (14)$$

$$u|_{|x| < -t} = 0, \quad t < 0; \quad (15)$$

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} s u((-\tau + s)\omega, s) = f(\tau, \omega), \quad (\tau, \omega) \in \Sigma; \quad (16)$$

волны в ней суть $u_0^f(x, t)$. Приведем некоторые известные факты о ней, взятые из работ [10, 11, 19].

- Решение u_0^f допускает явное представление. Фиксируем $\omega \in S^2$ и определим

$$\pi_b(\omega) := \begin{cases} \{\theta \in S^2 \mid \omega \cdot \theta = b\}, & b \in [-1, 1]; \\ \emptyset, & |b| > 1; \end{cases}$$

Множество $\pi_b(\omega)$ есть параллель единичной сферы с Северным полюсом ω ; ее длина равна $2\pi\sqrt{1-b^2}$; $\pi_0(\omega)$ – экватор; $\pi_{\pm 1}(\omega) = \pm\omega$. Для функции g на S^2 обозначим через

$$[g]_b(\omega) := \begin{cases} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-b^2}} \int_{\pi_b(\omega)} g(\theta) d\theta, & b \in (-1, 1); \\ g(-\omega), & b = -1; \\ g(\omega), & b = 1; \\ 0, & |b| > 1; \end{cases} \quad (17)$$

среднее значение g на параллели. Следующий результат установлен в [11].

Лемма 1. Пусть управление f и его производная f_τ принадлежат \mathcal{F} . Тогда справедливо представление

$$u_0^f(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{S^2} f_\tau(t+r\omega \cdot \theta, \theta) d\theta + \frac{1}{r} [f(0, \cdot)]_{-\frac{t}{r}}(\omega), \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad t \leq 0, \quad (18)$$

в котором $r = |x|$, $\omega = \frac{x}{|x|}$; $a \cdot b$ – стандартное скалярное произведение в \mathbb{R}^3 , и f_τ продолжена на $\tau < 0$ нулем.

Отметим особенность этого представления: слагаемые в (18) могут не быть квадратично суммируемыми в \mathbb{R}^3 , но сумма обязательно принадлежит \mathcal{H} [11]. В то же время, каждое из слагаемых является решением волнового уравнения (14).

• Важный используемый в дальнейшем факт состоит в том, что гиперболическая задача (14)–(16) корректна для *любого* управления при условии $f, f_\tau \in L_2^{\text{loc}}(\Sigma)$, безотносительно его поведения при $\tau \rightarrow \infty$, в то время как соответствующее решение $u_0^f(\cdot, t) \in L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$, $t \leq 0$ дается той же формулой (18). Мы называем такие f *допустимыми* и, если не оговорено противное, имеем дело с управлениями этого класса.

В частности, решения u_0^f корректно определены для *полиномиальных управлений*

$\mathcal{P} :=$

$$\left\{ p_{jm}^l(\tau, \omega) = \tau^{l-2j} Y_l^m(\omega) \mid l = 0, 1, \dots; 0 \leq j \leq \left[\frac{l}{2} \right]; -l \leq m \leq l \right\},$$

где Y_l^m суть стандартные сферические гармоники, [...] – целая часть. По контрасту с ними, управления из \mathcal{F} мы называем *обычными*. Ниже мы работаем с управлениями класса $\mathcal{F} \dot{+} \mathcal{P}$.

Есть два свойства, выделяющие класс \mathcal{P} . Во-первых, для $p \in \mathcal{P}$ волна u_0^p выражается через p явно [10, 12]. Во-вторых, эти волны исчезают при $t = 0$ и нечетны по времени: справедливы соотношения

$$u_0^p(\cdot, 0) = 0, \quad u_0^p(\cdot, t) = -u_0^p(\cdot, -t), \quad p \in \mathcal{P} \quad (19)$$

[10, 11]. Заметим, что в силу унитарности оператора из \mathcal{F} в \mathcal{H} , для обычных f соотношения (19) невозможны.

Замечание 1. Заметим наперед, что по свойству (8), возмущенные решения u^f также корректно определены для управлений $f \in \mathcal{F} \dot{+} \mathcal{P}$. Этот факт существенным образом используется ниже при доказательстве леммы 4.

• Хорошо известный в теории гиперболических уравнений факт состоит в том, что сингулярные управления инициируют сингулярные волны, причем сингулярности распространяются вдоль характеристик. Соотношения, выражающие сингулярности волн через сингулярности управлений описываются формулами геометрической оптики (ГО). Следующий результат – этого типа. Обозначим $S_R^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = R\}$ и напомним, что $B_R(x) = \{y \in \mathbb{R}^3 \mid |x - y| < R\}$.

Выберем допустимое управление f с условием $f(0, \cdot) \neq 0$. тем самым, будучи продолженным на $\tau < 0$ нулем, f имеет разрыв амплитуды в $\tau = 0$. Как следствие, волна u_0^f , локализованная в области $\{(x, t) \mid |x| \geq -t\}$, оказывается разрывной вблизи характеристического

конуса $\{(x, t) \mid t < 0, |x| = -t\}$. Другими словами, при каждом $t < 0$ волна $u_0^f(\cdot, t)$ несет разрыв амплитуды на своем переднем фронте S_{-t}^2 . Величины разрывов связаны следующим образом. Обозначим

$$s_+^p := \begin{cases} 0, & s < 0; \\ s^p, & s \geq 0; \end{cases}; \quad p \geq 0,$$

так что, s_+^0 есть функция Хевисайда.

Лемма 2. Пусть $f \in C_{\text{loc}}^2(\Sigma)$; выберем произвольно $t < 0$ и (малое) $\delta > 0$. Справедливо представление геометрической оптики

$$u_0^f(x, t) = \frac{f(0, \omega)}{r} (r+t)_+^0 + w_0(x, t, \delta) (r+t)_+^1, \quad 0 \leq r+t \leq \delta, \quad (20)$$

в котором $r = |x|$, $\omega = \frac{x}{|x|}$, и выполнена оценка $|w_0| \leq c_0 \|f\|_{C^2([0, \delta] \times S^2)}$, равномерная по x и t .

Доказательство. 1. Возьмем $g \in C^2(S^2)$ и $b = 1 - \delta$ с малым $\delta > 0$. Представляя по Тейлору–Лагранжу

$$g(\theta) = g(\omega) + \nabla_{\theta} g(\omega) \cdot (\theta - \omega) + (B(\omega, \theta)(\theta - \omega)) \cdot (\theta - \omega) \quad (21)$$

(здесь θ и ω рассматриваются как векторы в $\mathbb{R}^3 \supset S^2$) и интегрируя по (малой) параллели $\pi_{1-\delta}(\omega)$, в соответствии с (17), получим

$$[g]_{1-\delta}(\omega) = \frac{1}{|\pi_{1-\delta}(\omega)|} \int_{\pi_{1-\delta}(\omega)} g(\theta) d\theta \stackrel{\text{см. (21)}}{=} g(\omega) + h(\omega, \delta) \delta \quad (22)$$

с h удовлетворяющим оценке $|h| \leq c \|g\|_{C^2(S^2)}$. Заметим, что члены первого порядка с $\nabla_{\theta} g$ аннулируются при интегрировании по параллели.

2. Применяя (22) ко второму слагаемому в (18), имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} [f(0, \cdot)]_{-\frac{t}{r}}(\omega) &= \frac{1}{r} [f(0, \cdot)]_{1-\frac{r+t}{r}}(\omega) = \frac{f(0, \omega) + h(r, \omega, t, \delta)(r+t)}{r} \\ &= \frac{f(0, \omega)}{r} (r+t)_+^0 + w_1(r, t, \omega, \delta) (r+t)_+^1, \quad 0 \leq r+t \leq \delta \end{aligned} \quad (23)$$

с $|w_1| \leq c_1 \|f(0, \cdot)\|_{C^2(S^2)}$.

3. Как легко следует из (18), значения $u_0^f|_{0 \leq r+t \leq \delta}$ определяются значениями $f|_{0 \leq \tau \leq \delta}$ (не зависят от $f|_{\tau > \delta}$). Оценивая первое слагаемое в

(18) для $0 \leq r + t \leq \delta$, имеем:

$$\begin{aligned} \left| \int_{S^2} f_\tau(t + r\omega \cdot \theta, \theta) d\theta \right| &\leq \|f\|_{C^1([0, \delta] \times S^2)} \text{mes} \{ \theta \in S^2 \mid t + r\omega \cdot \theta \geq 0 \} \\ &= \|f\|_{C^1([0, \delta] \times S^2)} \text{mes} \left\{ \theta \in S^2 \mid \cos \theta \geq 1 - \frac{r+t}{r} \right\}. \end{aligned}$$

Легко проверить, что эта мера есть бесконечно-малая порядка $r + t$, что ведет к

$$\frac{1}{2\pi} \int_{S^2} f_\tau(t + r\omega \cdot \theta, \theta) d\theta = w_2(r, t, \omega, \delta) (r+t)_+^1, \quad 0 \leq r+t \leq \delta, \quad (24)$$

с $|w_2| \leq c_2 \|f\|_{C^1([0, \delta] \times S^2)}$.

4. Сопоставляя (23) с (24), мы приходим к (20). \square

Возмущенная система. • Обратимся к системе (4)–(6) и напомним, что выполнено $q \in L_\infty(\mathbb{R}^3)$ и $\text{supp } q \subset B_a(0)$. Вспомним о совпадении решений (8) вне области влияния потенциала D . В частности, равенство $u^f = u_0^f$ имеет место при $t \leq -a$. Последнее позволяет представить задачу (4)–(6) в эквивалентной форме

$$\begin{aligned} (u - u_0)_{tt} - \Delta(u - u_0) &= -qu && \text{в } \mathbb{R}^3 \times (-a, 0); \\ (u - u_0)|_{t < -a} &= 0, \end{aligned}$$

и затем свести ее к интегральному уравнению по формуле Кирхгофа

$$\begin{aligned} u^f(x, t) &= u_0^f(x, t) - \frac{1}{4\pi} \int_{B_{t+a}(x)} \frac{q(y) u^f(y, t + a - |x - y|)}{|x - y|} dy \\ &= u_0^f(x, t) - (Iu^f)(x, t), \quad (x, t) \in D. \end{aligned} \quad (25)$$

Это уравнение, в свою очередь, сводится к семейству уравнений того же вида в пространствах $L_2(D^b)$, где $D^b := \{(x, t) \in D \mid t \leq b\}$, $a < b < \infty$.

Фиксируем $b > a$. В предположении $q \in L_\infty(\mathbb{R}^3)$, оператор I действует в $L_2(D^b)$, является компактным (см. [11], (2.4)), и обладает непрерывной цепочкой инвариантных подпространств, состоящих из функций, локализованных в D^η с $\eta \leq b$. Как таковой, I является вольтерровым оператором [16]. Следовательно, оператор $\mathbb{I} - I$ ограниченно обратим в каждом $L_2(D^b)$ и мы имеем $u^f = (\mathbb{I} - I)^{-1} u_0^f \in L_2(D^b)$. Для

локально квадратично-суммируемых решений u^f , интеграл Iu^f зависит от $(x, t) \in D$ непрерывно. Поэтому, если $f, f_\tau \in C_{\text{loc}}(\Sigma)$, то $u_0^f \in C(D^b)$ выполнено в силу (18). Таким образом, справедливо $u^f = u_0^f - Iu^f \in C(D^b)$.

В силу произвольности b , приходим к $u^f \in C_{\text{loc}}(D)$.

- Формула Кирхгофа – адекватный инструмент анализа геометрической оптики. Исследуя поведение волны u^f вблизи ее переднего фронта, мы уже располагаем ГО-представлением (20) для слагаемого u_0^f в (25) и, таким образом, остается оценить вклад второго слагаемого. Сделаем это.

Напомним предположение $f \in C_{\text{loc}}^2(\Sigma)$, которое обеспечивает непрерывность u_0^f и, затем, непрерывность u^f . Как и выше, мы обозначаем $r = |x|$, $\omega = \frac{x}{|x|}$.

Выберем $t < 0$. По (25), интеграл Iu^f берется по (трехмерному) конусу $C_{x,t} := \{(y, s) \mid -a \leq s \leq t, |x - y| = t - s\}$. В то же время, u^f исчезает при $r < -t$. Поэтому фактически интеграл берется по части $\dot{C}_{x,t} := C_{x,t} \cap \{(y, s) \mid |y| \geq -t\}$. Когда вершина $(r\omega, t)$ конуса $C_{x,t}$ приближается к точке $(|t|\omega, t)$, лежащей на переднем фронте волны $u^f(\cdot, t)$ (т.е. при $r+t \rightarrow 0$), эта часть стягивается к отрезку $l_{x,t}$ прямой, который соединяет точку $(|t|\omega, t)$ с точкой $(a\omega, -a)$ в \mathbb{R}^4 .

Затем мы представляем $\dot{C}_{x,t} = \dot{C}'_{x,t} \cup \dot{C}''_{x,t}$, где $\dot{C}'_{x,t} := \{(x', t') \in \dot{C}_{x,t} \mid t - (r+t) \leq t' \leq t\}$ есть (малый) конус высоты $\frac{r+t}{2}$, и $\dot{C}''_{x,t} = \dot{C}_{x,t} \setminus \dot{C}'_{x,t}$ – оставшая часть. Часть $\dot{C}'_{x,t}$ содержит вершину (x, t) , в которой интегрант в Iu^f имеет сингулярность $\frac{1}{|x-y|}$. Как легко проверить, $\int_{\dot{C}'_{x,t}}$

имеет порядок малости $r+t$.

В то же время, часть $\dot{C}''_{x,t}$ проектируется вдоль образующих конуса $C_{x,t}$ на область $B_{t+a}(x) \setminus B_a(0) \subset \mathbb{R}^3$, имеющую поперечный размер $|r\omega - |t|\omega| = r+t \rightarrow 0$. В силу последнего, имеем $\text{mes}[B_{t+a}(x) \setminus B_a(0)] \sim r+t \rightarrow 0$. Таким образом, мера части $\dot{C}''_{x,t}$ есть бесконечно-малая порядка $r+t$. В итоге, интеграл $\int_{\dot{C}''_{x,t}}$ стремится к нулю как $r+t$.

Резюмируя приведенные выше рассуждения, мы получаем представление

$$(Iu^f)(x, t) = \dot{w}(x, t, \delta) (r+t)_+^1, \quad 0 \leq r+t \leq \delta, \quad (26)$$

в котором \dot{w} подчиняется оценке

$$\begin{aligned} |\dot{w}| &\leq c_1 \|q\|_{L_\infty(\mathbb{R}^3)} \|u^f\|_{C(D^a)} \leq c_2 \|q\|_{L_\infty(\mathbb{R}^3)} \|u_0^f\|_{C(D^a)} \\ &\leq c_3 \|q\|_{L_\infty(\mathbb{R}^3)} \|f\|_{C^1([0,\delta] \times S^2)} \end{aligned}$$

с соответствующими постоянными. Последнее неравенство следует из того, что $u_0^f|_{0 \leq r+t \leq \delta}$ определяется значениями $f|_{0 \leq \tau \leq \delta}$.

Добавим, что, рассматривая стягивание $\dot{C}_{x,t} \rightarrow l_{x,t}$ более детально и предполагая дополнительную гладкость потенциала q , можно вывести более точные классические ГО-формулы (см., например, Appendix в [7]).

- Объединяя (20) с (25) и (26) и обозначая $w := w_0 - \dot{w}$, мы приходим к следующему ГО-представлению возмущенных волн.

Лемма 3. Пусть $f \in C_{\text{loc}}^2(\Sigma)$; фиксируем $t < 0$ и (малое) $\delta > 0$. Справедливо представление

$$u^f(x, t) = \frac{f(0, \omega)}{r} (r+t)_+^0 + w(x, t, \delta) (r+t)_+^1, \quad 0 \leq r+t \leq \delta, \quad (27)$$

в котором $r = |x|$, $\omega = \frac{x}{|x|}$, и выполнена равномерная по x и t оценка $|w| \leq c \|q\|_{L_\infty(\mathbb{R}^3)} \|f\|_{C^2([0,\delta] \times S^2)}$.

Таким образом, если управление имеет вступление $f(0, \cdot) \neq 0$ при $\tau = 0$, то волна u^f имеет разрыв на переднем фронте, причем амплитуда разрыва равна $\frac{f(0, \cdot)}{r}$. Амплитуда растет при $r \rightarrow 0$, что соответствует эффекту фокусировки.

Совпадение форм (20) и (27) отражает известный факт: присутствие члена нулевого порядка q в операторе $\Delta - q$, управляющем эволюцией системы, не влияет на главные члены в ГО-формулах.

§3. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА

Амплитудный интеграл. Амплитудный интеграл (АИ) это операторная конструкция, являющаяся основным инструментом решения динамических обратных задач ВС-методом [2, 4, 7, 9]. Она обобщает классический операторный интеграл треугольного усечения [16, 17]. Здесь мы представляем версию АИ, адекватную задаче акустического рассеяния.

- Выберем $\xi > 0$. Напомним, что X^ξ есть проектор в \mathcal{F} на \mathcal{F}^ξ , который срезает управления на Σ^ξ . Символом Y^ξ мы обозначаем проектор в \mathcal{H} на \mathcal{H}^ξ , срезающий функции на внешность шара $B_\xi(0)$.

Пусть $\Pi^\delta := \{\tau_k\}_{k \geq 0}$, $0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots \rightarrow \infty$ есть разбиение полуоси $0 \leq \tau < \infty$ с условием $0 < \tau_k - \tau_{k-1} \leq \delta$. Разность $\Delta X^{\tau_k} := X^{\tau_k} - X^{\tau_{k-1}}$ проектирует в \mathcal{F} на $\mathcal{F}^{\tau_k} \ominus \mathcal{F}^{\tau_{k-1}}$ и, таким образом, срезает управления на $\Sigma^{\tau_k} \setminus \Sigma^{\tau_{k-1}}$. Разность $\Delta Y^{\tau_k} := Y^{\tau_{k-1}} - Y^{\tau_k}$ проектирует в \mathcal{H} на $\mathcal{H}^{\tau_{k-1}} \ominus \mathcal{H}^{\tau_k}$, т.е. срезает функции на сферический слой $B_{\tau_k}(0) \setminus B_{\tau_{k-1}}(0)$. Отметим очевидные соотношения ортогональности:

$$\begin{aligned} \Delta X^{\tau_k} \Delta X^{\tau_l} &= \mathbb{O}_{\mathcal{F}}, \quad \Delta Y^{\tau_k} \Delta Y^{\tau_l} = \mathbb{O}_{\mathcal{H}}, \quad k \neq l; \\ \Delta X^{\tau_k} X^{\tau_l} &= \mathbb{O}_{\mathcal{F}}, \quad \Delta Y^{\tau_k} Y^{\tau_l} = \mathbb{O}_{\mathcal{H}}, \quad l \leq k-1. \end{aligned} \quad (28)$$

Напомним, что W это оператор управления возмущенной системы (1)–(3) и определим сумму

$$A_{\Pi^\delta} := \sum_{k \geq 1} \Delta Y^{\tau_k} W \Delta X^{\tau_k}, \quad (29)$$

являющуюся оператором из \mathcal{F} в \mathcal{H} , который корректно определен на финитных управлениях. В силу ортогональности (28) имеем

$$\begin{aligned} \|A_{\Pi^\delta} f\|_{\mathcal{H}}^2 &= \left\| \sum_{k \geq 1} \Delta Y^{\tau_k} W \Delta X^{\tau_k} f \right\|_{\mathcal{H}}^2 = \sum_{k \geq 1} \|W \Delta X^{\tau_k} f\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &\leq \|W\|^2 \sum_{k \geq 1} \|\Delta X^{\tau_k} f\|_{\mathcal{F}}^2 = \|W\|^2 \|f\|_{\mathcal{F}}^2, \end{aligned}$$

так что сумма (29) удовлетворяет оценке $\|A_{\Pi^\delta}\| \leq \|W\|$ и, следовательно, является ограниченным оператором.

- Как нетрудно проверить, отображение $A : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{H}$,

$$(Af)(x) := \frac{f(r, \omega)}{r}, \quad x = r\omega \in \mathbb{R}^3$$

есть унитарный оператор. Сопряженный к нему $A^* = A^{-1} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{F}$ имеет вид

$$(A^*y)(\tau, \omega) := \tau y(\tau\omega), \quad (\tau, \omega) \in \Sigma. \quad (30)$$

Теорема 1. *Справедливо соотношение*

$$A = s\text{-}\lim_{\delta \rightarrow 0} A_{\Pi^\delta} \quad (31)$$

holds.

Доказательство. 1. Возьмем $f \in \mathcal{F} \cap C_{\text{loc}}^2(\Sigma)$. Фиксируем $\xi > 0$ и (малое) $\delta > 0$. Обрезанное управление $X^\xi f$ имеет разрыв в $\tau = \xi$,

амплитуда (вступление) которого равна $f(\xi, \cdot)$. Поэтому, в силу (27) и с учетом соотношения задержки (10), мы имеем

$$u^{X^\xi} f(x, t) = \frac{f(\xi, \omega)}{r} (r+t-\xi)_+^0 + w(x, t-\xi, \delta) (r+t-\xi)_+^1, \quad 0 \leq r+t-\xi \leq \delta.$$

Принимая $t = 0$ и представляя $f(\xi, \omega) = f(r, \omega) + w'(r, \xi) (r - \xi)$, получаем:

$$u^{X^\xi} f(x, 0) = (Wf)(x) = \frac{f(r, \omega)}{r} + w(x, -\xi, \delta) (r - \xi), \quad \xi \leq r \leq \xi + \delta. \quad (32)$$

2. Для выбранного выше f , согласно (32) слагаемые суммы $A_{\Pi^\delta} f$ имеют вид

$$(\Delta Y^{\tau_k} W \Delta X^{\tau_k} f)(x) = \begin{cases} \frac{f(r, \omega)}{r} + w(x, -\tau_k, \delta) (r - \tau_{k-1}), & \tau_{k-1} \leq r \leq \tau_k; \\ 0, & \text{для остальных } r; \end{cases} \quad (33)$$

т.е. k -тое слагаемое локализовано в слое $B_{\tau_k}(0) \setminus B_{\tau_{k-1}}(0)$.

3. Дополнительно предположим, что управление f финитно. В этом случае суммирование в A_{Π^δ} выполняется от $k = 1$ до некоторого конечного N . Представим

$$Af = \sum_{k=1, \dots, N} \Delta Y_k Af$$

со слагаемыми

$$(\Delta Y^{\tau_k} Af)(x) = \begin{cases} \frac{f(r, \omega)}{r}, & \tau_{k-1} \leq r \leq \tau_k; \\ 0, & \text{для остальных } r; \end{cases} \quad (34)$$

локализованными в слоях $B_{\tau_k}(0) \setminus B_{\tau_{k-1}}(0)$. Сравнивая (33) с (34), имеем

$$\begin{aligned} \|(A - A_{\Pi^\delta}) f\|^2 &= \left\| \sum_{k=1, \dots, N} w(\cdot, -\tau_k, \delta) (|\cdot| - \tau_{k-1})_+^1 \right\|^2 \\ &\leq \sup_{x, k} |w(x, -\tau_k, \delta)|^2 \sum_{k=1, \dots, N} (\tau_k - \tau_{k-1})^2 \\ &\stackrel{\text{Лемма 3}}{=} c \|f\|_{C^2(\Sigma)}^2 \sum_{k=1, \dots, N} (\tau_k - \tau_{k-1})^2 \leq c \|f\|_{C^2(\Sigma)}^2 \delta T \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0, \end{aligned}$$

где $\tau = T$ есть верхняя грань носителя $\text{supp } f$ на Σ .

Таким образом, ограниченная последовательность сумм A_{Π^δ} сходится к A на плотном множестве гладких финитных управлений. Отсюда следует (31) для гладких управлений.

4. Приближая произвольные управления $f \in \mathcal{F}$ гладкими финитными и переходя к соответствующему пределу, расширим (31) на \mathcal{F} . \square

Мы обозначаем предел в (31) символом $\int_{[0, \infty)} dY^\tau W dX^\tau$ и называем полученный оператор амплитудным интегралом (АИ), имея в виду, что образ Af составлен из разрывов амплитуд волн $u^{X^\tau f}$ на их передних фронтах [4, 7].

• Напомним, что $A : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{H}$ есть унитарный оператор. Как нетрудно показать, справедливы АИ-представления

$$A^* = A^{-1} = \int_{[0, \infty)} dX^\tau W^* dY^\tau := w\text{-}\lim_{\delta \rightarrow 0} A_{\Pi^\delta}^*, \quad (35)$$

в которых A^* действует по правилу (30).

АИ сплетает проекторы: имеют место соотношения

$$AX^\xi = Y^\xi A, \quad A^*Y^\xi = X^\xi A^*, \quad \xi \geq 0, \quad (36)$$

легко следующие из определений и/или соотношений ортогональности (28).

Обозначим $A^\xi := A \upharpoonright \mathcal{F}^\xi$. В силу (36), A^ξ есть унитарный оператор из \mathcal{F}^ξ в \mathcal{H}^ξ , а АИ-представления

$$A^\xi := \int_{[\xi, \infty)} dY^\eta W dX^\eta, \quad A^{\xi*} = \int_{[\xi, \infty)} dX^\eta W^* dY^\eta \quad (37)$$

легко следуют из (35) и соотношений ортогональности (28).

• Анализируя конструкцию АИ, можно расширить ее на управления $f \in L_2^{\text{loc}}(\Sigma)$ следующим приемом. Пусть для $\eta \in C^\infty(\Sigma)$ выполнено $0 \leq \eta(\cdot) \leq 1$, $\eta|_{0 \leq \tau \leq 1} = 1$, $\eta|_{\tau \geq 2} = 0$; обозначим $\eta^T := \eta(\frac{\cdot}{T})$. Положим

$$Af := \lim_{T \rightarrow \infty} A(\eta^T f),$$

где предел понимается в смысле локальной L_2 -сходимости. Расширенный АИ действует по тому же правилу:

$$(Af)(x) = \frac{f(r, \omega)}{r}, \quad x = r\omega \in \mathbb{R}^3,$$

но, конечно, образ не обязан лежать в \mathcal{H} .

Билинейные формы. • Следующие факты установлены в [11, 15].

Фиксируем $\xi > 0$ и обозначим через χ^ξ индикатор (характеристическую функцию) части $\Sigma^\xi = \{(\tau, \omega) \in \Sigma \mid \tau \geq \xi\}$. Итак, имеем $\mathcal{F}^\xi = \chi^\xi \mathcal{F} = \{\chi^\xi f \mid f \in \mathcal{F}\}$. Пусть $\mathcal{P}^\xi := \chi^\xi \mathcal{P}$. Напомним, что \mathcal{U}^ξ и \mathcal{D}^ξ суть достижимые и дефектные подпространства возмущенной системы: выполнено $\mathcal{H}^\xi = \mathcal{U}^\xi \oplus \mathcal{D}^\xi$, причем \mathcal{D}^ξ охарактеризовано в (7). Более того, как показано в [15], справедливо соотношение

$$\mathcal{D}^\xi = \overline{\{u^p(\cdot, 0) \mid p \in \mathcal{P}^\xi\}}, \quad \xi > 0,$$

из которого следует $\mathcal{H}^\xi = \overline{\{u^f(\cdot, 0) \mid f \in \mathcal{F}^\xi \dot{+} \mathcal{P}^\xi\}}$.

Как установлено в [11] (см. Лемма 2.1), совместное выполнение условий $f \in \mathcal{F}^\xi$ и $Wf = u^f(\cdot, 0) = 0$ с необходимостью влечет $f = 0$. Не требуется никаких изменений в доказательстве, чтобы расширить этот результат на полиномиальные управления. Таким образом, отображение $f \mapsto u^f(\cdot, 0)$ из $\mathcal{F}^\xi \dot{+} \mathcal{P}^\xi$ в \mathcal{H}^ξ инъективно при всех $\xi > 0$. Добавим, что для $\xi = 0$ это может оказаться неверным: случай $\text{Ker } W \neq \{0\}$ возможен [13].

• Билинейная форма

$$\langle f, g \rangle_0 := (u_0^f(\cdot, 0), u_0^g(\cdot, 0))_{\mathcal{H}} \quad (38)$$

корректно определена на \mathcal{G}^ξ . Если $f, g \in \mathcal{F}$, то по унитарности W_0 , имеем $(u_0^f(\cdot, 0), u_0^g(\cdot, 0))_{\mathcal{H}} = (f, g)_{\mathcal{F}}$, что ведет к

$$\langle f, g \rangle_0 = (f, g)_{\mathcal{F}}. \quad (39)$$

Напомним, что $R : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ есть оператор реакции. Соотношения (8) и (9) легко ведут к факту, что реакция Rf определяется значениями $f|_{0 \leq \tau \leq 2a}$. Для заданных $f, g \in \mathcal{G}^\xi$ представим

$$f = [1 - \chi^{2a}]f + \chi^{2a}f =: f_1 + f_2; \quad g = [1 - \chi^{2a}]g + \chi^{2a}g =: g_1 + g_2,$$

где f_1, g_1 принадлежит \mathcal{F}^ξ и аннулируется при $\tau > 2a$. Возмущенная форма

$$\langle f, g \rangle := \langle f, g \rangle_0 + (Rf_1, g_1) \quad (40)$$

корректно определена на $\mathcal{G}^\xi := \mathcal{F}^\xi \dot{+} \mathcal{P}^\xi$. Следующий результат мотивирует ее введение.

Лемма 4. Пусть $f, g \in \mathcal{G}^\xi$. Соотношение

$$\langle f, g \rangle = (u^f(\cdot, 0), u^g(\cdot, 0))_{\mathcal{H}} \quad (41)$$

справедливо при всех $\xi > 0$.

Доказательство. Напомним, что $q|_{|x|>a} = 0$ и начнем со случая $\xi < a$.

1. Take $f, g \in \mathcal{G}^\xi$. Согласно (10), область влияния потенциала на волны, отвечающие (задержанным) управлениям из \mathcal{F}^ξ , есть $\{(x, t) \mid t < |x| - 2a + \xi\}$. Вне ее $u^f = u_0^f$ имеем $u^g = u_0^g$. В частности, равенства $u^f(x, 0) = u_0^f(x, 0)$ и $u^g(x, 0) = u_0^g(x, 0)$ выполняются, если $|x| \geq 2a$, причем $f|_{\tau < 2a} = 0$ влечет $u^f(\cdot, 0)|_{|x| < 2a} = 0$. В силу сказанного выше, если $f|_{\tau < 2a} = 0$, то выполнено

$$\begin{aligned} & (u^f(\cdot, 0), u^g(\cdot, 0))_{\mathcal{H}} \\ &= \int_{|x| < 2a} u^f(x, 0) u^g(x, 0) dx + \int_{|x| \geq 2a} u^f(x, 0) u^g(x, 0) dx \\ &= 0 + \int_{|x| \geq 2a} u^f(x, 0) u^g(x, 0) dx = \int_{|x| \geq 2a} u_0^f(x, 0) u_0^g(x, 0) dx \\ &= (u_0^f(\cdot, 0), u_0^g(\cdot, 0))_{\mathcal{H}^\xi}. \quad (42) \end{aligned}$$

2. Выбранные управления $f, g \in \mathcal{G}^\xi$ представим в виде

$$f = [1 - \chi^{2a}]f + \chi^{2a}f =: f_1 + f_2; \quad g = [1 - \chi^{2a}]g + \chi^{2a}g =: g_1 + g_2,$$

и отметим, что $f_1, g_1 \in \mathcal{F}^\xi$. С учетом сделанных замечаний имеем соотношение:

$$\begin{aligned} & (u^f(\cdot, 0), u^g(\cdot, 0))_{\mathcal{H}^\xi} = (u^{f_1+f_2}(\cdot, 0), u^{g_1+g_2}(\cdot, 0))_{\mathcal{H}^\xi} \\ &= (u^{f_1}(\cdot, 0) + u^{f_2}(\cdot, 0), u^{g_1}(\cdot, 0) + u^{g_2}(\cdot, 0))_{\mathcal{H}^\xi} \\ &= (u^{f_1}(\cdot, 0), u^{g_1}(\cdot, 0))_{\mathcal{H}^\xi} + (u^{f_1}(\cdot, 0), u^{g_2}(\cdot, 0))_{\mathcal{H}^\xi} \\ &\quad + (u^{f_2}(\cdot, 0), u^{g_1}(\cdot, 0))_{\mathcal{H}^\xi} + (u^{f_2}(\cdot, 0), u^{g_2}(\cdot, 0))_{\mathcal{H}^\xi} \\ &\stackrel{(42)}{=} (u^{f_1}(\cdot, 0), u^{g_1}(\cdot, 0))_{\mathcal{H}^\xi} + (u_0^{f_1}(\cdot, 0), u_0^{g_2}(\cdot, 0))_{\mathcal{H}^\xi} \\ &\quad + (u_0^{f_2}(\cdot, 0), u^{g_1}(\cdot, 0))_{\mathcal{H}^\xi} + (u_0^{f_2}(\cdot, 0), u_0^{g_2}(\cdot, 0))_{\mathcal{H}^\xi} \\ &\stackrel{(12), (38)}{=} (Cf_1, g_1) + \langle f_1, g_2 \rangle_0 + \langle f_2, g_1 \rangle_0 + \langle f_2, g_2 \rangle_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{(13)}{=} \langle f_1, g_1 \rangle + \langle Rf_1, g_1 \rangle + \langle f_1, g_2 \rangle_0 + \langle f_2, g_1 \rangle_0 + \langle f_2, g_2 \rangle_0 \\
& \stackrel{(39)}{=} \langle f_1, g_1 \rangle_0 + \langle Rf_1, g_1 \rangle + \langle f_1, g_2 \rangle_0 + \langle f_2, g_1 \rangle_0 + \langle f_2, g_2 \rangle_0 \\
& = \langle f, g \rangle_0 + \langle Rf_1, g_1 \rangle \stackrel{(40)}{=} \langle f, g \rangle.
\end{aligned}$$

3. Случай $\xi \geq a$ гораздо проще и рассматривается по той же схеме. \square

Приведенное доказательство фактически воспроизводит доказательство леммы 2 из работы [12].

• Пусть $0 < \xi < a$ и пусть нам задан оператор $R^\xi := X^\xi R \upharpoonright \mathcal{F}^\xi$, действующий в подпространстве \mathcal{F}^ξ . Согласно (9), он определяет радиус потенциала по представлению

$$a = \inf \{ b > 0 \mid R^\xi f|_{\tau > 2b - \xi} = 0 \text{ для всех } f \in \mathcal{F}^\xi \} \quad (43)$$

и, следовательно, определяет использованные выше разложения $f = f_1 + f_2$ для $f \in \mathcal{G}^\xi$. Как следствие, можно записать (40) в виде

$$\langle f, g \rangle = \langle f, g \rangle_0 + \langle R^\xi f_1, g_1 \rangle \stackrel{(41)}{=} (u^f(\cdot, 0), u^g(\cdot, 0))_{\mathcal{H}} \quad (44)$$

и использовать эту форму при решении обратной задачи.

Пространство $\widetilde{\mathcal{H}}^\xi$. • Выберем произвольно $\xi > 0$ и напомним, что отображение $f \mapsto u^f(\cdot, 0)$ инъективно на $\mathcal{G}^\xi = \mathcal{F}^\xi \dot{+} \mathcal{P}^\xi$. В то же время, по лемме 4, форма $\langle f, g \rangle$ положительна на \mathcal{G}^ξ . Значит, снабжая \mathcal{G}^ξ скалярным произведением $\langle f, g \rangle$, мы имеем предгильбертово пространство. Пополняя его по соответствующей норме, получаем гильбертово пространство $\widetilde{\mathcal{H}}^\xi$. Мы называем его *модельным пространством*.

Через $f \mapsto \tilde{u}^f(\cdot, 0)$ мы обозначаем оператор вложения $\mathcal{G}^\xi \rightarrow \widetilde{\mathcal{H}}^\xi$ и называем образы $\tilde{u}^f(\cdot, 0)$ модельными волнами. В то же время, отображение $f \mapsto u^f(\cdot, 0)$ действует из \mathcal{G}^ξ в \mathcal{H}^ξ . По построению, в согласии с (41), соответствие $U^\xi : \tilde{u}^f(\cdot, 0) \mapsto u^f(\cdot, 0)$ ($f \in \mathcal{G}^\xi$) есть изометрия, которая расширяется до унитарного оператора из $\widetilde{\mathcal{H}}^\xi$ на \mathcal{H}^ξ . Модельные волны играют роль изометрических копий "настоящих" волн, невидимых внешнему наблюдателю. Наблюдатель, располагающий оператором реакции, имеет возможность определить форму $\langle f, g \rangle$, построить модельное пространство $\widetilde{\mathcal{H}}^\xi$ и получить копию \tilde{u}^f недоступного ему оригинала u^f для любого $f \in \mathcal{G}^\xi$.

• Редуцированный оператор $W^\xi := W \upharpoonright \mathcal{F}^\xi$ действует из \mathcal{F}^ξ на $\mathcal{U}^\xi \subset \mathcal{H}^\xi$. Дуальный ему оператор $\widetilde{W}^\xi : f \mapsto \widetilde{u}^f(\cdot, 0)$ отображает \mathcal{F}^ξ на его образ $\widetilde{\mathcal{U}}^\xi \subset \widetilde{\mathcal{H}}^\xi$ при вложении. Отметим очевидное соотношение $U^\xi \widetilde{W}^\xi = W^\xi$.

Модельное пространство $\widetilde{\mathcal{H}}^\xi$ содержит семейство подпространств

$$\widetilde{\mathcal{H}}^\eta := \overline{\{\mathcal{F}^\eta \dot{+} \mathcal{P}^\eta\}}, \quad \eta \geq \xi$$

(закрывание в $\widetilde{\mathcal{H}}^\xi$ образов при вложении) и соответствующих проекторов \widetilde{Y}^η в $\widetilde{\mathcal{H}}^\xi$ на $\widetilde{\mathcal{H}}^\eta$. По изометричности, имеем

$$U^\xi \mathcal{H}^\eta = \mathcal{H}^\eta, \quad Y^\eta U^\xi = U^\xi \widetilde{Y}^\eta, \quad \eta \geq \xi, \quad (45)$$

где Y^η срезает функции на $\mathbb{R}^3 \setminus B_\eta(0)$.

Визуализация волн и решение обратной задачи. • Фиксируем $\xi > 0$ и напомним, что оператор $A^\xi = A \upharpoonright \mathcal{F}^\xi$ действует из \mathcal{F}^ξ в \mathcal{H}^ξ . Оператор $V^\xi := A^{\xi*} W^\xi : \mathcal{F}^\xi \rightarrow \mathcal{F}^\xi$ называется *оператором визуализации*. Он действует по правилу

$$\begin{aligned} (V^\xi f)(\tau, \omega) &= (A^{\xi*} u^f(\cdot, 0))(\tau, \omega) \\ &= (A^* u^f(\cdot, 0))(\tau, \omega) \stackrel{(30)}{=} \tau u^f(\tau\omega, 0), \quad (\tau, \omega) \in \Sigma. \end{aligned} \quad (46)$$

Внешний наблюдатель, располагающий этим оператором, получает возможность для заданного f увидеть “фотографию” невидимой волны $u^f(\cdot, 0)$ на “экране” Σ^ξ , чем и мотивирован термин “визуализация”. Покажем, как реализовать такую возможность. Используя унитарность $U^\xi{}^* U^\xi = \mathbb{I}_{\widetilde{\mathcal{H}}^\xi}$ и связь $U^\xi \widetilde{W}^\xi = W^\xi$, имеем соотношения:

$$\begin{aligned} V^\xi &\stackrel{(37)}{=} \left[\int_{[\xi, \infty)} dX^\eta W^\xi{}^* dY^\eta \right] W^\xi \\ &\stackrel{(45)}{=} \left[\int_{[\xi, \infty)} dX^\eta (U^\xi \widetilde{W}^\xi)^* d(U^\xi \widetilde{Y}^\eta U^\xi{}^*) \right] U^\xi \widetilde{W}^\xi \\ &= \left[\int_{[\xi, \infty)} dX^\eta \widetilde{W}^\xi{}^* d\widetilde{Y}^\eta \right] \widetilde{W}^\xi \end{aligned} \quad (47)$$

и, тем самым, представляем в (46) оператор V^ξ в терминах модельного пространства. Именно это представление позволит решить обратную задачу: все будет сделано, если мы покажем, как определить V^ξ по ее данным.

- Внешний наблюдатель зондирует систему управлениями $f \in \mathcal{F}^\xi$ и получает оператор $R^\xi := X^\xi R \upharpoonright \mathcal{F}^\xi$ как результат измерений. Такая информация дает ему возможность восстановить потенциал q в $\mathbb{R}^3 \setminus B_\xi(0)$ с помощью следующей процедуры.

Шаг 1. Имея в распоряжении R^ξ , найдем радиус потенциала по (43), что позволит представлять управления в виде сумм $f = f_1 + f_2$. Определим форму $\langle f, g \rangle$ на \mathcal{G}^ξ согласно (44). Образует модельное пространство \mathcal{H}^ξ . Определим оператор (вложение) $\widetilde{W}^\xi : \mathcal{F}^\xi \rightarrow \widetilde{\mathcal{H}}^\xi$ и его сопряженный $\widetilde{W}^{\xi*}$.

Шаг 2. Найдем проекторы \widetilde{Y}^η в $\widetilde{\mathcal{H}}^\xi$ на $\widetilde{W}^\xi \mathcal{F}^\eta$. Составив АИ, определим оператор визуализации V^ξ по (47). Напомним, что он действует по правилу $(V^\xi f)(\tau, \omega) = \tau u^f(\tau\omega, 0)$, $(\tau, \omega) \in \Sigma$.

Шаг 3. Переносим образы $V^\xi f$ с Σ^ξ в $\mathbb{R}^3 \setminus B_\xi(0)$ по равенству $u^f(x, 0) = |x| (V^\xi f)(|x|, \frac{x}{|x|})$, восстановим оператор $W^\xi = W \upharpoonright \mathcal{F}^\xi$.

Шаг 4. Имея в распоряжении W^ξ и используя соотношения $u^{f_{tt}} = u_{tt}^f \stackrel{(1)}{=} (\Delta - q)u^f$, восстановим график оператора $\Delta - q$:

$$\begin{aligned} \text{graph}(\Delta - q) &= \{[u^f, u^{f_{tt}}] \mid f \in \mathcal{F}^\xi \cap C^2(\Sigma)\} \\ &= \{[W^\xi f, W^\xi f_{tt}] \mid f \in \mathcal{F}^\xi \cap C^2(\Sigma)\} \end{aligned}$$

($[\cdot, \cdot]$ – обозначение пары). График очевидным образом определяет потенциал q в $\mathbb{R}^3 \setminus B_\xi(0)$. Обратная задача решена.

Имея R^ξ для всех $\xi > 0$, наблюдатель может восстановить q во всем \mathbb{R}^3 .

Комментарии. • Если оператор реакции допускает представление (11), то задание R^ξ равносильно заданию его ядра $p|_{\tau \geq \xi}$ в качестве данных обратной задачи. В этом случае нам нужно определить функцию q трех переменных по функции p от $1+2+2=5$ переменных, что считается переопределенной постановкой обратной задачи. Возникает вопрос о характеристизации ядер, отвечающих потенциалам. Одно необходимое

условие является традиционным и вполне очевидным: ядро p должно обеспечивать положительность формы $\langle f, g \rangle$. Можно ли предоставить список необходимых и достаточных условий? В известном смысле, это вопрос вкуса и дефиниций: что считать характеристикой. Повидимому, характеристику в виде весьма длинного списка условий типа приведенных в работах [8, 14] предложить можно. Смысл этих условий в том, что они обеспечивают реализуемость процедур типа *Шаг 1–Шаг 4*. Однако, как нам кажется, простая характеристика, подобная известным в одномерных обратных задачах, вряд ли возможна.

О непереоопределенных постановках задачи рассеяния см., например, [21].

- Модельное пространство $\widetilde{\mathcal{H}}^\xi$ – весьма специфический объект: это не функциональное пространство, т.к. его элементам нельзя приписать определенные носители в Σ^ξ . Эта ситуация не нова: то же имеет место и в задачах в ограниченных областях [1]. Подобные эффекты связаны с характером управляемости системы: наличием приближенной, но отсутствием точной управляемости.

Тем не менее этот весьма экзотический объект можно приспособить для разработки численных алгоритмов. Дело в том, что $\widetilde{\mathcal{H}}^\xi$ по существу является промежуточным объектом, в то время как в алгоритмах используется Амплитудный Интеграл. Его версия (т.н. *амплитудная формула*), являющаяся результатом дифференцирования АИ (37) по ξ , вполне подходит для численной реализации [2, 5, 6, 20].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. С. А. Авдонин, М. И. Белишев, С. А. Иванов, *Управляемость в заполненной области для многомерного волнового уравнения с сингулярным управлением*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **210** (1994), 3–14.
2. М. И. Belishev, *Boundary control in reconstruction of manifolds and metrics (the BC method)*. — Inverse Problems, **13**, No. 5, (1997) R1–R45.
3. М. И. Белишев, *Граничное управление и томография римановых многообразий*. — Успехи матем. наук **72** вып. 4(436) (2017), 3–66.
4. М. И. Belishev, *New Notions and Constructions of the Boundary Control Method*. — Inverse Problems and Imaging **16**, No. 6, (2022), 1447–1471.
5. М. И. Belishev, V. Yu. Gotlib, *Dynamical variant of the BC-method: theory and numerical testing*. — J. Inverse and Ill-Posed Problems, **7**, No 3 (1999), 221–240.
6. М. И. Belishev, I. B. Ivanov, I. V. Kubyshev, V. S. Semenov, *Numerical testing in determination of sound speed from a part of boundary by the BC-method*. — Ю Inverse and Ill-Posed Problems **24**, No. 2 (2016), 159–180.

7. М. И. Белишев, А. П. Качалов, *Операторный интеграл в многомерной спектральной обратной задаче*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **215** (1994), 9–37.
8. М. I. Belishev, D. V. Korikov, *On Characterization of Hilbert Transform of Riemannian Surface with Boundary*. — Complex Analysis and Operator Theory, (2022) 16:10.
9. М. И. Белишев, А. Симонов, *Треугольная факторизация и функциональные модели операторов и систем*. — Алгебра и анализ, **36**, No. 5 (2024), 1–28.
10. М. И. Белишев, А. Ф. Вакуленко, *Об одной задаче управления для волнового уравнения в \mathbb{R}^3* . — Зап. научн. семин. ПОМИ **332** (2006), 19–73.
11. М. I. Belishev, A. F. Vakulenko, *Reachable and unreachable sets in the scattering problem for acoustical equation in \mathbb{R}^3* . — SIAM J. Math. Analysis **39**, No. 6 (2008), 1821–1850.
12. М. I. Belishev, A. F. Vakulenko, *Inverse scattering problem for the wave equation with locally perturbed centrifugal potential*. — J. Inverse and Ill-Posed Problems **17**, No. 2 (2009), 127–157.
13. М. I. Belishev, A. F. Vakulenko, *s-points in three-dimensional acoustical scattering*. — SIAM J. Math. Analysis **42**, No. 6 (2010), 2703–2720.
14. М. I. Belishev, A. F. Vakulenko, *On characterization of inverse data in the boundary control method*. — Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste, **48** (2016), 1–29.
15. М. И. Белишев, А. Ф. Вакуленко, *Об управляемости динамической системы акустического рассеяния в \mathbb{R}^3* . — Зап. научн. семин. ПОМИ (2024).
16. М. С. Бродский, *Треугольные и жордановы представления линейных операторов*, Москва, Наука (1969).
17. И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения*, Москва, Наука (1967).
18. Р. Калман, П. Фалб, М. Арbib, *Очерки по математической теории систем*, Мир, Москва (1971).
19. П. Лакс, К. Филлипс, *Теория рассеяния*, Москва, Мир (1971).
20. В. М. Филатова, В. В. Носикова, Л. Н. Пестов, С. Н. Сергеев, *Visualization of reflected and scattered waves by the boundary control method*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **521** (2023), 200–211.
21. Rakesh and G. Uhlmann, *Uniqueness for the inverse backscattering problem for angularly controlled potentials*. — arXiv:1307.0877v2 [math.AP] 12 Feb 2014.
22. J. H. Rose, M. Cheney, and B. DeFacio, *Determination of the Wave Field from Scattering Data*. — Physical Review Letters **57**, No. 7, 783–786.

Belishev M. I., Vakulenko A. F. Three-dimensional inverse acoustic scattering problem by the BC-method.

Let $\Sigma := [0, \infty) \times S^2$, $\mathcal{F} := L_2(\Sigma)$. The *forward* acoustic scattering problem under consideration is to find $u = u^f(x, t)$ satisfying

$$u_{tt} - \Delta u + qu = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^3 \times (-\infty, \infty); \quad (48)$$

$$u|_{|x| < -t} = 0, \quad t < 0; \quad (49)$$

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} s u((-s + \tau)\omega, s) = f(\tau, \omega), \quad (\tau, \omega) \in \Sigma; \quad (50)$$

for a real valued compactly supported potential $q \in L_\infty(\mathbb{R}^3)$ and a control $f \in \mathcal{F}$. The response operator $R: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$,

$$(Rf)(\tau, \omega) := \lim_{s \rightarrow +\infty} s u^f((s + \tau)\omega, s), \quad (\tau, \omega) \in \Sigma$$

depends on q *locally*: if $\xi > 0$ and $f \in \mathcal{F}^\xi := \{f \in \mathcal{F} \mid f|_{[0, \xi]} = 0\}$ holds, then the values $(Rf)|_{\tau \geq \xi}$ are determined by $q|_{|x| \geq \xi}$ (do not depend on $q|_{|x| < \xi}$).

The *inverse problem* is: for an arbitrarily fixed $\xi > 0$, to determine $q|_{|x| \geq \xi}$ from $X^\xi R \upharpoonright \mathcal{F}^\xi$, where X^ξ is the projection in \mathcal{F} onto \mathcal{F}^ξ . It is solved by a relevant version of the boundary control method. The key point of the approach are recent results on the controllability of the system (48)–(50).

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: belishev@pdmi.ras.ru
E-mail: vak@pdmi.ras.ru

Поступило 29 августа 2024 г.