В.П.Кадушин

ОБ ОДНОМ ПОЛИНОМИАЛЬНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим систему сингулярных интегральных уравнений (с.и.у.)

$$Kx(t) \equiv A(t)x(t) + B(t)(Sx)(t) + Th\,x(t) = y(t), \tag{1}$$

где $x(t)$ – искомая вектор-функция с компонентами $x_j(t), j=\overline{1,m}$; $(Sx)(t), Th\,x(t)$ – вектор-функции с компонентами вида $\frac{1}{\pi i}\int_\gamma \frac{x_j(\tau)}{\tau - t}d\tau$, $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \sum_{k=1}^{m} h_{jk}(t,\tau)\,x_k(\tau)\,d\tau$ соответственно, γ – единичная окружность с центром в начале координат; $A(t)$, $B(t)$, $h(t,\tau)$ – заданные матрицы-функции; $y(t)$ – заданная вектор-функция. Системы с.и.у. в разных функциональных пространствах рассматривались в работах [1 – 3], где были предложены и обоснованы такие приближенные методы их решения, как метод коллокаций, механических квадратур, редукции.

В настоящей работе для решения уравнения (1) предлагается вычислительная схема метода подобластей и дается ее обоснование.

Метод подобластей впервые предложен в работе [4], а затем применен при различных выборах узлов для решения дифференциальных [5], интегро-дифференциальных [6], одного класса сингулярных уравнений [7].

Рассмотрим вычислительную схему метода подобластей для уравнения (1).

Решение уравнения (1) будем искать в виде вектор-функции $x_n(t) = (x_{1n}(t), x_{2n}(t), \dots, x_{mn}(t))$ с компонентами

$$x_{jn}(t) = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_{jk}\, t^k, \tag{2}$$

а неизвестные коэффициенты $\alpha_{jk}^{(n)}$, $k=\overline{-n,n}$, $j=\overline{1,m}$, найдем из условия

$$\int_{t_\ell}^{t_{\ell+1}} Kx_n(t)\,\frac{dt}{t} = \int_{t_\ell}^{t_{\ell+1}} \frac{y(t)}{t}\,dt, \quad \ell=\overline{0,2n}, \tag{3}$$

где $\{t_\ell\}_0^{2n}$ – заданная система узлов, и интеграл берется по малой дуге единичной окружности.

В дальнейшем будем полагать, что t_ℓ – равноотстоящие узлы

$$t_\ell = e^{is_\ell}, \quad s_\ell = \frac{2\ell\pi}{2n+1}, \quad \ell = \overline{0,2n}. \qquad (4)$$

Условие (3) представляет собою систему линейных алгебраических уравнений с $m(2n+1)$ неизвестными $\alpha_{jk}^{(n)}$, $j=\overline{1,m}$, $k=\overline{-n,n}$. Действительно, для j-й компоненты $x_n(t)$ имеем

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{r=1}^{m} \alpha_{rk}^{(n)} \left(A_{jrk}^{\ell} + B_{jrk}^{\ell}\right) - \sum_{k=-n}^{-1}\sum_{r=1}^{m} \alpha_{rk}^{(n)} \left(A_{jrk}^{\ell} - B_{jrk}^{\ell}\right) + \sum_{k=-n}^{n}\sum_{r=1}^{m} \alpha_{rk}^{(n)} H_{jrk}^{\ell} = y_j^{\ell}, \qquad (5)$$

где

$$A_{jrk}^{\ell} = \int_{t_\ell}^{t_{\ell+1}} a_{jr}(t)\, t^{k-1}\, dt,$$

$$B_{jrk}^{\ell} = \int_{t_\ell}^{t_{\ell+1}} b_{jr}(t)\, t^{k-1}\, dt,$$

$$H_{jrk}^{\ell} = \int_{t_\ell}^{t_{\ell+1}} \frac{dt}{t} \int_\gamma h_{jr}(t,\tau)\, \tau^{k}\, d\tau,$$

$$y_j^{\ell} = \int_{t_\ell}^{t_{\ell+1}} y_j(t)\, \frac{dt}{t}, \quad j=\overline{1,m}, \quad \ell=\overline{0,2n}.$$

Для обоснования вычислительной схемы (2) – (5) воспользуемся модификацией общей теории приближенных методов, изложенной в работе [8, гл. I].

Выберем в качестве основного пространства пространство $H_{\beta,m}$ [I], а в качестве подпространства X_n возьмем пространство вектор-многочленов с компонентами вида (2) и нормой пространства $H_{\beta,m}$.

Пусть P_n^t - оператор, ставящий в соответствие каждой функции $x(t) \in H_{\beta,m}$ многочлен вида (2) такой, что

$$\int_{t_\ell}^{t_{\ell+1}} x(t)\,\frac{dt}{t} = \int_{t_\ell}^{t_{\ell+1}} x_n(t)\,\frac{dt}{t}\,, \tag{6}$$

где интеграл берется по малой дуге единичной окружности, ограниченной точками $t_\ell, t_{\ell+1}$; t_ℓ - узлы (4). Оператор P_n^t называется оператором подобластей.

Подставляя в выражение (6) $t = e^{is}$ и выделяя у подынтегральных функций вещественную и мнимую часть,

$$x(t) = u(t) + i\,v(t) = \varphi(s) + i\,\psi(s),\quad x_n(t) = \varphi_n(s) + i\,\psi_n(s),$$

получаем, что $P_n^t x(t) = P_n^s \varphi(s) + i\,P_n^s \psi(s)$, где P_n^s - оператор подобластей для 2π - периодических функций, который является достаточно изученным оператором. В частности, P_n^s является проекционным оператором, и, учитывая результаты [9, 10],

$$\| P_n^s \|_\beta = O(\ln n)\,. \tag{7}$$

Вернемся теперь к обоснованию вычислительной схемы метода подобластей. Для этого запишем условие (3) в операторной форме

$$K_n x_n \equiv P_n^t K x_n = P_n^t y\,. \tag{8}$$

В силу единственности определения для любой функции $x(t)$ многочлена $P_n^t x(t)$ условия (3) и (8) эквиваленты.

Предположим далее выполненными следующие условия:

А. $A(t)$, $B(t)$, $f(t)$, $h(t,\tau)$ принадлежат классу H_α, $0<\beta<\alpha\leq 1$, причем $h(t,\tau)$ равномерно по обеим переменным;

Б. $\det\left(A(t) \pm B(t)\right) \neq 0$ на γ ;

В. Все левые и правые частные индексы матрицы-функции $G(t) = [A(t)+B(t)]^{-1}[A(t)-B(t)]$ равны нулю.

Пусть уравнение (1) разрешимо при любой правой части. Тогда из условий А,Б,В следует [11], что оператор K имеет ограниченный обратный. Обозначим решение уравнения (1) через $x^*(t)$.

Сведем систему с.и.у. к задаче Римана для m -функций. В силу наложенных на коэффициенты системы с.и.у. условий А, Б, В существует правая каноническая факторизация матрицы-функций

$$C(t)=\psi^{-}(t)\psi^{+}(t) \quad , \quad t\in\gamma \, ,$$

где $\psi^{\pm}(t)\neq 0$, причем $[\psi^{\pm}(t)]^{\pm 1}\in H_{\alpha}$.

Тогда, рассуждая как и в [12], уравнение (1) сводим к эквивалентному уравнению

$$\bar{K} x(t) \equiv [\psi^{-}(t)]^{-1} x^{+}(t) - \psi^{+}(t)\, x^{-}(t) + \\ + d(t)\, Th\, x(t) = d(t)\, y(t) = f(t)\, , \qquad (9)$$

где $d(t)=[\psi^{-}(t)]^{-1}[A(t)+B(t)]^{-1}$.

Применим к уравнению (9) метод подобластей. Решение будем искать в виде (2), а неизвестные коэффициенты найдем из условия

$$\bar{K}_n x_n(t) \equiv P_n^t \bar{K} x_n(t) = P_n^t f(t)\, . \qquad (10)$$

Заметим, что в отличие от методов коллокаций и механических квадратур [12] в методе подобластей уравнения (8) и (10) не эквивалентны, что составляет основную особенность в обосновании последнего.

Докажем разрешимость уравнения (10) и сходимость его решения к решению уравнения (9) - $x^{*}(t)$.

При выполнении условий А, Б, В из леммы 2 [12] следует существование полиномиальной вектор-функции $\psi_n(t)$ такой, что

$$\| \psi(t) - \psi_n(t) \|_{\beta} \leq \frac{\gamma_1}{n^{\alpha-\beta}} \;, \quad 0<\beta<\alpha\leq 1 \, ,$$

где $\psi(t) = \psi^{+}(t) - [\psi^{-}(t)]^{-1}$.

Рассмотрим вспомогательное уравнение

$$A_n x_n(t) \equiv \psi_n^{-}(t)\, x_n^{+}(t) - \psi_n^{+}(t)\, x_n^{-}(t) + V_n x_n(t) = f_n(t)\, ,$$

где $\psi_n^{\pm}(t)$ - предельные значения кусочно-аналитической вектор-функции, заданой интегралом типа Коши с функцiй плотности $\Psi_n(t)$ [11], $V_n x_n(t)$, $f_n(t)$ – полиномиальные вектор-функции наилучшего равномерного приближения для $d(t) Th\, x_n(t)$ и $f(t)$ соответственно. Оценим

$$\| \bar{K} x_n - \bar{K}_n x_n \|_\beta \le \| \bar{K} x_n - A_n x_n \|_\beta + \| A_n x_n - \bar{K}_n x_n \|_\beta . \qquad (11)$$

В силу формул Сохоцкого и свойства проекционности оператора подобластей $\left(P_n^{t\,2} = P_n^{t} \right)$ имеем во втором слагаемом правой части (11)

$$\| A_n x_n - \bar{K}_n x_n \|_\beta = \| P_n^t (A_n x_n - \bar{K} x_n) \|_\beta .$$

Тогда, повторяя выкладки, аналогичные соответствующим выкладкам работы [12], получаем с учетом (7)

$$\| K x_n - K_n x_n \|_\beta \le \frac{\gamma_2 \ln n}{n^{\alpha-\beta}} \cdot \| x_n \|_\beta .$$

Предполагая уравнение (1) (а следовательно и (9)) однозначно разрешимым при любой правой части, из теоремы 7 [8] получаем, что, начиная с некоторого n, уравнение (10) однозначно разрешимо и его решение $\bar{x}_n(t)$ сходится в $H_{\beta,m}$ к решению $x^*(t)$ со скоростью

$$\| x^*(t) - \bar{x}_n(t) \|_\beta \le \frac{\gamma_3 \ln n}{n^{\alpha-\beta}} . \qquad (12)$$

Рассмотрим теперь уравнения (8) и (10). В отличие от (8) уравнение (10) получено путем умножения обеих частей уравнения (1) на матрицу-функцию $d(t)$ и последующего применения оператора P_n^t. Матрица $d(t)$ –невырожденная по условию, поэтому можно предполагать некоторую "близость" решений этих уравнений.

Рассмотрим это подробнее. Пусть

$$x_{in}^*(t) = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_{ik}^{(n)} t^k , \quad \bar{x}_{in}^*(t) = \sum_{k=-n}^{n} \bar{\alpha}_{ik}^{(n)} t^k , \; i = \overline{1,m} ,$$

решения уравнений (8), (10) соответственно. Коэффициенты $\alpha_{ik}^{(n)}$ удовлетворяют системе (5), $\bar{\alpha}_{ik}^{(n)}$ – аналогичной системе линейных алгебраических уравнений с $m(2n+1)$ неизвестными (10). Поскольку $d(t)$ – невырожденная, то вместо системы (5) рассмотрим эквивалентную ей систему, полученную умножением уравнений (5) при фиксированном ℓ на $d(\xi_\ell)$, где ξ_ℓ –произвольно выбранная точка дуги $(t_\ell, t_{\ell+1})$. Обозначим матрицы этих систем через $\mathcal{M}$ и $\bar{\mathcal{M}}$ соответственно, а через z и $\bar{z}$ вектора с $m(2n+1)$ компонентами $\{\alpha_{ik}^{(n)}\}, \{\bar{\alpha}_{ik}^{(n)}\}$, g и $\bar{g}$ – вектора с компонентами $\{d(\xi_\ell)y^\ell\}_j$ и y_j^ℓ. Тогда рассмотрим систему (5) и аналогичную ей как операторные уравнения

$$\mathcal{M}z = g \ , \quad \bar{\mathcal{M}}\bar{z} = \bar{g} \tag{13}$$

в конечномерном пространстве $X_{m(2n+1)}$ с нормой $\|z\| = \sum\limits_{i=0}^{m(2n+1)} |z_i|$, где $z = (z_1, z_2, \dots, z_{m(2n+1)})$. Известно, что согласованной с этой нормой является норма матрицы $\|\mathcal{M}\| = \max\limits_j \sum\limits_{i=1}^{m(2n+1)} |(\mathcal{M})_{ij}|$. Оценим $\|\mathcal{M} - \bar{\mathcal{M}}\|$.

Как нетрудно видеть, каждая компонента $(\mathcal{M} - \bar{\mathcal{M}})_{ij}$ имеет вид

$$\sum_{r=1}^{m} \int_{t_\ell}^{t_{\ell+1}} [d_{ir}(\xi_\ell) - d_{ir}(\tau)]\, q_{r_j}(\tau)\, d\tau \ . \tag{14}$$

Применяя к каждому слагаемому (14) оценку $\left|\int_L \varphi(z)dz\right| \le \max\limits_z |\varphi(z)|\, d_L$, где d_L – длина контура интегрирования, и учитывая, что $d_{ir}(t) \in H_\alpha$, получаем, что

$$|(\mathcal{M} - \bar{\mathcal{M}})_{ij}| \le \frac{\gamma_4}{(2n+1)^{1+\alpha}} \ .$$

Таким образом, получаем

$$\|\mathcal{M} - \bar{\mathcal{M}}\| \le \frac{\gamma_5}{(2n+1)^\alpha} \ , \quad 0 < \alpha \le 1 \ . \tag{15}$$

Теперь можем применить к уравнению (13) снова теорему 7 [8]. Действительно, обратимость $\bar{\mathcal{M}}$ (начиная с некоторого n) доказана выше. Норма $\|g - \bar{g}\|$ оценивается аналогично норме выражения (14). Поэтому все условия теоремы выполнены.

Согласно теоремы 7 [8] можем утверждать, что, начиная с некоторого n, первая система (13) однозначно разрешима и

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=-n}^{n} |\alpha_{ik}^{(n)} - \bar{\alpha}_{ik}^{(n)}| \le \frac{\gamma_6}{(2n+1)^\alpha} \ , \quad 0 < \alpha \le 1 \ .$$

Отсюда следует, что, начиная с некоторого n, система (5) однозначно разрешима и

$$\| x_{in}^*(t) - \bar{x}_{in}^*(t) \|_C = \| \sum_{k=-n}^{n} (\alpha_{ik}^{(n)} - \bar{\alpha}_{ik}^{(n)}) t^k \|_C <$$

$$< \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=-n}^{n} | \alpha_{ik}^{(n)} - \bar{\alpha}_{ik}^{(n)} | \le \frac{\gamma_6}{(2n+1)^{\alpha}} . \qquad (16)$$

Поскольку $(x_{in}^*(t) - \bar{x}_{in}^*(t))$ – полином степени n, то согласно лемме 2 [8, с.100] из оценки (16) следует

$$H(x_{in}^*(t) - \bar{x}_{in}^*(t), \beta) \le \frac{\gamma_7}{n^{\alpha-\beta}}, \quad 0<\beta<\alpha\le 1 . \qquad (17)$$

Объединяя (16) и (17), получаем

$$\| x_n^*(t) - \bar{x}_n^*(t) \|_\beta \le \frac{\gamma_8}{n^{\alpha-\beta}} .$$

Отсюда, с учетом (12), получаем

$$\| x^*(t) - x_n^*(t) \|_\beta \le \frac{\gamma_9 \ln n}{n^{\alpha-\beta}}, \quad 0<\beta<\alpha\le 1 . \qquad (18)$$

Таким образом, доказана следующая

Т е о р е м а 1. Пусть уравнение (1) разрешимо при любой правой части, а его коэффициенты удовлетворяют условиям А, Б, В (см.выше), тогда, начиная с некоторого n, система метода подобластей разрешимо и приближенное решение $x_n^*(t)$, найденное методом подобластей, сходится в $H_{\beta,m}$ к точному решению $x^*(t)$ уравнения (1), при этом имеет место оценка скорости сходимости (18).

Полученный результат можно приложить к решению с.и.у., содержащего комплексно сопряженные неизвестные.

Действительно, рассмотрим уравнение

$$a(t)\varphi(t) + c(t)\overline{\varphi(t)} + b(t)(S\varphi)(t) + d(t)(S\bar{\varphi})(t) +$$

$$+ Th_1\varphi(t) + \overline{Th_2\varphi(t)} = f(t) . \qquad (19)$$

Будем искать решение $\varphi_n(t)$ в виде

$$\varphi_n(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=-n}^{n} (\alpha_k + \beta_{-k}) t^k ,$$

где коэффициенты α_k, β_k найдем из системы алгебраических уравнений, полученной применением метода подобластей к системе с.и.у. (1), где матрицы-функции (см. [3])

$$\mathcal{A}(t)=\begin{pmatrix} a(t) & c(t) \\ \overline{c(t)} & \overline{a(t)} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}(t)=\begin{pmatrix} b(t) & d(t) \\ -\overline{d(t)} & -\overline{b(t)} \end{pmatrix},$$
$$h(t,s)=\begin{pmatrix} h_1(t,\tau) & \overline{h_2(t,\tau)\,\tau_s'^2} \\ h_2(t,\tau) & \overline{h_1(t,\tau)\tau_s'^2}+2\,\overline{b(t)}\,\tau \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Тогда, повторяя приведенные выше рассуждения применительно к системе (1) с матрицами-функциями (20), получаем следующий результат.

Т е о р е м а 2. Пусть уравнение (19) разрешимо при любой правой части, коэффициенты уравнения принадлежат H_α, $\det[\mathcal{A}(t)\pm\mathcal{B}(t)]\neq 0$ на γ, а левые и правые частные индексы матрицы $\mathcal{Y}(t)=[\mathcal{A}(t)+\mathcal{B}(t)]^{-1}[\mathcal{A}(t)-\mathcal{B}(t)]$ равны нулю. Тогда, начиная с некоторого n, система метода подобластей для уравнения (19) однозначно разрешима и метод подобластей сходится в H_β со скоростью $O(n^{\beta-\alpha}\cdot\ln n)$, $0<\beta<\alpha\leq 1$.

В заключение выражаю благодарность Б.Г.Габдулхаеву за постановку задачи и внимание к работе.

Л и т е р а т у р а

1. З о л о т а р е в с к и й В.А. О сходимости коллокационного метода для систем сингулярных интегральных уравнений.- В сб.: Матем.исследования.- Кишинев: Штиинца, 1974,т.9, вып.I, с.56 - 69.

2. З о л о т а р е в с к и й В.А. О методе механических квадратур для систем сингулярных интегральных уравнений.- Изв.вузов. Матем., 1976, № 4, с. 47 - 55.

3. К а д у ш и н В.П. К прямым методам решения одного класса сингулярных интегральных уравнений.- Изв.вузов, Матем., 1976, № II, с. 109 - III.

4. Б и ц е н к о К.Б., Г р а м м е л ь Р. Техническая динамика, т.I. М., 1950.- 900 с.

5. П е т е р с е н И. О сходимости приближенных методов интерполяционного типа для обыкновенных дифференциальных уравнений.- Изв. АН Эст.ССР, сер. физ-матем. и техн. наук, 1961, т.10, с. 3 - 12.

6. К а р п и л о в с к а я Э.Б. О сходимости метода подобластей для обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений.- Вычислительная матем. и матем.физика, 1965, т.5,№ 1, с.124 - 132.

7. Г а б д у л х а е в Б.Г., А х м е т о в С.М. Прямые методы решения уравнения теории струй.- Дифференциальные уравнения, 1977, т.XIII, № 7, с. 1299 - 1307.

8. Г а б д у л х а е в Б.Г. Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. Казань, 1980.- 231 с.

9. Г а б д у л х а е в Б.Г. Аппроксимация в H-пространствах и приложения.- ДАН СССР, 1975, т.223, № 6, с. 1293-1296.

10. Г а б д у л х а е в Б.Г. Наилучшие приближения решений функциональных уравнений.- Международная конференция по теории приближения функций. Тезисы докладов. Киев,30 мая-6 июня 1983.

11. В е к у а Н.П. Системы сингулярных интегральных уравнений. М., 1970. - 379 с.

12. К а д у ш и н В.П. Приближенное решение сингулярных интегральных уравнений с комплексно сопряженными неизвестными.-В сб.: Математический анализ. Казань, 1978, с.39 - 51.

А.Л.Кузьмина

ОБ ИНТЕРВАЛЬНЫХ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛАХ ТИПА ГАУССА

Пусть задана система узлов x_k , $x_k \in [a,b]$, $k=\overline{1,n}$, и узловых интервалов $[u_i, v_i]$, $[u_i,v_i] \subset [a,b]$, $i=\overline{1,m}$, причем $x_k \notin [u_i,v_i]$ для всех k и i .

Функция $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$ и известны значения $f(x_k)$, $k=\overline{1,n}$, и

$$I_i(f)=\frac{1}{v_i-u_i}\int_{u_i}^{v_i} f(x)\,dx \ , \quad i=\overline{1,m} .$$