

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Артемов, И. М. Руткевич, О. А. Синкевич, Исследование устойчивости нелинейных стационарных режимов джоулева нагрева низкотемпературной плазмы, *ТВТ*, 1980, том 18, выпуск 6, 1126–1136

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 98.84.25.165

2 ноября 2024 г., 07:50:28



УДК 533.951.7

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ РЕЖИМОВ ДЖОУЛЕВА НАГРЕВА НИЗКОТЕМПЕРАТУРНОЙ ПЛАЗМЫ

Артемов В. И., Руткевич И. М., Синкевич О. А.

Проведен анализ устойчивости неоднородного состояния плоского разряда в термической плазме с возрастающей температурной зависимостью электропроводности $\sigma(T)$. Для случая ступенчатой зависимости $\sigma(T)$ и условий, когда в основном состоянии векторы электрического тока и потока тепла взаимно ортогональны, исследована устойчивость ограниченной плазмы относительно трехмерных возмущений. На основе точного решения краевой спектральной задачи установлено существование нейтральных двумерных и трехмерных возмущений, отвечающих от основного состояния на падающем участке вольт-амперной характеристики. Исследован спектр одномерных возмущений в разряде с внешней омической нагрузкой и показана возможность подавления таких возмущений при достаточно большой величине нагрузки. Обращается внимание на принципиальную возможность появления пространственных стационарных структур в области линейной неустойчивости.

1. Механизм перегретной неустойчивости в плазме обсуждался в работе [1], где проведен также анализ возмущений в рамках локального дисперсионного уравнения. В работе [2] для термической плазмы с возрастающей температурной зависимостью электропроводности $\sigma(T)$ проведено аналогичное исследование в условиях МГД-течения. На развитие перегретной неустойчивости в ограниченной среде существенно влияет взаимная ориентация векторов плотности электрического тока \mathbf{j}_0 и теплового потока \mathbf{q}_0 . В термической плазме развитию неустойчивости способствует поперечный к току теплообмен ($\mathbf{q}_0 \perp \mathbf{j}_0$).

Для поперечного теплообмена перегретная неустойчивость в ограниченной плазме исследовалась численно в [3] относительно одномерных возмущений. В [4] получены аналитические результаты по устойчивости плоского и цилиндрического разрядов относительно одномерных и двумерных возмущений в плоскости, перпендикулярной к \mathbf{j}_0 , для растущей экспоненциальной зависимости $\sigma(T)$. Рассмотрение неустойчивости, основанное на оценке скорости изменения энергии возмущений, проводилось в [5]. Приближенный анализ влияния границ на перегретную неустойчивость течения в МГД-канале при поперечном теплообмене проведен в [6], при продольном теплообмене — в [7].

Для поперечных задач ($\mathbf{q}_0 \perp \mathbf{j}_0$), характеризуемых возрастающей зависимостью удельного тепловыделения $F(T)$, распределение температуры описывается нелинейным уравнением параболического типа

$$\rho c_p \partial T / \partial t = \operatorname{div} (\kappa \nabla T) + F(T). \quad (1)$$

В задачах о джоулевым нагреве плазмы $F(T) = \sigma(T) E^2 - F_-(T)$, где F_- учитывает объемные потери (в неравновесной плазме уравнение типа (1) возникает для электронной температуры T_e , а F_- может включать в себя потери энергии при столкновениях электронов с тяжелыми частицами и

излучение). Задачи устойчивости джоулева нагрева металлов, полупроводников и неравновесной плазмы, сводящиеся к анализу спектра линейризованного уравнения типа (1), рассматривались в [8—11]. Аналогичные задачи ранее исследовались в теории устойчивости горения [12—14]. Математические аспекты устойчивости стационарных решений уравнения (1) рассматривались в работах [15—18].

Исследование перегретой неустойчивости при $q_0 \perp j_0$ для возмущений, меняющихся вдоль тока j_0 , не сводится к анализу спектра линейризованного уравнения (1) из-за наличия возмущений напряженности электрического поля δE . Специального анализа требует также случай одномерных температурных возмущений с учетом внешней электрической цепи, которая приводит к появлению пространственно-однородных возмущений δE . Насколько известно авторам, в литературе отсутствуют строгие результаты об устойчивости неоднородных стационарных состояний ограниченной плазмы при $q_0 \perp j_0$ относительно трехмерных возмущений. Необходимость исследования трехмерных возмущений обусловлена наличием двух выделенных направлений j_0 и q_0 в основном состоянии.

В данной работе проводится анализ устойчивости плоского разряда с поперечным теплообменом относительно трехмерных возмущений. Значительное внимание уделено возрастающей ступенчатой зависимости $\sigma(T)$. Использование такой зависимости, как показано в [19], позволяет эффективно моделировать неоднородные стационарные состояния разряда с S-образной зависимостью средней плотности тока от напряженности электрического поля $\langle j \rangle = \langle j \rangle(E)$. Изучена устойчивость некоторых стационарных состояний, рассчитанных в [19]. Обнаружена возможность ответвления от основного одномерного состояния двумерных и трехмерных стационарных структур. На основе точного решения спектральной задачи показана возможность стабилизации симметричных возмущений внешним сопротивлением.

2. Для плоского разряда ($|x| < l_{\perp}$) система уравнений относительно амплитуд возмущений температуры $\delta\psi = \psi_{\Lambda}(r) e^{pt}$ (далее будем, говоря о температуре, использовать функцию $\psi = \int_{\tau}^x \kappa(T) dT$) и электрического потенциала $\delta\varphi = \varphi_{\Lambda}(r) e^{pt}$ может быть записана в следующей безразмерной форме:

$$\psi_{\Lambda}'' + \frac{\partial^2 \psi_{\Lambda}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_{\Lambda}}{\partial z^2} - (\alpha\rho + F_{-\psi} - \lambda\sigma_{\psi})\psi_{\Lambda} - 2\lambda\sigma \frac{\partial \varphi_{\Lambda}}{\partial y} = 0, \quad (2)$$

$$(\sigma\varphi_{\Lambda}')' + \sigma \left(\frac{\partial^2 \varphi_{\Lambda}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{\Lambda}}{\partial z^2} \right) - \sigma_{\psi} \frac{\partial \psi_{\Lambda}}{\partial y} = 0.$$

Здесь штрих означает производную по координате x . Ось y совпадает с направлением невозмущенного тока j_0 . Входящие в (2) величины определяются формулами

$$\psi = [T_w \kappa(T_w)]^{-1} \int_{\tau_w}^{\tau} \kappa(T) dT, \quad \varphi = -(E_0 l_{\perp})^{-1} \int E dr, \quad \sigma = \frac{\sigma(T_0)}{\sigma(T_w)},$$

$$F_{-\psi} = \frac{l_{\perp}^2}{T_w \kappa(T_w)} \left(\frac{\partial F_-}{\partial \psi} \right)_0, \quad \sigma_{\psi} = (\partial \sigma / \partial \psi)_0, \quad (3)$$

$$\lambda = (E_0 l_{\perp})^2 \sigma(T_w) / [T_w \kappa(T_w)]; \quad \alpha = \rho(T_0) c_p(T_0) l_{\perp}^2 / [t_p \kappa(T_0)],$$

$$t_p = l_{\perp}^2 \rho(T_w) c_p(T_w) / \kappa(T_w).$$

Индексом нуль обозначены параметры невозмущенного состояния; T_w — температура наружной охлаждаемой поверхности стенки. Граничные условия на внутренней поверхности стенки могут быть представлены

в виде

$$(\psi_A \pm \beta \psi_A')_{x=\pm 1} = 0, \quad [\psi_A' \mp \gamma (\partial^2 \psi_A / \partial y^2 + \partial^2 \psi_A / \partial z^2)]_{x=\pm 1} = 0. \quad (4)$$

Здесь $\beta = \kappa(T_{w0})h / (\kappa_w l_{\perp})$ — параметр, учитывающий конечное термическое сопротивление стенки толщиной $h \ll l_{\perp}$, а $\gamma = \sigma(T_{w0})h / (\sigma_w l_{\perp})$ — параметр, характеризующий утечку тока по стенке [20]; κ_w и σ_w — значения тепло- и электропроводности материала стенки; $\kappa(T_{w0})$ и $\sigma(T_{w0})$ — значения тепло- и электропроводности плазмы на границе со стенкой в основном состоянии.

Так как коэффициенты системы (3) зависят только от координаты x , ее решения можно искать в виде

$$(\psi_A, \phi_A) = (\Psi(x), \Phi(x)) \exp i(k_y y + k_z z). \quad (5)$$

В этом представлении не учитываются пространственно-однородные возмущения электрического поля. Влияние таких возмущений будет рассмотрено отдельно при анализе устойчивости разряда с нагрузкой.

Система уравнений для функций Ψ , Φ и граничные условия запишутся в виде

$$\Psi'' - (k^2 + \alpha p - \lambda \sigma_{\psi} + F_{-\psi}) \Psi - 2i\lambda \sigma k_y \Phi = 0, \quad (6)$$

$$(\sigma \Phi')' - k^2 \sigma \Phi - ik_y \sigma_{\psi} \Psi = 0, \quad k^2 = k_y^2 + k_z^2, \quad (7)$$

$$(\Psi \pm \beta \Psi')_{x=\pm 1} = 0, \quad (\Phi' \pm k^2 \gamma \Phi)_{x=\pm 1} = 0.$$

Обычными методами можно показать, что краевая задача (6), (7) в общем случае не будет самосопряженной. Если первое и второе уравнения (6) умножить на комплексно-сопряженную функцию Ψ^* , затем из второго уравнения определить произведение $\sigma \Phi \Psi^*$ и подставить его в первое уравнение, получим следующее соотношение:

$$p \alpha \Psi \Psi^* = \Psi^* \Psi'' - (k^2 - \lambda \sigma_{\psi} + F_{-\psi}) \Psi \Psi^* - 2\lambda (k_y/k)^2 \sigma_{\psi} \Psi \Psi^* - 2i\lambda (k_y/k^2) \Psi^* (\sigma \Phi')'. \quad (8)$$

Интегрируя (8) в пределах $(-1, 1)$, с учетом граничных условий (7) получим

$$p \int_{-1}^1 \alpha |\Psi|^2 dx = - \int_{-1}^1 |\Psi'|^2 dx + \int_{-1}^1 \left\{ \lambda \sigma_{\psi} \left[1 - 2 \left(\frac{k_y}{k} \right)^2 \right] - F_{-\psi} - k^2 \right\} |\Psi|^2 dx + 2i\lambda \frac{k_y}{k^2} \left\{ \int_{-1}^1 \sigma \Phi' \Psi'' dx + k^2 \gamma [\Psi^*(1) \Phi(1) + \Psi^*(-1) \Phi(-1)] - \beta [|\Psi'(1)|^2 + |\Psi'(-1)|^2] \right\}. \quad (9)$$

Используя обозначения

$$I_1 = \int_{-1}^1 \alpha |\Psi|^2 dx, \quad I_2 = \int_{-1}^1 |\Psi'|^2 dx + \beta [|\Psi'(1)|^2 + |\Psi'(-1)|^2], \quad (10)$$

$$I_3 = \int_{-1}^1 \left\{ \lambda \sigma_{\psi} \left[1 - 2 \left(\frac{k_y}{k} \right)^2 \right] - F_{-\psi} - k^2 \right\} |\Psi|^2 dx,$$

$$I_4 = \int_{-1}^1 \sigma \Phi' \Psi'' dx + k^2 \gamma [\Psi^*(1) \Phi(1) + \Psi^*(-1) \Phi(-1)],$$

из (9) получим выражение, справедливое для каждого собственного значения задачи p

$$p = [I_3 - I_2 + 2i\lambda (k_y/k^2) I_4] / I_1. \quad (11)$$

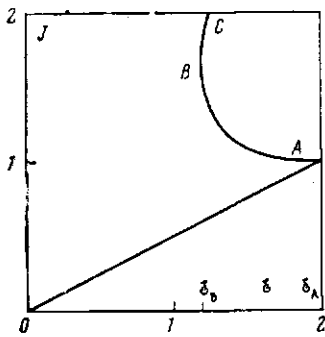


Рис. 1

Рис. 1. Зависимость $J(\mathcal{E})$ плоского разряда для ступенчатой зависимости $\sigma(\psi)$ вида (14) при $a=5$. $\mathcal{E} = \sqrt{2}\lambda/\psi_*$, $I = (j)l_1/\sqrt{2}\kappa(T_w)T_w\sigma(T_w)$

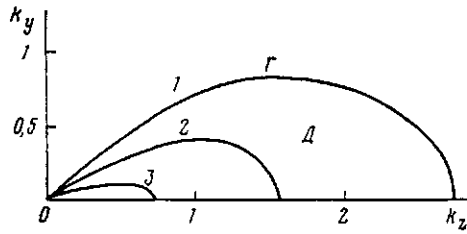


Рис. 2

Рис. 2. Нейтральные кривые для трехмерных возмущений плоского разряда, зависимость $J(\mathcal{E})$ которого приведена на рис. 1: Γ — нейтральная кривая, D — область неустойчивости. Значения x : 1 — 0,2; 2 — 0,3; 3 — 0,4

Для нетривиальных решений интегралы I_1 и I_2 всегда положительны. Для одномерных и двумерных возмущений с $k_y=0$ из (11) следует необходимое и достаточное условие неустойчивости

$$I_3 > I_2 > 0. \quad (12)$$

Видно, что условие

$$I_3 = \int_{-1}^1 F_\psi |\Psi|^2 dx > 0 \quad (F_\psi = \lambda\sigma_\psi - F_{-\psi} - k_z^2) \quad (13)$$

является только необходимым. Из (12), в частности, следует, что для функции F_ψ , меняющей знак на интервале $(-1, 1)$, неустойчивость может возникать, если вклад от областей G_+ , для которых $F_\psi > 0$ (их можно назвать областями локальной неустойчивости), превышает вклад от областей локальной устойчивости G_- , для которых $F_\psi < 0$, на величину интеграла I_2 . Для каждой точки области G_+ при $\delta\psi > 0$ флуктуации джоулева тепловыделения превышают объемные потери тепла; для точек области G_- потери преобладают. Интеграл I_2 отражает стабилизирующее влияние теплопроводности. Из (12) видно, что распределение температуры типа стационарного солитона (с одним максимумом в центре), имеющее место в ряде задач [9, 21], может быть как устойчивым, так и неустойчивым. Широким устойчивым солитонам соответствует преобладающий вклад в интеграл I_3 от области G_- . Для неустойчивых узких солитонов должен преобладать вклад от области G_+ . Критическая ширина, отделяющая устойчивые солитоны от неустойчивых, определяется из условия $I_3 = I_2$. Для двумерных возмущений в плоскости, перпендикулярной току ($k_y=0$), последнее слагаемое в выражении для I_3 , данном в (10), отражает стабилизирующее влияние теплопроводности в направлении z .

При $k_y=0$ наиболее опасны одномерные возмущения, но и в этом случае неустойчивость может не возникать, если рост $\sigma(\psi)$ является достаточно медленным. Если, например, $\sigma_\psi > 0$, $\sigma_{\psi\psi} \leq 0$, то из теорем [18] следует единственность и устойчивость стационарного решения поперечной задачи относительно одномерных возмущений.

При $\sigma_\psi < 0$ исходное состояние устойчиво относительно одномерных возмущений [5] и тем более относительно двумерных возмущений с $k_y=0$, но может быть неустойчивым по отношению к трехмерным возмущениям или к двумерным в плоскости электрический ток — поток тепла.

В случае $k_y=0$ краевая задача (6), (7) становится самосопряженной, и из (11) сразу вытекает принцип смены устойчивости.

3. Рассмотрим устойчивость конкретных стационарных состояний при

джоулевым нагреве термической равновесной плазмы в пренебрежении объемными потерями ($F_- = 0$). Будем исследовать случай возрастающей ступенчатой зависимости

$$\sigma(\psi) = \begin{cases} \sigma_0, & \psi < \psi_* \\ a\sigma_0, & \psi \geq \psi_* \end{cases} \quad (a > 1). \quad (14)$$

Для этой зависимости в [19] построено стационарное решение $\psi_0(x)$ и показано, что зависимость $\langle j \rangle(E)$ является S -образной. Типичная расчетная зависимость $\langle j \rangle(E)$ показана на рис. 1. На участках AB и BC $\psi_0(0) > \psi_*$, поэтому при некотором $|x| = x_* < 1$ проводимость $\sigma(\psi_0(x))$ претерпевает скачок. На падающем участке AB величина x_* определяется формулой

$$x_* = [a - 1 - \sqrt{a^2 - 2(2a - 1)\psi_*/\lambda}] / (2a - 1).$$

Отметим, что все результаты, относящиеся к каналовой модели разряда, могут быть получены предельным переходом: $\sigma_0 \rightarrow 0$, $a = \sigma_1/\sigma_0 \rightarrow \infty$, где σ_1 — электропроводность внутри токового канала.

В дальнейшем будем пренебрегать неоднородностью параметра $\rho_0 \sigma_p^0 / \kappa_0$, т. е. примем $\alpha = 1$. Система уравнений для возмущений вида (5) записывается в форме

$$\begin{aligned} \Psi_+'' - (k^2 + p)\Psi_+ - 2i\lambda a k_v \Phi_+ &= 0, & \Phi_+'' - k^2 \Phi_+ &= 0, & |x| < x_*, \\ \Psi_-'' - (k^2 + p)\Psi_- - 2i\lambda k_v \Phi_- &= 0, & \Phi_-'' - k^2 \Phi_- &= 0, & x_* < |x| \leq 1. \end{aligned} \quad (15)$$

Ниже предполагается $\beta = \gamma = 0$, т. е. стенки считаются изотермическими и непроводящими (обобщение полученных ниже результатов на случай конечных β и γ не представляет принципиальных трудностей)

$$\Psi_{\pm}(\pm 1) = 0, \quad \Phi_{\pm}'(\pm 1) = 0. \quad (16)$$

Необходимо также учесть условия непрерывности температуры, потенциала и нормальных составляющих векторов потока тепла и плотности электрического тока на возмущенной поверхности разрыва электропроводности. Эти условия можно записать в виде

$$\begin{aligned} \Psi_+(x_*) &= \Psi_-(x_*) = \Psi(x_*), & \Phi_+(x_*) &= \Phi_-(x_*), \\ \Psi_+'(x_*) - \Psi_-'(x_*) &= \frac{a-1}{ax_*} \Psi(x_*), \\ a\Phi_+'(x_*) - \Phi_-'(x_*) &= -\frac{ik_v(a-1)}{\lambda ax_*} \Psi(x_*). \end{aligned} \quad (17)$$

При выводе двух последних соотношений в (17) использовалось равенство $\psi = \psi_*$ на возмущенной поверхности разрыва. Специфика условий (17) заключается в том, что поверхность разрыва электропроводности претерпевает возмущения вместе с полем температуры. В этом состоит принципиальное отличие данной задачи от исследований возмущений в слоистой среде с заданной геометрией. Выражая с учетом последних соотношений в (16) и (17) решение краевой задачи для четных функций $\Phi_{\pm}(x)$ через значение $\Psi(x_*)$, приходим к краевой задаче для функций $\Psi_{\pm}(x)$

$$\Psi_+'' - (k^2 + p)\Psi_+ = 2ab \left(\frac{k_v}{k}\right)^2 \frac{k \operatorname{ch} \eta \operatorname{ch} kx}{a \operatorname{sh} \xi \operatorname{ch} \eta + \operatorname{ch} \xi \operatorname{sh} \eta} \Psi(x_*), \quad (18)$$

$$\Psi_-'' - (k^2 + p)\Psi_- = 2b \left(\frac{k_v}{k}\right)^2 \frac{k \operatorname{ch} \eta \operatorname{ch} k(1-x)}{a \operatorname{sh} \xi \operatorname{ch} \eta + \operatorname{ch} \xi \operatorname{sh} \eta} \Psi(x_*),$$

$$\Psi_+(x_*) = \Psi_-(x_*) = \Psi(x_*), \quad \Psi_+'(x_*) - \Psi_-'(x_*) = b\Psi(x_*),$$

$$\Psi_{\pm}(\pm 1) = 0 \quad (\xi = kx_*, \eta = k(1-x_*), b = (a-1)/(ax_*)).$$

Дисперсионное уравнение для симметричных по x решений краевой задачи (18) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} & (a \operatorname{ch} \eta \operatorname{sh} \xi + \operatorname{sh} \eta \operatorname{ch} \xi) (\mu \operatorname{ch} \mu - b \operatorname{sh} \chi \operatorname{ch} \zeta) k p + \\ & + 2 b k_v^2 [a \operatorname{ch} \eta \operatorname{sh} \chi (\mu \operatorname{ch} \xi \operatorname{sh} \zeta - k \operatorname{sh} \xi \operatorname{ch} \zeta) + \\ & + \operatorname{ch} \xi \operatorname{ch} \zeta (\mu \operatorname{ch} \chi \operatorname{ch} \eta - k \operatorname{sh} \chi \operatorname{sh} \eta - \mu)] = 0 \\ & (\mu = \sqrt{k^2 + p}, \quad \xi = \mu x, \quad \chi = \mu(1-x)). \end{aligned} \quad (19)$$

Рассмотрим сначала двумерные возмущения при $k_v = 0$. Спектр таких возмущений определяется из уравнения

$$\operatorname{ch} \mu / \operatorname{ch} \xi = b \operatorname{sh} \chi / \mu. \quad (20)$$

Исследование этого уравнения относительно $\mu^2(x, a)$ показывает, что при $x > x_c$ положительных корней не существует, а при $x < x_c$ имеется единственный положительный корень, обозначаемый ниже через μ_1^2 . Величина x_c определяется формулой $x_c = (a-1)/(2a-1)$.

При изменении x от 0 до x_c точки зависимости $\langle j \rangle(E)$ пробегает участок AB , а при дальнейшем увеличении x — участок BC . Величина μ_1^2 — монотонно убывающая функция от x , пробегающая интервал $(0, \infty)$ при убывании x от x_c до 0.

Для антисимметричных по x двумерных возмущений ($k_v = 0$) справедливо дисперсионное уравнение

$$\operatorname{sh} \mu / \operatorname{sh} \xi = b \operatorname{sh} \chi / \mu. \quad (21)$$

Легко показать, что это уравнение относительно μ^2 не имеет положительных корней, поэтому антисимметричные возмущения затухают.

Анализ возмущений с $k_v = 0$ позволяет сделать следующие выводы: 1) возрастающий участок BC устойчив; 2) на падающем участке AB для каждого стационарного состояния имеется единственная собственная функция, соответствующая одномерному растущему возмущению, инкремент которого растет с увеличением электрического поля; 3) для каждой точки участка AB существует континуум нарастающих двумерных возмущений с $k_x^2 < \mu_1^2$; 4) при $k_x^2 = \mu_1^2$ существуют нейтрально устойчивые двумерные возмущения, т. е. все значения E из интервала (E_B, E_A) являются бифуркационными — от исходного одномерного состояния могут ответвляться двумерные; 5) если разряд в направлении z ограничен тепло- и электроизоляционными стенками, то на интервале (E_B, E_A) имеется счетное множество бифуркационных значений E , для которого E_A — точка сгущения.

Отметим, что, несмотря на большую величину инкремента при $E \rightarrow E_A$, имеется лишь одна одномерная собственная функция с $p > 0$. Если обратиться к аналогии между уравнением для Ψ и одномерным уравнением Шредингера, то последнему для принятой зависимости $\sigma(\phi_0(x))$ отвечает дельта-образная потенциальная яма, расположенная в точке x_c , внутри которой, как известно [22], существует только один энергетический уровень. Вывод о существовании единственной одномерной собственной функции с $p > 0$ на падающем участке $\langle j \rangle(E)$ аналогичен полученному в [4] для экспоненциальной зависимости $\sigma(T)$.

Перейдем к исследованию трехмерных возмущений. Дисперсионное уравнение (19) имеет решение $p = 0$ при условии

$$\begin{aligned} & \left(\frac{k_v}{k} \right)^2 = \sin^2 \theta = \\ & = \frac{(a \operatorname{ch} \eta \operatorname{sh} \xi + \operatorname{sh} \eta \operatorname{ch} \xi) (b \operatorname{sh} \eta \operatorname{ch} \xi - k \operatorname{ch} k)}{b [a x k \operatorname{sh} \eta \operatorname{ch} \eta + \operatorname{ch} \xi \operatorname{sh} \eta (a \operatorname{sh} \xi \operatorname{ch} \eta + \operatorname{ch} \xi \operatorname{sh} \eta)]}. \end{aligned} \quad (22)$$

Соотношение (22) определяет нейтральную кривую Γ в плоскости (k_y, k_z) при различных значениях параметров x и a . Семейство нейтральных кривых для $a=5$ при нескольких значениях x показано на рис. 2. Из (22) видно, что для точек из области неустойчивости D выполняется неравенство $k^2 < \mu_1^2$, а Γ проходит через начало координат и точку $k_y=0, k_z=\mu_1$. Угол наклона нейтральной кривой к оси k_z в начале координат θ_0 определяется формулой

$$\sin^2 \theta_0 = [(a-1)x+1](1-x/x_c) / \{(1-x)[(2a-1)x+1]\}.$$

То обстоятельство, что нейтральная кривая проходит через начало координат, на первый взгляд, может показаться неожиданным, так как при движении вдоль луча $\theta = \text{const}$ инкремент первой четной по x моды $p(k, \theta)$ при $k \rightarrow 0$ стремится к пределу $p_0(\theta)$, зависящему от выбора луча. Зависимость предельного при $k \rightarrow 0$ спектра краевой задачи от θ видна уже из двух первых уравнений (18), правые части которых при $k \rightarrow 0$ стремятся к конечным пределам $\sim \Psi(x) \sin^2 \theta$. Наличие зависимости $p_0(\theta)$ обусловлено тем, что, хотя при $k \rightarrow 0$ и фиксированном θ возмущение температуры стремится к одномерному (зависящему от координаты x), возмущение электрического поля при $k \rightarrow 0$ не исчезает, а стремится к конечному пределу

$$\lim_{k \rightarrow 0} \delta \mathbf{E} = - \frac{b \sin \theta \mathbf{E}_0}{(ax+1-x)\lambda} \Psi(x) e^{p' \mathbf{n}}, \quad (23)$$

где \mathbf{n} — единичный вектор в направлении \mathbf{k} . Поэтому при $k \rightarrow 0$ имеется зависящий от θ стабилизирующий вклад величины $2\sigma_0 \mathbf{E}_0 \delta \mathbf{E}$ в флуктуацию джоулева тепловыделения.

Формулу (23) можно вывести как предельным переходом $k \rightarrow 0$ в выражениях для собственных функций Φ_{\pm} , так и следующим (физически более наглядным) способом. Из периодической зависимости возмущения $\mathbf{n} \delta \mathbf{j} \sim \exp(ikY)$ от переменной $Y = n_y y + n_z z$ следует

$$\int_{Y_0}^{Y_0+2\pi/k} \mathbf{n} \delta \mathbf{j} dY = 0,$$

где Y_0 произвольно. Интегрируя последнее соотношение по x , после изменения порядка интегрирования получим

$$\int_{Y_0}^{Y_0+2\pi/k} \delta I dY = \frac{2\pi}{k} \delta I = 0 \quad \left(\delta I = \int_{-1}^1 \mathbf{n} \delta \mathbf{j} dx \right). \quad (24)$$

В первом равенстве (24) использовано отсутствие зависимости величины возмущения полного тока δI через единичную площадку: $Y = \text{const}$, $|x| < 1$, $|Z| < 1$ от координаты Y (здесь ось Z ортогональна плоскости векторов \mathbf{e}_x и \mathbf{n}), следующее из равенства нулю возмущения полного тока через боковую поверхность призмы с основаниями $Y=Y_1$ и $Y=Y_2$. Из (24) следует, что $\delta I = 0$ для периодических возмущений. Переходя в этом равенстве к пределу при $k \rightarrow 0$, с учетом линеаризованного закона Ома получим

$$\lim_{k \rightarrow 0} \mathbf{n} \delta \mathbf{E} = - \frac{E_0 \sin \theta}{\langle \sigma \rangle_0} \langle \delta \sigma \rangle. \quad (25)$$

Здесь $\langle \sigma \rangle_0$ — средняя по x проводимость в основном состоянии, $\langle \delta \sigma \rangle$ — среднее возмущение проводимости, отвечающее одномерному возмущению

температуры и соответствующему смещению δx .

$$\frac{\langle \sigma \rangle_0}{\sigma_0} = ax + 1 - x, \quad \frac{\langle \delta \sigma \rangle}{\sigma_0} = (a-1)\delta x, \quad \delta x = \frac{\Psi(x)}{\lambda ax} e^{pt}. \quad (26)$$

Используя формулы (26) и условие параллельности предельного (при $k \rightarrow 0$, $\theta = \text{const}$) возмущения δE вектору \mathbf{n} , из (25) получим формулу (23). Итак, наличие предельного возмущения поля (23) — следствие сохранения полного тока в направлении периодического изменения потенциала и температуры при произвольной большой длине волны. Очевидно, что такое возмущение поля не возникало бы в среде с постоянной электропроводностью ($a=1$).

При возрастании E на интервале (E_B, E_A) область неустойчивости относительно трехмерных возмущений расширяется. Так как $p=0$ на нейтральной кривой Γ , то для всех $E \in (E_B, E_A)$ от исходного одномерного состояния могут ответвляться трехмерные стационарные структуры, состоящие из прямоугольных ячеек. Кривая Γ , показанная на рис. 2, представляет собой только четверть полной нейтральной кривой, имеющей форму «восьмерки» и получаемой отражением Γ относительно координатных осей. Простейшая прямоугольная ячейка с бесконечно малой амплитудой изменения параметров получается суперпозицией двух возмущений вида (5) с равными амплитудами и волновыми векторами \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 — симметричными относительно одной из осей k_y или k_z точками «восьмерки». Размер трехмерной ячейки в направлении неоднородности исходного состояния всегда равен ширине плоского разряда. В этом состоит отличие результата точного решения краевой задачи от получаемого с помощью квазиклассического метода «замороженных» коэффициентов. Согласно этому приближенному методу, допустимые размеры ячейки в перпендикулярных к току направлениях x и z были бы равноправны.

Отметим, что в случае цилиндрической геометрии можно ожидать возникновения трехмерных винтовых стационарных структур. Для экспоненциальной модели проводимости $\sigma = \sigma_0 e^{\psi/\psi_0}$ в [4] установлена устойчивость цилиндрического разряда относительно радиально-азимутальных двумерных возмущений. Из этого результата следует несуществование двумерных и трехмерных стационарных структур в таком цилиндрическом разряде, ответвляющихся от основного состояния. Вместе с тем существование нейтральных стационарных двумерных и трехмерных возмущений в плоской геометрии свидетельствует о возможности появления аналогичных структур на падающем участке зависимости $\langle j \rangle(E)$ в разряде, стабилизированном коаксиальными цилиндрическими стенками при достаточно малой величине зазора между ними (как для ступенчатой, так и для экспоненциальной зависимости $\sigma(\psi)$).

4. Перейдем к исследованию условий стабилизации стационарных состояний внешней омической нагрузкой R , включенной последовательно с плоским разрядом при фиксированной э.д.с. внешнего источника. Для зависимости вида (14) ограничимся случаем одномерных возмущений температуры, порождающих пространственно-однородные возмущения электрического поля. В результате придем к следующей краевой задаче:

$$\begin{aligned} \Psi_+'' - p\Psi_+ &= av\Psi(x), & \Psi_-'' - p\Psi_- &= v\Psi(x), & \cdot & (27) \\ \Psi_+'(0) &= 0, & \Psi_-(1) &= 0, & \Psi_+(x_*) &= \Psi_-(x_*) = \Psi(x_*), \\ \Psi_+'(x_*) &- \Psi_-'(x_*) &= b\Psi(x_*), \\ v &= \frac{2(a-1)}{ax \cdot [(a-1)x + 1 + aR_0/R]}, & R_0 &= \frac{l_y}{2l_z l_x a \sigma_0}. \end{aligned}$$

Здесь $2l_y$ и $2l_z$ — размеры разряда в направлениях y и z соответственно; R_0 — сопротивление однородного разряда при максимальной проводимости.

Остальные обозначения те же, что в формулах п.3. При выводе системы (27) использовалось следствие интегрального закона Ома для полной цепи

$$\delta E_v = -E_0 \frac{\langle \delta \sigma \rangle}{\langle \sigma \rangle_0 + a \sigma_0 R_0 / R} \quad (28)$$

Величины $\langle \delta \sigma \rangle$ и $\langle \sigma \rangle_0$ определены в (26). Дисперсионное уравнение для симметричных решений краевой задачи (27) имеет вид

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} \sqrt{p} - b \frac{\operatorname{ch}(\sqrt{p}x) \operatorname{sh}(\sqrt{p}(1-x))}{\sqrt{p}} + \frac{v}{p} [a \operatorname{sh}(\sqrt{p}x) \times \\ \times \operatorname{sh}(\sqrt{p}(1-x)) + \operatorname{ch}(\sqrt{p}x) \{ \operatorname{ch}(\sqrt{p}(1-x)) - 1 \}] = 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Это уравнение имеет решение $p=0$ при условии

$$\frac{R}{R_0} = \frac{R_c}{R_0} = \frac{2a-1}{a} \left(\frac{x_c}{x} - 1 \right). \quad (30)$$

При $0 \leq R < R_c$ симметричные возмущения, соответствующие первой моде, нарастают со временем. При $R > R_c$ разряд устойчив относительно одномерных возмущений. Из анализа исходного стационарного решения следует, что в каждой точке падающего участка кривой $\langle j \rangle(E)$ величина $-R_d = -dU/dI$ равна R_c . В [4] условие стабилизации перегретой неустойчивости ($R > -R_d$) на падающем участке S -образной зависимости $\langle j \rangle(E)$ получено на основе нестрогого качественного рассмотрения. Для принятой ступенчатой зависимости (14) это условие подтверждается строгим анализом решения несамосопряженной краевой задачи (27). Отметим, что нарушение самосопряженности спектральной задачи при учете нагрузки обнаружено в работе [23], где рассматривался случай продольного теплообмена в основном состоянии. Другой пример возникновения несамосопряженного оператора (при учете влияния внешнего сопротивления на спектр акустических колебаний плазмы) содержится в [24].

Отметим аналогию между краевой задачей (27) и задачей (18) при $k \rightarrow 0$. Нетрудно видеть, что с точностью до замены

$$\sin^2 \theta = \frac{(a-1)x + 1}{(a-1)x + 1 + aR_0/R}$$

одна из этих задач переходит в другую. Указанная аналогия не случайна, так как обе задачи описывают одномерные возмущения температуры и связанные с ними пространственно-однородные возмущения электрического поля. Критическому значению внешней нагрузки R_c можно поставить в соответствие угол θ_0 , разделяющий направления роста и затухания периодических возмущений при стремлении длины волны к бесконечности.

Стабилизация одномерных возмущений внешней нагрузкой на падающей ветви зависимости $\langle j \rangle(E)$ возможна и для других зависимостей $\sigma(\psi)$. Для часто используемой экспоненциальной зависимости $\sigma = \sigma_0 e^{\psi}$ возникает спектральная задача

$$\begin{aligned} \Psi'' - (p + V(x)) \Psi = mV(x) \int_0^1 \exp[\psi_0(x)] \Psi(x) dx, \quad (31) \\ \Psi'(0) = \Psi(1) = 0, \quad V(x) = -2(cq)^2 / \operatorname{ch}^2(cqx), \quad q = \lambda/2, \\ c = \frac{1}{2} \exp[\psi_0(0)], \quad m = -4r \left[1 + 2r \int_0^1 \exp[\psi_0(x)] dx \right]^{-1}, \\ r = \frac{2R\sigma_0 l_{\perp} l_z}{l_y}. \end{aligned}$$

В отличие от (27) краевая задача (31) является самосопряженной благодаря принятой зависимости $\sigma(\psi)$. Точное решение этой задачи возможно, однако требует довольно громоздких вычислений, поэтому для оценки стабилизирующего влияния нагрузки воспользуемся следующим приближенным приемом. Заменим функцию $V(x)$ прямоугольной «потенциальной ямой»

$$V(x) = -2(cq)^2 \quad (|x| \leq x_1), \quad V(x) = 0 \quad (x_1 < |x| \leq 1),$$

$$x_1 = [\ln(2 + \sqrt{3})] / (2cq). \quad (32)$$

Здесь значение x_1 — координата точки перегиба на профиле $V(x)$. Дисперсионное уравнение задачи (31) для модельной зависимости (32) имеет вид

$$\tau \operatorname{tg}(\tau x_1) \frac{\operatorname{th}(\sqrt{p}(1-x_1))}{\sqrt{p}} - 1 - 8r \frac{c^4 q^2 \operatorname{tg}(\tau x_1)}{(1+2rc^2 x_1)\tau^2 - 8rc^4 q^2 x_1} = 0, \quad (33)$$

где $\tau^2 = 2(cq)^2 - p$. Для падающей ветви зависимости $\langle j \rangle(E)$, характеризуемой неравенством $cq > (cq)_c$, из (33) следует условие устойчивости

$$r > r_c = \frac{q}{4c} \frac{cq - (cq)_c}{1 + s[cq - (cq)_c]}, \quad (cq)_c = s + \frac{1}{\sqrt{2} \operatorname{tg} s}, \quad s = \frac{\ln(2 + \sqrt{3})}{\sqrt{2}}. \quad (34)$$

Из (34) следует, что с помощью выбора внешней нагрузки можно стабилизировать любое состояние на падающей ветви $\langle j \rangle(E)$ относительно одномерных возмущений. Качественное поведение зависимости $r_c(q)$, входящей в (34), аналогично поведению величины R_s на падающей ветви $\langle j \rangle(E)$.

5. Проведенное исследование устойчивости одномерных нелинейных режимов джоулевого нагрева ограниченной плазмы в условиях поперечного теплообмена и сопоставление с результатами, полученными в [4], позволяет сделать следующие выводы.

При резком возрастании $\sigma(\psi)$, приводящем к образованию падающего участка на зависимости $\langle j \rangle(E)$, стационарные одномерные состояния на этом участке неустойчивы в режиме фиксированного напряжения. Наибольшим инкрементом обладают одномерные возмущения, зависящие от координаты x . Такие возмущения могут быть подавлены за счет выбора подходящей внешней нагрузки. Вместе с тем нагрузка не стабилизирует нарастающие двумерные и трехмерные возмущения, антисимметричные по z .

В настоящей работе указано на возможность возникновения в плоском разряде двумерных стационарных структур в виде призматических нитей, вытянутых вдоль тока, и трехмерных стационарных структур в виде прямоугольных пространственных ячеек. Двумерные стационарные структуры в плоскости векторов \mathbf{j}_0 и \mathbf{q}_0 при растущей зависимости вида (14) невозможны. Трехмерные стационарные распределения, в отличие от двумерных, характеризуются неоднородным электрическим полем. Вопрос о том, какие именно структуры будут возникать на падающем участке зависимости $\langle j \rangle(E)$ при увеличении тока в разряде с нагрузкой, подавляющей одномерные возмущения, требует специального исследования нелинейной стадии развития неустойчивости. Хотя двумерные возмущения с $k_y = 0$ обладают большим инкрементом, чем трехмерные, нельзя исключать возможность «выживания» трехмерных структур за счет нелинейных волновых взаимодействий. Отметим, в частности, что «выживание» возмущений с меньшим линейным инкрементом обнаружено в численных рас-

четах нелинейных взаимодействий при исследовании гидродинамической неустойчивости [25].

Авторы выражают благодарность В. Д. Хаиту за полезное обсуждение работы.

Московский энергетический
институт

Поступила в редакцию
28 IX 1979

Институт высоких температур
Академии наук СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Б. Кадомцев. В сб. Вопросы теории плазмы, вып. 2. Атомиздат, 1963.
2. J. K. Wright. Proc. Phys. Soc., 81, 521, 1963.
3. D. Dobrott, R. L. Miller, J. M. Rawls. Phys. Fluids, 20, 10, 1977.
4. А. В. Недоспасов, В. Д. Хаит. Колебания и неустойчивости низкотемпературной плазмы. «Наука», 1979.
5. Ю. С. Левитан. ТВТ, 15, № 2, 1977.
6. Ю. В. Саночкин. ПМТФ, 5, 1967.
7. В. Д. Хаит. ТВТ, 11, № 3, 1973.
8. D. D. Joseph. Int. J. Heat Mass Trans., 8, 2, 1965.
9. V. W. Knight, G. A. Peterson. Phys. Rev., 155, 2, 1967.
10. А. Ф. Волков, Ш. М. Коган. УФН, 96, 4, 1968.
11. Ю. Ю. Абрамов, Г. Г. Гладуш. ПМТФ, 2, 1974.
12. Г. И. Баренблатт, Я. Б. Зельдович. ПММ, 21, 6, 1957.
13. А. Г. Истратов, В. Б. Либрович. ПММ, 27, 2, 1963.
14. С. А. Каганов. ПММ, 31, 6, 1967.
15. Б. А. Костандян. ПММ, 25, 3, 1961.
16. Л. Ф. Размагулина. ПММ, 25, 3, 1961.
17. Ю. И. Дымшляк. ПММ, 27, 1, 1963.
18. Г. Б. Келлер. В сб. Теория ветвления и нелинейные задачи на собственные значения. «Мир», 1974.
19. И. М. Руткевич, О. А. Синкевич. ТВТ, 18, № 1, 1980.
20. Дж. Шерклиф. Теория электромагнитного измерения расхода. «Мир», 1965.
21. О. А. Синкевич. ПММ, 41, 6, 1977.
22. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Теоретическая физика, 3. Квантовая механика. «Наука», 1974.
23. А. Г. Куликовский, С. А. Регирер. ПМТФ, 5, 1965.
24. И. М. Руткевич. Изв. АН СССР, МЖГ, 1, 1978.
25. С. Я. Герценштейн, В. М. Шмидт. Изв. АН СССР, МЖГ, 2, 1977.