А. М. Вершик, М. Йор, Н. В. Цилевич, О тождествах Маркова–Крейна и квазиинвариантности гамма-процесса, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 2001, том 283, 21–36

Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 283, 2001 г.

А. М. Вершик, М. Йор, Н. В. Цилевич

О ТОЖДЕСТВЕ МАРКОВА—КРЕЙНА И КВАЗИИНВАРИАНТНОСТИ ГАММА–ПРОЦЕССА

Посвящается памяти С. В. Керова

1. Введение: процессы Дирихле, гамма-процессы и тождество Маркова–Крейна. Целью данной работы является доказательство тождества Маркова–Крейна для распределений средних значений линейных функционалов от процессов Дирихле при помощи представления процессов Дирихле как нормированных гамма-процессов. Этот подход к процессам Дирихле оказывается очень продуктивным, в частности, позволяет получить формулу Маркова–Крейна почти мгновенно.

Процессы Дирихле, введенные в работе [4], играют ключевую роль в байесовской непараметрической статистике. Классическое определение этих процессов состоит в следующем. Обозначим через

$$\Delta_n = \{x = (x_0, \dots, x_n) : x_i \geqslant 0, \sum x_i = 1\}$$

стандартный n-мерный симплекс. Распределение Дирихле $\mathrm{Dir}(\tau_0, \dots, \tau_n)$ на симплексе Δ_n с параметрами $\tau_0, \dots, \tau_n > 0$ задается плотностью

$$\frac{\Gamma(\tau_0 + \dots + \tau_n)}{\Gamma(\tau_0) \dots \Gamma(\tau_n)} x_0^{\tau_0 - 1} \dots x_n^{\tau_n - 1}$$

по лебеговой мере на Δ_n.

Определение 1. Пусть (X, ν) – стандартное борелевское пространство с неатомической конечной положительной мерой ν. Процессом Дирихле на пространстве X с параметрической мерой ν называется случайное вероятностное распределение P на пространстве X, такое, что для любого конечного измеримого

Первый и третий автор частично поддержаны грантом РФФИ 99-01-00098, первый автор – также грантом CRDF RM1-2244.

разбиения $X = A_0 \cup \ldots \cup A_n$ вектор $(P(A_0), \ldots, P(A_n))$ имеет распределение Дирихле $\mathrm{Dir}(\nu(A_0), \ldots, \nu(A_n))$ на симплексе Δ_n.

Обозначим через $\theta = \nu(X)$ полный заряд меры ν, и пусть $\bar{\nu} = \nu/\theta$ – нормированная мера ν. Явная конструкция процесса Дирихле на пространстве (X, ν) задается следующей формулой:

$$P = \sum_{i=1}^{\infty} Q_i \delta_{Y_i}, \tag{1}$$

где $Y = (Y_1, Y_2, \ldots)$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин на пространстве X с общим распределением $\bar{\nu}$, а $Q = (Q_1, Q_2, \ldots)$ – случайный вектор бесконечномерного симплекса

$$\Sigma = \{x = (x_1, x_2, \ldots) : x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant 0, \sum x_i = 1\},$$

который не зависит от Y и имеет *распределение Пуассона–Дирихле* $PD(\theta)$ с параметром θ.

Множество работ посвящено изучению распределений случайных средних от процесса Дирихле. Пусть $a : X \to \mathbb{R}$ – измеримая функция. Она задает линейный функционал $f_a(\xi) = \int_X a(x) d\xi(x)$ на пространстве борелевских мер на X. Задача состоит в описании распределения μ_a этого функционала относительно процесса Дирихле P. Ответ заключается в следующем. Пусть ν_a – распределение функции a относительно нормированной параметрической меры $\bar{\nu}$. Тогда меры μ_a и ν_a связаны следующим интегральным тождеством:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+zu)^{\theta}} d\mu_a(u) = \exp\left(-\int_X \log(1+zu)^{\theta} d\nu_a(u)\right), \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}. \tag{$*$}$$

Если рассматриваемые меры имеют конечные моменты любого порядка, то тождество $(*)$ равносильно следующему моментному соотношению (которое следует понимать как равенство формальных степенных рядов):

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_n z^n = \exp \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{n} z^n,$$

где $h_n = \int u^n d\mu_a(u)$ и $p_n = \int u^n d\nu_a(u)$ – моменты мер μ_a и ν_a соответственно. Заметим, что это соотношение совпадает с тождеством из теории симметрических функций, связывающим полные симметрические функции и степенные суммы (см. [12], стр. 29).

Формула $(*)$ была впервые получена в работе [2] при помощи сложных аналитических выкладок (см. также более простые доказательства в работах [3, 8]). В случае $\theta = 1$ она означает, что распределение μ_a является *преобразованием Маркова–Крейна* меры ν_a (термин, предложенный С. В. Керовым). Это преобразование возникает в самых разнообразных контекстах, таких как проблема моментов Маркова, теория непрерывных дробей, экспоненциальные представления аналитических функций, функция спектрального сдвига самосопряженного оператора, планшерелевский рост диаграмм Юнга и т.д. (см. подробный обзор в работе С. В. Керова [7]). Впервые оно появилось в работе А. А. Маркова [13] и впоследствии интенсивно изучалось М. Г. Крейном и его школой. В частности, преобразование Маркова–Крейна осуществляет связь между так называемой проблемой моментов Маркова и классической проблемой моментов Хаусдорфа. Обсудим кратко эту связь.

Напомним, что проблема моментов Хаусдорфа состоит в описании всех последовательностей $s_0, s_1, \ldots$, являющихся моментными последовательностями вероятностных мер $\varkappa$ на отрезке $[0, 1]$. Решение этой проблемы хорошо известно. Менее известная проблема моментов Маркова состоит в описании всех последовательностей $m_0, m_1, \ldots$, являющихся моментными последовательностями *абсолютно непрерывных* мер $f(t)dt$ на отрезке $[0, 1]$ с *ограниченными* плотностями: $0 \leqslant f(t) \leqslant 1$. Оказывается (см. [10]), что вторая проблема может быть сведена к первой следующим образом. Имеется взаимно однозначное соответствие между ограниченными плотностями $0 \leqslant f(t) \leqslant 1$ на отрезке $[0, 1]$ и вероятностными мерами $\varkappa$ на $[0, 1]$, задаваемое формулой

$$\int_0^1 \frac{d\varkappa(t)}{z-t} = \frac{1}{z} \exp \int_0^1 \frac{f(t)dt}{z-t}, \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}. \qquad (**)$$

В терминах моментов это соотношение принимает вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} s_n z^{-n} = \exp \sum_{n=1}^{\infty} m_{n-1} z^{-n},$$

что позволяет явно выразить моменты меры $\varkappa$ через моменты меры $f(t)dt$. Отсюда следует, что последовательность $\{m_n\}$ является моментной последовательностью Маркова тогда и только тогда, когда последовательность $\{s_n\}$, построенная по ней с помощью вышеприведенной формулы, является моментной последовательностью Хаусдорфа. Имеется явная вероятностная процедура, принадлежащая С. В. Керову [6], для построения меры $\varkappa$, связанной с данной мерой $f(t)dt$ соотношением $(**)$. Чтобы свести тождество $(**)$ к $(*)$, нужно положить $f(t) = \nu_a((t,\infty)) = \nu(\{x \in X : a(x) > t\})$ и $\varkappa = \mu_a$, заменить z на $-\frac{1}{z}$ и проинтегрировать по частям.

В данной заметке мы представляем новое, удивительно простое и прозрачное доказательство тождества Маркова–Крейна для распределения средних от процесса Дирихле, основанное на тесной связи между процессами Дирихле и гамма-процессами. Исходной точкой для нашего подхода является следующий очевидный факт.

Связь между процессами Дирихле и гамма-процессами. *Процесс Дирихле на пространстве X с параметрической мерой ν можно представить как нормированный гамма-процесс $\bar\gamma(x) = \gamma(x)/\gamma(X)$.*

Итак, задача об описании распределений средних относительно процессов Дирихле может быть сформулирована в терминах гамма-процессов следующим образом. *Пусть имеется линейный функционал $f_a(\xi) = \int_X a(x)d\xi(x)$, задаваемый функцией $a : X \to \mathbb{R}_+$. Описать распределение μ_a функционала f_a относительно нормированного гамма-процесса $\bar\gamma$ в терминах распределения ν_a функции a.*

Эта редукция к гамма-процессам является мощным инструментом для изучения процессов Дирихле. В частности, уже простейшие свойства гамма-процессов позволяют легко получить формулу $(*)$. Ключевым моментом является следующее важнейшее свойство:

Свойство независимости. *Нормированный гамма-процесс $\bar\gamma$ и полный заряд $\gamma(X)$ гамма-процесса независимы.*

Согласно частному сообщению С. В. Керова, в простейшем случае *дискретной* параметрической меры ν (в этом случае гамма-процесс есть просто сумма независимых гамма-величин, а нормированный гамма-процесс – случайная точка конечномерного симплекса с распределением Дирихле) идея доказательства формулы (∗) через преобразование Лапласа для гамма-величин была использована Ф. Хаффером. Однако ранее не было замечено, что в случае произвольной параметрической меры задача может быть поразительно просто решена с использованием общих гамма-процессов.

Отметим, что свойство независимости влечет многие другие замечательные свойства гамма-процессов, например, так называемую мультипликативную квазиинвариантность, см. [17, 19]:

Свойство квазиинвариантности. *Гамма-процесс γ на пространстве (X,ν) квазиинвариантен относительно мультипликаторов $M_a\gamma(x) = a(x)\gamma(x)$ для всех функций $a : X \to \mathbb{R}_+$, таких что $\int_X |\log a(x)| d\nu(x) < \infty$.*

Упомянем также, что распределение гамма-процесса допускает эквивалентную сигма-конечную меру, которая является уже *инвариантной* относительно всех мультипликаторов M_a. Эта мера обладает множеством важных свойств, она является естественным бесконечномерным аналогом меры Лебега и играет ключевую роль в теории представлений группы токов $SL(2,\mathbb{R})^X$. См. подробное изложение этого сюжета в [19].

Мы хотели бы подчеркнуть, что переход от процесса Дирихле к гамма-процессу (т. е. от нормированного процесса к ненормированному, или от симплекса к конусу) делает доказательство формулы Маркова–Крейна (∗) для процессов Дирихле удивительно простым. По-видимому, было бы полезно рассмотреть саму проблему моментов Маркова и многочисленные связанные с ней вопросы с этой точки зрения. Интересно, что очень похожее поднятие с симплекса на конус было недавно использовано А. М. Бородиным и Г. И. Ольшанским в работе по гармоническому анализу на бесконечной симметрической группе и точечным процессам, см., например, [1].

Тождество Маркова–Крейна (∗) можно интерпретировать также как соотношение между преобразованием Лапласа распределения функционала f_a относительно гамма-процесса и преобразованием Коши распределения того же функционала относительно нормированного гамма-процесса.

Наша интерпретация тождества Маркова–Крейна приводит к следующей общей проблеме: для произвольного процесса Леви

η на пространстве (X,ν) и функции $a: X \to \mathbb{R}_+$ описать соотношение между распределением функционала f_a относительно η и распределением того же функционала относительно нормированного процесса $\bar{\eta}$.

Основные результаты данной работы были опубликованы в виде препринта [18].

2. Общие процессы Леви. Естественно рассматривать процессы Дирихле в контексте общих процессов Леви. В этом разделе мы приводим необходимые сведения из теории процессов Леви на произвольных пространствах следуя [17, 19].

Пусть (X,ν) – стандартное борелевское пространство с неатомической конечной неотрицательной мерой ν, и пусть $\nu(X)=\theta$ – полный заряд меры ν. Обозначим через

$$D = \left\{\sum z_i\delta_{x_i},\ x_i \in X,\ z_i \in \mathbb{R}, \sum |z_i| < \infty\right\}$$

вещественное линейное пространство всех конечных вещественных дискретных мер на X и через $D^+ = \{\sum z_i\delta_{x_i} \in D:\ z_i > 0\} \subset D$ – конус в D, состоящий из всех положительных мер.

Пусть Λ – мера на $\mathbb{R}_+$, удовлетворяющая следующим условиям:

$$\begin{aligned} &\Lambda(0,\infty)=\infty, &&\Lambda(1,\infty)<\infty,\\ &\int_0^1 s\,d\Lambda(s)<\infty, &&\Lambda(\{0\})=0. \end{aligned} \tag{2}$$

Обозначим через ψ_Λ преобразование Лапласа безгранично делимого распределения F_Λ с мерой Леви Λ:

$$\psi_\Lambda(t) = \exp\left(-\int_0^\infty (1-e^{-ts})\,d\Lambda(s)\right).$$

Каждая борелевская функция $a: X \to \mathbb{R}$ задает линейный функционал f_a на пространстве D по формуле $f_a(\eta) = \int_X a(x)\,d\eta(x)$ при $\eta \in D$.

Определение 2. Процессом Леви на пространстве (X,ν) с мерой Леви Λ, удовлетворяющей условиям (2), называется обобщенный процесс на пространстве D, распределение P_Λ которого задается преобразованием Лапласа

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(-\int\limits_X a(x)d\eta(x)\right)\right] = \exp\left(\int\limits_X \log\psi_\Lambda(a(x))d\nu(x)\right), \qquad (3)$$

где a – произвольная неотрицательная ограниченная борелевская функция на X.

Нетрудно показать, что распределение P_Λ процесса Леви сосредоточено на конусе D^+ положительных дискретных мер.

Рассмотрим конус

$$C = \{z = (z_1, z_2, \dots) : \; z_1 \geqslant z_2 \geqslant \dots \geqslant 0, \sum z_i < \infty\}$$

и зададим отображение $T : D^+ \to C \times X^\infty$ формулой

$$T\eta = \big((Q_1, Q_2, \dots), \, (X_1, X_2, \dots)\big), \qquad \text{если} \qquad \eta = \sum Q_i \delta_{X_i}.$$

Определение 3. Пусть P – вероятностная мера на пространстве D^+ и $\eta = \sum Q_i\delta_{X_i}$ – случайный процесс с распределением P. Случайная последовательность нагрузок $(Q_1, Q_2, \dots)$ называется *конической частью* процесса η, а ее распределение на конусе C – *конической частью* распределения P.

Нетрудно показать, что коническая часть процесса Леви с мерой Леви Λ представляет собой упорядоченную последовательность точек пуассоновского процесса на $\mathbb{R}_+$ со средней мерой $|\nu|\Lambda$. Таким образом, коническая часть зависит только от меры Леви Λ и от полного заряда параметрической меры ν. Следующая теорема показывает, что изучение процесса Леви по существу может быть сведено к изучению его конической части, поскольку параметрическая мера участвует в конструкции процесса тривиальным образом. Это фундаментальное свойство процессов Леви является частным случаем теоремы, впервые доказанной в [5]. Более простое доказательство приведено в [18].

Теорема 1 ([5, 18]). *Пусть $\eta = \sum Q_i\delta_{X_i}$ – процесс Леви на пространстве (X, ν) с мерой Леви Λ. Тогда $TP_\Lambda = \varkappa_{|\nu|\Lambda} \times \bar\nu^\infty$, т. е. $X_1, X_2, \dots$ есть последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с общим распределением $\bar\nu =$*

$\nu/|\nu|$, *и эта последовательность не зависит от конической части* $(Q_1, Q_2, \dots)$.

Обозначим через $D_1^+ \subset D^+$ симплекс всех вероятностных дискретных мер. Ясно, что $D^+ = D_1^+ \times [0, \infty)$, т. е. каждую меру $\eta \in D^+$ можно представить в виде

$$\eta = (\eta/\eta(X), \eta(X)),$$

где $\eta(X)$ – полный заряд меры η, а $\bar{\eta} = \eta/\eta(X)$ – нормированный процесс. Из определения процесса Леви следует, что полный заряд $\eta(X)$ имеет безгранично делимое распределение F_Λ, соответствующее мере Леви Λ. Как следует из леммы 1 ниже и замечания после нее, распределение процесса Леви является продакт-мерой в этом разложении тогда и только тогда, когда это гамма-процесс.

Рассмотрим отображение

$$T' : D^+ \to \mathbb{R}_+ \times \Sigma \times X^\infty,$$

где

$$\Sigma = \{y = (y_1, y_2, \dots) : \ y_1 \geqslant y_2 \geqslant \dots \geqslant 0, \ y_1 + y_2 + \dots = 1\}$$

– бесконечномерный симплекс и

$$T'\eta = \big(\eta(X), \ (Q_1/\eta(X), Q_2/\eta(X), \dots), \ (X_1, X_2, \dots)\big),$$

если $\eta = \sum Q_i \delta_{X_i}$.

Определение 4. Пусть P – вероятностная мера на пространстве D^+, и $\eta = \sum Q_i \delta_{X_i}$ – случайный процесс с распределением P. Случайная нормированная последовательность нагрузок $(Q_1/\eta(X), Q_2/\eta(X), \dots)$ называется *симплициальной частью* процесса η, а ее распределение на симплексе Σ – *симплициальной частью* меры P_Λ.

3. Гамма-процесс. В этом разделе мы приводим основные свойства гамма-процесса, необходимые для доказательства тождества Маркова–Крейна $(*)$.

Определение 5. Стандартным гамма-процессом на пространстве (X, ν) называется процесс Леви γ на (X, ν) с мерой Леви

$d\Lambda(z) = z^{-1}dz$, $z > 0$. Таким образом, распределение $\mathcal{G}$ гамма-процесса имеет преобразование Лапласа

$$\mathbb{E}_{\mathcal{G}}\left[\exp\left(-\int\limits_X a(x)d\gamma(x)\right)\right] = \exp\left(-\int\limits_X \log\left(1 + a(x)\right) d\nu(x)\right). \quad (4)$$

Нетрудно показать, что формула (4) имеет место для произвольной измеримой функции

$$a \in \mathcal{M} = \{a : X \to \mathbb{R}_+ : \int\limits_X \log(a(x) + 1)d\nu(x) < \infty\}.$$

Лемма 1, представляющая ключевое свойство гамма-процессов, немедленно следует из соответствующего свойства гамма-величин: если Y и Z – независимые гамма-величины с одинаковым масштабным параметром, то величины $Y + Z$ и $\frac{Y}{Y+Z}$ независимы.

Лемма 1. *Полный заряд $\gamma(X)$ гамма-процесса и нормированный гамма-процесс $\bar{\gamma} = \gamma/\gamma(X)$ независимы. Распределение полного заряда есть гамма-распределение с существенным параметром $\theta = |\nu|$,*

$$\frac{1}{\Gamma(\theta)} t^{\theta-1}e^{-t}dt, \quad t > 0.$$

Заметим, что, как следует из замечательного результата Лукача [11] для гамма-величин, это свойство гамма-процессов является характеристическим, т. е. если η – процесс Леви такой, что $\bar{\eta}$ и $\eta(X)$ независимы, то η – гамма-процесс (возможно, с некоторым масштабным параметром).

Лемма 2 ([9]). *Симплициальная часть распределения $\mathcal{G}$ гамма-процесса с $|\nu| = \theta$ есть мера Пуассона–Дирихле $PD(\theta)$.*

Нетрудно видеть из (3), что для любого измеримого подмножества $A \subset X$ случайная величина $\gamma(A)$ имеет гамма-распределение с параметром $\nu(A)$, и для любого измеримого разбиения $A_0, \ldots, A_n$ пространства X величины $\gamma(A_0), \ldots, \gamma(A_n)$ независимы. Отсюда следует, что вектор $(\gamma(A_0)/\gamma(X), ..., \gamma(A_n)/\gamma(X))$ имеет распределение Дирихле на симплексе с параметрами

$(\nu(A_0), \dots, \nu(A_n))$. Таким образом, *процесс Дирихле на пространстве X с параметрической мерой ν есть нормированный гамма-процесс на (X, ν)*. Эту связь можно установить также в терминах явной конструкции (1). Действительно, в силу теоремы 1 и лемм 1 и 2 правая часть формулы (1) представляет собой нормированный гамма-процесс на пространстве (X, ν).

4. Тождество Маркова–Крейна для средних от процесса Дирихле. В этом разделе мы доказываем тождество Маркова–Крейна для средних от процесса Дирихле, которое можно интерпретировать как соотношение, связывающее распределение линейного функционала относительно гамма-процесса и распределение того же функционала относительно нормированного гамма-процесса. Эта интерпретация позволяет доказать его, используя только свойство независимости гамма-процессов.

Пусть $a \in \mathcal{M}$. Обозначим через μ_a распределение линейного функционала $\eta \mapsto f_a(\eta) = \int_X a(x) d\eta(x)$ относительно распределения $\mathcal{D}$ процесса Дирихле (т.е. нормированного гамма-процесса) на пространстве (X, ν), и пусть ν_a – распределение функции a относительно нормированной параметрической меры $\bar{\nu}$.

Теорема 2. *Меры μ_a и ν_a связаны интегральным тождеством*

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+zu)^\theta} d\mu_a(u) = \exp\left(-\int\limits_X \log(1+zu)^\theta d\nu_a(u)\right), \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}. \tag{5}$$

Заметим, что левая часть формулы (5) есть обобщенное преобразование Коши–Стилтьеса распределения μ_a. В силу формулы (4) правая часть (5) равна значению преобразования Лапласа гамма-процесса на функции a. Следовательно, формулу (5) можно рассматривать как соотношение между интегральным преобразованием (Коши–Стилтьеса) распределения μ_a функционала f_a относительно нормированного гамма-процесса и интегрального преобразования (Лапласа) распределения того же функционала относительно ненормированного гамма-процесса.

Доказательство. Согласно формуле для преобразования Лапласа (4) правая часть тождества (5) равна

$$\exp\left(-\int\limits_X \log(1+za(x))d\nu(x)\right) = \mathbb{E}_{\mathcal{G}}\left[\exp\left(-z\int\limits_X a(x)d\gamma(x)\right)\right] =$$

$$=\mathbb{E}_{\mathcal{G}}\left[\exp\left(-z\gamma(X)\int\limits_X a(x)d\bar{\gamma}(x)\right)\right].$$

Поскольку нормированный гамма-процесс и полный заряд независимы, условное распределение случайной величины $\gamma(X)$ при условии $\bar{\gamma}(\cdot)$ одинаково для всех $\bar{\gamma}(\cdot)$ и является гамма-распределением (см. лемму 1). Таким образом, искомое выражение можно записать в виде

$$\mathbb{E}_{\mathcal{D}}\left[\frac{1}{\Gamma(\theta)}\int\limits_0^\infty t^{\theta-1}\exp\left(-t-zt\int\limits_X a(x)d\bar{\gamma}(x)\right)dt\right].$$

Вычисляя внутренний интеграл по t, получаем, что последнее выражение равно

$$\mathbb{E}_{\mathcal{D}}\left[\frac{1}{(1+z\int_X a(x)d\bar{\gamma}(x))^\theta}\right],$$

что и требовалось доказать.

Многомерная версия тождества Маркова–Крейна для совместного распределения нескольких линейных функционалов от процесса Дирихле была впервые получена в работе [8]. Наше доказательство теоремы 2 практически без изменений переносится на многомерный случай и немедленно дает искомый результат.

Теорема 3. *Пусть $a_1,\ldots,a_n \in \mathcal{M}$. Обозначим через μ_a совместное распределение линейных функционалов $(f_{a_1},\ldots,f_{a_n})$ относительно распределения $\mathcal{D}$ процесса Дирихле. Пусть ν_a – совместное распределение функций $a_1,\ldots,a_n$ относительно нормированной параметрической меры $\bar{\nu}$. Тогда меры μ_a и ν_a связаны соотношением*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{(1+z_1u_1+\ldots+z_nu_n)^\theta}d\mu_a(u) =$$

$$= \exp\left(-\int\limits_{\mathbb{R}^n}\log(1+z_1u_1+\ldots+z_nu_n)^\theta d\nu_a(u)\right). \quad (6)$$

Доказательство. Повторяет доказательство теоремы 2 с функцией $za(x)$, замененной на $z_1a_1(x) + \ldots + z_na_n(x)$.

Замечание. На самом деле, теорема 3 является частным случаем более общего утверждения. А именно, пусть V – произвольное вещественное топологическое линейное пространство, и $\mathcal{L}$ – пространство вещественных линейных функционалов на V. Для данной функции $a : X \to V$ можно определить V-значный функционал $f_a(\eta) = \int a(x)d\eta(x)$ на пространстве D и изучать распределение μ_a этого функционала относительно нормированного гамма-процесса. Пусть ν_a – распределение функции a (на пространстве V) относительно меры $\bar{\nu}$. Тогда для произвольного линейного функционала $F \in i\mathcal{L}$ имеет место следующая формула:

$$\int\limits_V \frac{d\mu_a(v)}{(1-F(v))^\theta} = \exp \int\limits_V \log \frac{1}{(1-F(v))^\theta} d\nu_a(v).$$

Доказательство этой формулы также воспроизводит доказательство теоремы 2. Теорема 3 соответствует конечномерному случаю: $V = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{L} = (\mathbb{R}^n)^*$ и функционал F задается формулой $F(x_1, \ldots, x_n) = z_1x_1 + \ldots + z_nx_n$. Тождество Маркова–Крейна в произвольных векторных пространствах было впервые рассмотрено в [8], разд. 9.

5. Двупараметрическое обобщение тождества Маркова–Крейна. С. В. Керов [7] и Дж. Питман [14] независимо в разных терминах предложили один и тот же класс обобщений процессов Дирихле. Пусть σ – произвольное борелевское распределение на бесконечномерном симплексе Σ. Обобщенный процесс Дирихле на пространстве (X, ν), соответствующий распределению σ, задается формулой (1), где последовательность Q распределена по мере σ (вместо $PD(\theta)$). Важный частный случай обобщенных процессов Дирихле получается, когда мера σ представляет собой так называемое двупараметрическое распределение Пуассона–Дирихле $PD(\alpha, \theta)$ [15]. Область допустимых параметров есть объединение множеств $\{(\alpha, \theta) : \alpha \in (0, 1), \theta > -\alpha\}$ и $\{(\alpha, -m\alpha) : \alpha < 0, m \in \mathbb{N}\}$. При $\alpha = 0$ мера $PD(0, \theta)$ совпадает с обычным распределением Пуассона–Дирихле $PD(\theta)$. Обозначим через $\mathcal{D}(\alpha, \theta)$ распределение обобщенного процесса Дирихле, соответствующего двупараметрическому распределению Пуассона–Дирихле $PD(\alpha, \theta)$.

Аналог тождества Маркова–Крейна для распределения линейного функционала относительно $\mathcal{D}(\alpha,\theta)$ получен в [16]. Мы представляем новое доказательство этого тождества, основанное на связи двупараметрических распределений Пуассона–Дирихле с устойчивыми процессами.

Определение 6. Пусть $\alpha \in (0,1)$. Стандартным α-устойчивым процессом на пространстве (X,ν) называется процесс Леви с мерой Леви

$$d\Lambda_\alpha = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} s^{-\alpha-1} ds, \quad s>0.$$

Таким образом, распределение P_α α-устойчивого процесса имеет преобразование Лапласа

$$\mathbb{E}_{P_\alpha}\left[\exp\left(-\int\limits_X a(x)d\eta(x)\right)\right] = \exp\left(-\int\limits_X a(x)^\alpha d\nu(x)\right), \qquad (7)$$

где $a: X \to \mathbb{R}_+$ – произвольная измеримая неотрицательная функция такая, что $\int_X a(x)^\alpha d\nu(x) < \infty$.

Лемма 3 ([15]). *Симплициальная часть распределения P_α α-устойчивого процесса есть обобщенное распределение Пуассона–Дирихле $PD(\alpha,0)$.*

Распределение Пуассона–Дирихле $PD(\alpha,\theta)$ при $\alpha,\theta \neq 0$ нельзя представить как симплициальную часть процесса Леви. Однако его можно получить как симплициальную часть процесса, имеющего плотность относительно устойчивого процесса. А именно, пусть $\theta > -\alpha$ и рассмотрим распределение $P_{\alpha,\theta}$ на пространстве D, которое имеет плотность

$$\frac{dP_{\alpha,\theta}}{dP_\alpha}(\eta) = \frac{c_{\alpha,\theta}}{\eta(X)^\theta} \qquad (8)$$

относительно α-устойчивого распределения P_α. Здесь $c_{\alpha,\theta} = \frac{\Gamma(\theta+1)}{\Gamma(\theta/\alpha+1)}$ – нормировочная константа.

Лемма 4 ([15]). *Симплициальная часть меры $P_{\alpha,\theta}$ есть распределение Пуассона–Дирихле $PD(\alpha,\theta)$.*

Из лемм 3 и 4 следует, что обобщенный процесс Дирихле с параметрами $(\alpha,0)$ является нормированным α-устойчивым процессом, а обобщенный процесс Дирихле с параметрами (α,θ) является нормализацией процесса, подчиненного закону $P_{\alpha,\theta}$.

Пусть $a : X \to \mathbb{R}_+$ – произвольная измеримая неотрицательная функция такая, что $\int_X a(x)^\alpha d\nu(x) < \infty$, и пусть μ_a – распределение функционала f_a относительно $\mathcal{D}(\alpha,\theta)$, а ν_a – распределение функции a относительно нормированной параметрической меры $\bar{\nu}$.

Теорема 4. *Меры μ_a и ν_a связаны следующим интегральным тождеством:*
1) *если* $\theta \neq 0$,

$$\left(\int_{\mathbb{R}} (1+zu)^{-\theta} d\mu_a(u)\right)^{-\frac{1}{\theta}} = \left(\int_{\mathbb{R}} (1+zu)^{\alpha} d\nu_a(u)\right)^{\frac{1}{\alpha}}; \qquad (9)$$

2) *если* $\theta = 0$,

$$\exp\left(\int_{\mathbb{R}} \log(1+zu)^{\alpha} d\mu_a(u)\right) = \int_{\mathbb{R}} (1+zu)^{\alpha} d\nu_a(u). \qquad (10)$$

Доказательство. 1) Обозначим левую часть искомого тождества через $A^{-1/\theta}$, а правую часть – через $B^{1/\alpha}$. Используя тождество

$$\frac{1}{r^\theta} = \frac{1}{\Gamma(\theta)} \int_0^\infty t^{\theta-1} e^{-rt} dt,$$

получим

$$\begin{aligned} A =& c_{\alpha,\theta} \mathbb{E}^\alpha \left[\left(\eta(X) + z \int_X a(x) d\eta(x) \right)^{-\theta} \right] = \\ =& \frac{c_{\alpha,\theta}}{\Gamma(\theta)} \mathbb{E}^\alpha \left[\int_0^\infty t^{\theta-1} \exp\left(-t \left(\eta(X) + z \int_X a(x) d\eta(x) \right) \right) dt \right] = \\ =& \frac{c_{\alpha,\theta}}{\Gamma(\theta)} \int_0^\infty t^{\theta-1} \mathbb{E}^\alpha \left[\exp\left(-\int_X t(1+za(x)) d\eta(x) \right) \right] dt. \end{aligned}$$

По формуле (7) для преобразования Лапласа, математическое ожидание есть в точности $e^{-t^\alpha B}$, таким образом,

$$A = \frac{c_{\alpha,\theta}}{\Gamma(\theta)} \int_0^\infty t^{\theta-1} e^{-t^\alpha B}\, dt,$$

и формула (9) получается заменой переменных.

2) Следует из (9) при $\theta \to 0$.

Литература

1. A.Borodin, G.Olshanski, *Distributions on partitions, point processes and the hypergeometric kernel.* — Comm. Math. Phys. **211** no. 2 (2000), 335–358.
2. D. M. Cifarelli, E. Regazzini, *Some remarks on the distribution functions of means of a Dirichlet process.* — Ann. Statist. **18** (1990), 429–442.
3. P. Diaconis, J. Kemperman, *Some New Tools for Dirichlet Priors.* Bayesian Statistics 5 (J. M. Bernardino, J. O. Berger, A. P. Dawid and A. F. M. Smith eds.). Oxford University Press, 1996, pp. 97–106.
4. T. S. Ferguson, *A Bayesian analysis of some nonparametric problems.* — Ann. Statist. **1** (1973), 209–230.
5. T. S. Ferguson, M. J. Klass, *A representation of independent increment processes without Gaussian components.* — Ann. Math. Statist. **43** (1972), 1634–1643.
6. С. В. Керов, *Переходные вероятности континуальных диаграмм Юнга и проблема моментов Маркова.* — Функц. анал. и его прил. **27** (1993), 32–49.
7. S. V. Kerov, *Interlacing Measures.* — Amer. Math. Soc. Transl. (2) **181** (1998), 35–83.
8. S. V. Kerov, N. V. Tsilevich, *The Markov–Krein correspondence in several dimensions.* — PDMI Preprint **1** (1998), see also this volume.
9. J. F. C. Kingman, *Random discrete distributions.* — J. Roy. Statist. Soc. B **37** (1975), 1–22.
10. М. Г. Крейн, А. А. Нудельман, *Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи.* Москва, Наука, 1973.
11. E. Lukacs, *A characterization of the gamma distribution.* — Annals of Math. Stat. **26** (1965), 319–324.
12. И. Макдональд, *Симметрические функции и многочлены Холла.* Москва, Мир, 1985.
13. A. A. Markov, *Nouvelles applications des fractions continues.* — Math. Ann. **47** (1896), 579–597.
14. J. Pitman, *Some developments of the Blackwell–MacQueen urn scheme.* Statistics, Probability and Game theory (T. S. Ferguson, L. S. Shapley, J. B. MacQueen eds.), IMS Lecture Notes – Monograph series. vol. 30, 1996, pp. 245–267.
15. J. Pitman, M. Yor, *The two-parameter Poisson–Dirichlet distribution derived from a stable subordinator.* — Ann. Prob. **25** (1997), 855–900.
16. Н. В. Цилевич, *Распределения среднего для некоторых случайных мер.* — Записки научн. семин. ПОМИ **240** (1997), 268–279.

17. N. V. Tsilevich, A. M. Vershik, *Quasi-invariance of the gamma process and multiplicative properties of the Poisson–Dirichlet measures.* — C. R. Acad. Sci. Paris, Série I **329** no. 2 (1999), 163–168.
18. N. V. Tsilevich, A. M. Vershik, M.Yor, *Distinguished properties of the gamma process and related topics.* — Prépublications du Laboratoire de Probabilités et Modèles aléatoires no. 575 (2000).
19. N. V. Tsilevich, A. M. Vershik, M.Yor, *An infinite-dimensional analogue of the Lebesgue measure and distinguished properties of the gamma process.* — J. Funct. Anal **185** no. 1 (2001), 274–296.

Verskik A. M., Yor M., Tsilevich N. V. Remarks on the Markov–Krein identity and quasi-invariance of the gamma process.

We present a simple proof of the Markov–Krein identity for distributions of means of linear functionals of the Dirichlet process and its various generalizations. The key idea is to use the representation of the Dirichlet process as the normalized gamma process and fundamental properties of gamma processes.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
e-mail: vershik@pdmi.ras.ru
Laboratoire de Probabilités
et Modèles Aléatoires, Tour 56,
4 Place Jussieu,
75252 Paris Cedex 05, France
С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
e-mail: natalia@pdmi.ras.ru

Поступило 15 ноября 2001г.