В.А.Гриценко

ПОСТРОЕНИЕ ЭРМИТОВЫХ МОДУЛЯРНЫХ ФОРМ РОДА 2 ПО ПАРАБОЛИЧЕСКИМ ФОРМАМ РОДА I

В работе описан интегральный подъем параболических модулярных форм относительно конгруэнц-подгруппы $\Gamma_0(Q) \subset SL_2(\mathbb{Z})$ до модулярных форм Эрмита рода 2, то есть до форм, отвечающих арифметической подгруппе неопределенной унитарной группы $SU(2,2)$ над мнимым квадратичным расширением $\mathbb{Q}(\sqrt{-\mathcal{L}})$ поля $\mathbb{Q}$. Ядром интегрального оператора является тета-ряд целочисленной квадратичной формы сигнатуры (2,4), группа $SU(2,2)$ отображается соответствующим образом в мажорантное пространство этой формы, следовательно, рассматриваемый подъем связан с подъемом Оды (см. [I4] и статью Раллиса и Шифмана [I5]). Тета-ряды неопределенных квадратичных форм, заданные на верхней полуплоскости Зигеля произвольного рода, рассматриваются в § I. Эти ряды обобщают ряды со сферическими функциями и характерами в случае рода I и их исследование представляет и самостоятельный интерес. Во втором параграфе мы вычисляем коэффициенты Фурье эрмитовых модулярных форм, полученных в результате подъема. Соответствующие формулы показывают, что образ пространства форм рода I определяет пространство, аналогичное пространству Маасса в случае зигелевых модулярных форм рода 2 (см. [I0], [II], [7], [I2]). Подобное пространство для полной модулярной группы Эрмита над полем $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ было определено из других соображений Кожимой в [8].

Опишем основные обозначения. $M_{m,n}(\mathbb{A})$ – кольцо $m\times n$-матриц над кольцом $\mathbb{A}$, $M_{n,n}(\mathbb{A})$ будем сокращать через $M_n(\mathbb{A})$, $M_{n,1}(\mathbb{A})$ – через $\mathbb{A}^n$.

$$M[N] = {}^tNMN, \quad M\{N\} = {}^t\overline{N}MN$$

для матриц M и N соответствующих размеров, ${}^tN$ – транспонированная матрица, а черта обозначает комплексное сопряжение. Симплектическая и унитарная группы будут рассматриваться в следующей матричной реализации:

$$Sp_n(\mathbb{R}) = \{M \in M_{2n}(\mathbb{R});\ J_n[M] = J_n\}, \text{ где } J_n = \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix},$$

$$SU_{\mathbb{C}}(n,n) = \{M \in M_{2n}(\mathbb{C});\ J_n\{M\} = J_n,\ \det M = 1\}.$$

Группы Sp_n и $SU(n,n)$ действуют как группы аналитических автоморфизмов на верхней полуплоскости Зигеля H_n и верхней полуплоскости Эрмита $\mathcal{H}_n$

$$H_n=\{Z\in M_n(\mathbb{C})\,{}^tZ=Z,\ \mathrm{Im}\,Z>0\},\ \mathcal{H}_n=\{Z\in M_n(\mathbb{C})\,i({}^t\bar{Z}-Z)>0\}$$

по формуле

$$M\langle Z\rangle=(AZ+B)(CZ+\mathcal{D})^{-1}\quad,\text{ где } M=\begin{pmatrix}A&B\\C&\mathcal{D}\end{pmatrix}.$$

Элемент $Z\in H_n$ $(Z\in\mathcal{H}_n)$ раскладывается на компоненты

$$\begin{aligned}&Z=X+iY\ \ X,Y\in M_n(\mathbb{R}),\ Y>0\quad (Z\in H_n)\\&Z=X+iY\ \ {}^t\bar{X}=X,\ {}^t\bar{Y}=Y,\ \ Y>0\quad (Z\in\mathcal{H}_n),\end{aligned}\tag{0.I}$$

где в первом случае Y - положительно определенная симметрическая матрица, а во втором Y - положительно определенная эрмитова матрица.

Введем еще зигелеву модулярную группу и ее конгруэнц-подгруппу ступени q ($q\geqslant 1$, натуральное):

$$\Gamma_n=Sp_n(\mathbb{Z}),\ \Gamma_0^{(n)}(q)=\left\{M=\begin{pmatrix}A&B\\C&\mathcal{D}\end{pmatrix}\in\Gamma_n,\ C\equiv 0(\mathrm{mod}\ q)\right\}.\tag{0.2}$$

Положим также

$$e(N)=\exp(\pi i\ \mathrm{tr}\ N),$$

где tr - след матрицы $N\in M_n(\mathbb{C})$.

§ I. Тета-ряды

В этом параграфе будут построены тета-ряды квадратичных форм, определенные на верхней полуплоскости Зигеля рода n и удовлетворяющие "хорошим" функциональным уравнениям относительно действия элементов из конгруэнц-подгруппы $\Gamma_0^{(n)}(q)$. Случай рода I разобран у Шинтани в [I9] (см. также работы [I4] и [5]). Мы следуем методу Андрианова-Малолеткина (см. [I]).

Пусть F - невырожденная симметричная целочисленная матрица порядка m с четной главной диагональю (целочисленная четная матрица), $\mathcal{H}(F)$ - ее мажорантное пространство

$$\mathcal{H}(F)=\{H\in M_m(\mathbb{R})\ {}^tH=H>0,\ F^{-1}[H]=F\}. \qquad (I.I)$$

Отметим, что $\mathcal{H}(F)=\{F\}$, если $F>0$. Через (k,l) обозначим сигнатуру матрицы F, а через q ее ступень, то есть наименьшее натуральное число такое, что qF^{-1} имеет целые коэффициенты и четные целые числа на главной диагонали. Зафиксируем матрицу H из мажорантного пространства. Функция $\Phi(X)$, заданная на множестве матриц размера $m\times n$, называется сферической функцией рода n и веса (μ,λ) (μ,λ – целые неотрицательные числа) для пары (F,H), если она является конечной линейной комбинацией с комплексными коэффициентами полиномов вида

$$P(X)=\det{}^{\mu}({}^tXF\ell_+)\det{}^{\lambda}({}^tXF\ell_-), \qquad (I.2)$$

где матрицы ℓ_+,ℓ_- принадлежат $M_{m,n}(\mathbb{C})$ и удовлетворяют соотношениям $H[\ell_+]=H[\ell_-]=(H-F)\ell_+=(H+F)\ell_-=0$.

Тета-рядом рода n пары (F,H) со сферической функцией Φ и параметрами $X,Y\in M_{m,n}(\mathbb{C})$ называется функция

$$\theta^{(n)}_{F,H,\Phi}(Z,X,Y)=\sum_{N\in M_{m,n}(\mathbb{Z})}\Phi(N-Y)e(\operatorname{Re}ZF[N-Y]+i\operatorname{Im}ZH[N-Y]+2{}^tNX-{}^tXY),$$

где $Z\in H_n$. Следующий результат является дополнением к теореме 2 работы [I].

ЛЕММА I. Для любой матрицы $M=\begin{pmatrix}A&B\\C&\mathcal{D}\end{pmatrix}\in\Gamma_0^{(n)}(q)$ справедливо функциональное уравнение

$$\det{}^{-\frac{k}{2}-\mu}(CZ+\mathcal{D})\det{}^{-\frac{l}{2}-\lambda}(C\bar{Z}+\mathcal{D})\,\theta^{(n)}_{F,H,\Phi}(M\langle Z\rangle,FY{}^tB,Y{}^t\mathcal{D})=\chi^{(n)}_F(M)\theta^{(n)}_{F,H,\Phi}(Z,0,Y),$$

где корни $\det^{\frac{1}{2}}(CZ+\mathcal{D})$, $\det^{\frac{1}{2}}(C\bar{Z}+\mathcal{D})$ выбираются комплексно сопряженными, $\chi^{(n)}_F(M)$ является корнем восьмой степени из единицы для формы F нечетного порядка и характером группы $\Gamma_0^{(n)}(q)$ задаваемым равенством

$$\chi^{(n)}_F(M)=\left(\frac{(-1)^{m/2}\det F}{\det\mathcal{D}}\right),$$

где $\left(-\right)$ – символ Кронекера (определение символа Кронекера см., например, в [6] гл.I4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если Φ тождественно равна I, то это частный случай теоремы I работы [I], если $Y=0$, то соответствующий результат получен в теореме 2 той же работы применением дифференциального оператора $L_+^{\mu} L_-^{\lambda}$ (см. § 4 [I]) к тета-ряду без сферической функции. Если после применения этого оператора к равенству (4.4) из [I] положить $\xi = S^{-1} Y$ и выполнить необходимые преобразования, то получится утверждение леммы. Мы не можем здесь воспроизвести весь ход доказательства теоремы 2 из [I], поэтому ограничимся сказанным.

Следующая лемма доказывается аналогично.

ЛЕММА 2 (Формула обращения). Пусть F - вещественная симметрическая матрица порядка m сигнатуры (k,ℓ), $H \in \mathcal{H}(F)$, Φ - сферическая функция веса (μ,λ) для пары (F,H), $q \in \mathbb{R}^+$. Тогда

$$\theta^{(n)}_{F,H,\Phi}\left(-\frac{1}{Zq}, 0, Y\right) = |\det F^*|^{\frac{n}{2}} i^{\frac{n(\ell-k)}{2}} (\det Z)^{\frac{k}{2}+\mu} (\det \bar{Z})^{\frac{\ell}{2}+\lambda} \theta_{F^*,H^*,\Phi^*}(Z,Y,0),$$

где $F^* = qF^{-1}$, $H^* = qH^{-1}$, $\Phi^*(X) = \Phi(F^* X)$.

Обозначим $M_{m,n}(\mathbb{Z})$ через $\mathbb{L}$ и определим функции ψ на решетке $\mathbb{L}$ такие, чтобы тета-ряды, построенные при помощи ψ, являлись "модулярными формами" относительно $\Gamma_0^{(n)}(q)$. Заметим, что на решетке $\mathbb{L}$ действует группа $\Gamma_0^{(n)}(q)$:

$$X \cdot \gamma = X\mathcal{D}, \quad \text{где } \gamma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & \mathcal{D} \end{pmatrix} \in \Gamma_0^{(n)}(q),\ X \in \mathbb{L}.$$

Это действие лишь переставляет смежные классы группы $\mathbb{L}/F\mathbb{L}$

Если χ некоторый характер Дирихле по модулю q (q - ступень F), то комплекснозначную функцию ψ, заданную на $\mathbb{L}$ и инвариантную на смежных классах относительно подгруппы $F\mathbb{L}$, назовем (χ, F) -мультипликативной, если выполняются следующие два условия:

$\psi(N) = 0$, если $F^{-1}[N]$ не является целочисленной четной матрицей,

(I.3)

$$\psi(N\gamma) = \chi(\det \mathcal{D})\,\psi(N) \quad \text{для любого } \gamma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & \mathcal{D} \end{pmatrix} \in \Gamma_0^{(n)}(q). \tag{I.4}$$

Положим

$$\theta_{F,H}^{(n)}(Z,\Phi,\Psi) = \sum_{Y\in \mathbb{L}/F\mathbb{L}} \Psi(Y)\,\theta_{F,H,\Phi}^{(n)}(Z,0,-F^{-1}Y),(Z\in H_n), \quad (I.5)$$

где суммирование ведется по произвольной полной системе представителей из смежных классов по подрешетке $F\mathbb{L}$ ($\mathbb{L}=M_{m,n}(\mathbb{Z})$).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. Пусть F – невырожденная симметрическая целочисленная матрица с четной главной диагональю порядка m, ступени q и сигнатуры (k,ℓ), $H\in \mathcal{H}(F)$, Φ – сферическая функция веса (μ,λ), χ – характер Дирихле по модулю q, Ψ — (χ, F) – мультипликативная функция. Тогда

$$\det^{-\frac{k}{2}-\mu}(CZ+\mathcal{D})\det^{-\frac{\ell}{2}-\lambda}(C\bar{Z}+\mathcal{D})\theta_{F,H}^{(n)}(\gamma\langle Z\rangle,\Phi,\Psi)=\chi(\det\mathcal{D})\chi_F^{(n)}(M)\theta_{F,H}^{(n)}(Z,\Phi,\Psi)$$

для любого $\gamma=\begin{pmatrix}A&B\\C&\mathcal{D}\end{pmatrix}\in\Gamma_0^{(n)}(q)$. $\chi_F^{(n)}(M)$ и квадратные корни в левой части равенства определены в лемме I.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим множитель, стоящий перед $\theta_{F,H}$ в левой части равенства, через $\varphi(\gamma, Z)$, тогда из утверждения леммы I следует, что

$$\varphi(\gamma,Z)\,\theta(\gamma\langle Z\rangle,-Y^tB,-F^{-1}Y^t\mathcal{D})=\chi_F^{(n)}(\gamma)\,\theta_{F,H,\Phi}^{(n)}(Z,0,-F^{-1}Y).$$

Домножим обе части этого равенства на $\Psi(Y)$ и просуммируем по системе представителей из $\mathbb{L}/F\mathbb{L}$, получим

$$\varphi(\gamma,Z)\sum_{Y\in\mathbb{L}/F\mathbb{L}}\Psi(Y)\,\theta(\gamma\langle Z\rangle,-Y^tB,-F^{-1}Y^t\mathcal{D})=\chi_F^{(n)}(\gamma)\,\theta_{F,H}^{(n)}(Z,\Phi,\Psi).$$

По определению, если $\Psi(Y)\neq 0$, то $F^{-1}[Y]$ – целочисленная четная матрица, поэтому $tr\,(B^tYF^{-1}Y^t\mathcal{D})$ и $tr\,(2^tNY^tB)$ четные целые числа, следовательно, сумма по Y в левой части последнего равенства равна

$$\varphi(\gamma,Z)\sum_{Y\in\mathbb{L}/F\mathbb{L}}\Psi(Y)\,\theta_{F,H,\Phi}^{(n)}(\gamma\langle Z\rangle,0,-F^{-1}Y^t\mathcal{D}).$$

Умножение на $\mathcal{D}$ лишь переставляет смежные классы, поэтому для завершения доказательства достаточно домножить обе части на $\chi(\det\mathcal{D})$ и воспользоваться вторым свойством функции Ψ.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть F,H,Φ такие же как в предложении I, S – произвольная невырожденная целая матрица порядка m, q_1-

ступень матрицы $F[S]$, χ - характер Дирихле по модулю q_1, $\varphi: M_{m,n}(\mathbb{Z}) \to \mathbb{C}$ - произвольная S - периодическая ($\varphi(N+SM)=\varphi(N)$) функция, удовлетворяющая свойству (I.4) при $q=q_1$. Тогда тета-ряд

$$\vartheta^{(n)}_{F,H}(Z,\Phi,\varphi) = \sum_{N\in M_{m,n}(\mathbb{Z})} \varphi(N)\Phi(N)e(\mathrm{Re}\, ZF[N] + i\,\mathrm{Im}\, ZH[N]) \tag{I.6}$$

удовлетворяет функциональному уравнению

$$\vartheta^{(n)}_{F,H}(\gamma\langle Z\rangle,\Phi,\varphi)\det^{-\frac{k}{2}-\mu}(CZ+D)\det(C\bar{Z}+D)^{-\frac{\ell}{2}-\lambda} = \chi(\det D)\chi^{(n)}_{F[S]}(\gamma)\vartheta_{F,H}(Z,\Phi,\varphi) \tag{I.7}$$

для любого $\gamma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D\end{pmatrix} \in \Gamma_0^{(n)}(q)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим $(\chi, F[S])$ -мультипликативную функцию

$$\psi(Y) = \begin{cases} \varphi(F^{-1}\,{}^tS^{-1}Y), & \text{если } F^{-1}\,{}^tS^{-1}Y \in M_{m,n}(\mathbb{Z}), \\ 0, & \text{в противном случае,}\end{cases}$$

тогда

$$\vartheta^{(n)}_{F,H}(Z,\Phi,\varphi) = \theta^{(n)}_{F[S],H[S]}(Z,\Phi',\psi),$$

где функция Φ' определяется сферическими параметрами $b'_+ = S^{-1}b_+$ и $b'_- = S^{-1}b_-$, если b_+ и b_- - соответствующие параметры функции Φ (см. (I.2)).

Приведем еще один пример тета-рядов такого типа. Подобные ряды нам потребуются в следующем параграфе.

Пусть F - невырожденная симметрическая целочисленная матрица ступени q с четной главной диагональю, возьмем H и Φ такие же как в предложении I и предположим, что $m \geqslant n$. Пусть $S = \begin{pmatrix} QE_n & 0 \\ 0 & P\end{pmatrix} \in M_m(\mathbb{Z})$ и χ - характер Дирихле по модулю Q. Разобьем матрицу $X \in M_{m,n}(\mathbb{Z})$ на блоки

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}\begin{matrix} n \\ m-n\end{matrix}$$

размеров $n\times n$ и $(m-n)\times n$, тогда функция $\varphi(X) = \chi(\det X_1)$ удовлетворяет условию следствия, поэтому тета-ряд

$$\vartheta_{F,H}(Z,\Phi,\chi) = \sum_{N=\binom{N_1}{N_2}\in M_{m,n}(\mathbb{Z})} \chi(\det N_1)\Phi(N)e(\mathrm{Re}\, ZF[N] + i\,\mathrm{Im}\, ZH[N])$$

удовлетворяет функциональному уравнению (I.6).

§ 2. Оператор подъема

В этом параграфе мы построим интегральный оператор, переводящий параболические модулярные формы относительно арифметической подгруппы $SL_2(\mathbb{Z})$ в эрмитовы модулярные формы рода 2. Напомним основные определения, касающиеся эрмитовых форм (см. работы Браун [3], [4] и Шимуры [18]).

Группа $SU(n,n)$ действует на верхней полуплоскости Эрмита рода n (см. введение). Обозначим через K_n подгруппу, сохраняющую элемент iE_n, тогда

$$K_n = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \in SU(n,n) \right\}, \tag{2.1}$$

что легко следует, например, из соотношения

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & \mathcal{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^t\overline{Z} & Z \\ E & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t\overline{M\langle Z\rangle} & M\langle Z\rangle \\ E & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C\,{}^t\overline{Z} + \mathcal{D} & 0 \\ 0 & CZ + \mathcal{D} \end{pmatrix}.$$

Из этого же равенства получаем, что

$$Y(M\langle Z\rangle) = Y\{(CZ+\mathcal{D})^{-1}\}$$

для любой матрицы $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & \mathcal{D} \end{pmatrix} \in SU(n,n)$, где Y - положительно определенная компонента Z (см. (0.I)).

Пусть d - целое положительное число, свободное от квадратов, $\mathcal{O}_d$ - кольцо целых чисел мнимого квадратичного поля $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$, $-\Delta$ - дискриминант поля. Группу

$$\Gamma_n(q, \mathcal{O}_2) = \left\{ M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & \mathcal{D} \end{pmatrix} \in SU(n,n) \cap M_{2n}(\mathcal{O}_d), C \equiv 0 \pmod{q} \right\} \tag{2.2}$$

назовем эрмитовой модулярной группой рода n и ступени q.

Зафиксируем характер Дирихле χ по модулю q.

Аналитическая функция F, заданная на верхней полуплоскости Эрмита $\mathcal{H}_n$, называется эрмитовой модулярной формой веса k и характера χ, если для любой матрицы $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & \mathcal{D} \end{pmatrix} \in \Gamma_n(q, \mathcal{O}_d)$ функция F удовлетворяет функциональному уравнению

$$\det(CZ+\mathcal{D})^{-k} F(M\langle Z\rangle) = \chi(\det \mathcal{D}) F(Z).$$

Отметим, что в силу соотношения $\det(\bar{C}^t Z+\bar{\mathcal{D}}) = \det(CZ+\mathcal{D})$ (см. (I.19) [18]) $\det \mathcal{D}$ является целым рациональным числом.

Эрмитову модулярную форму можно разложить в ряд Фурье (см. [4])

$$F(Z) = \sum_{N \geq 0} a(N)\exp(2\pi i \, tr(NZ)), \qquad (2.3)$$

где суммирование ведется по всем полуцелым неотрицательным эрмитовым матрицам. (Матрица $(n_{ij}) \in M_n(\mathbb{Q}(\sqrt{-d}))$ называется полуцелой, если $n_{ii}, \sqrt{-\Delta}\, n_{ij} \in \mathcal{O}_d$). Суммирование ведется только по неотрицательным эрмитовым матрицам (${}^t\bar{X} N X \geq 0$ для любого вектора X), так как для группы $SU(2,2)$ выполняется эффект Кехера.

Определение параболических форм для группы SU аналогично определению параболических форм для симплектической группы. Если

$$(\Phi F)(Z_1) = \lim_{\lambda \to \infty} F\begin{pmatrix} Z_1 & 0 \\ 0 & i\lambda \end{pmatrix} \quad (Z_1 \in \mathcal{H}_{n-1})$$

оператор Зигеля, то эрмитова форма F называется параболической, если

$$\Phi(\det(CZ+\mathcal{D})^{-k} F(M\langle Z\rangle)) = 0$$

для любого элемента $M \in \Gamma_n(1, \mathcal{O}_d)$. Для параболической формы F коэффициенты Фурье отличны от нуля только для положительно определенных эрмитовых матриц.

Рассмотрим теперь ортогональную реализацию группы $SU(2,2)$. Пусть $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_6) \in \mathbb{R}_6$ и

$$S_\xi = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & \xi_1 & \xi_3+\omega\xi_4 & \xi_2 \\ -\xi_1 & 0 & \xi_5 & -\xi_3-\bar{\omega}\xi_4 \\ \hline -\xi_3-\xi_4\omega & -\xi_5 & 0 & \xi_6 \\ -\xi_2 & \xi_3+\bar{\omega}\xi_4 & -\xi_6 & 0 \end{array}\right)$$

– кососимметрическая матрица, где $\omega = \frac{1+\sqrt{-d}}{2}$, если $-d \equiv 1 \pmod 4$ и $\omega = \sqrt{-d}$, если $-d \equiv 2,3 \pmod 4$. Пусть $I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $F_0 = \begin{pmatrix} 2 & \omega+\bar{\omega} \\ \omega+\bar{\omega} & 2\omega\bar{\omega} \end{pmatrix}$. Определим две симметрические матрицы порядка 6

$$F=-\begin{pmatrix} 0 & 0 & I \\ 0 & F_0 & 0 \\ I & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R=\begin{pmatrix} E_2 & 0 & 0 \\ 0 & F_0 & 0 \\ 0 & 0 & E_2 \end{pmatrix}. \qquad (2.4)$$

Матрица F имеет сигнатуру (2,4) и четные коэффициенты на главной диагонали, матрица R положительно определена и $F^{-1}[R]=F$. Легко проверяется, что $Pf\, S_\xi = -\frac{1}{2} F[{}^t\xi]$ и $tr({}^t\bar{S}_\xi S_\xi) = 2R[{}^t\xi]$, где Pf – пфаффиан.

Группа $SU(2,2)$ действует на $\mathbb{R}_6$: $g:\xi \longrightarrow \xi\tilde{g}$, где ${}^t\bar{g}\, S_\xi\, \bar{g} = S_{\xi\tilde{g}}$ ($g\in SU(2,2)\cap M_4(\mathbb{Q}(\sqrt{-d}))$). Это действие сохраняет пфаффиан, следовательно, и форму F.

Ясно, что $R_g = R[{}^t\tilde{g}]\in \mathcal{H}(F)$ (см. (I.I)) и что $(R-F)^t b = b R^t b = 0$ для $b=(1,-i,0,0,i,-1)$, следовательно, функция

$$\Phi_g(X)=({}^tXF{}^t(b\tilde{g}^{-1}))^k=(bF{}^t\tilde{g}X)^k, \qquad (2.5)$$

где $X\in M_{6,1}(\mathbb{R})=\mathbb{R}^6$, является сферической функцией веса $(k,0)$ для пары (F,R_g) (см. (I.2)).

Зафиксируем четное положительное число k и четный характер Дирихле χ по модулю q. Для любого элемента $g\in SU(2,2)$ определим тета-ряд на верхней полуплоскости $H_1=\{w=u+iv,\ u,v\in\mathbb{R}, v>0\}$:

$$\theta_{F,g}(w,\chi)=v^2\sum_{N\in\mathbb{Z}^6}\chi(n_1)\Phi_g(N)e(uF[N]+ivR_g[N]), \qquad (2.6)$$

где n_1 – первая компонента столбца N.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Тета-функция $\theta_{F,g}(w,\chi)$ удовлетворяет следующим функциональным уравнениям:

$$(cw+d)^{-k+1}\theta_{F,g}(\gamma\langle w\rangle,\chi)=\chi(d)\chi_\Delta(d)\,\theta_{F,g}(w,\chi) \qquad (2.7)$$

для любого $\gamma=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\in\Gamma_0(Q)$, где Q – наибольшее общее кратное модуля характера q и модуля дискриминанта Δ, а $\chi_\Delta=\left(\frac{-\Delta}{*}\right)$ – квадратичный характер мнимого квадратичного поля с дискриминантом $-\Delta$;

$$\theta_{F,g\varepsilon}(w,\chi)=\det(A-iB)^k\theta_{F,g}(w,\chi) \tag{2.8}$$

для любого элемента $\quad \varepsilon=\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A\end{pmatrix}\in K_2$ (см. (2.I));

$$\theta_{F,Mg}(w,\chi)=\chi(\det\mathcal{D})\,\theta_{F,g}(w,\chi) \tag{2.9}$$

для любого элемента $M=\begin{pmatrix} A & B \\ C & \mathcal{D}\end{pmatrix}\in\Gamma_2(q,\mathcal{O}_2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем $S=diag(q,E_5)$, тогда ступень матрицы $F[S]$ равна Q и тета-ряд (2.6) является частным случаем ряда (I.7), исследованного в § I. Для доказательства равенства (2.8) достаточно заметить, что $R_{g\varepsilon}[N]=R_g[N]$ и $\Phi_{g\varepsilon}(N)=((\mathcal{b}\tilde{\varepsilon}^{-1})F^t\tilde{g}N)^k=\det(A-iB)^k\Phi_g(N)$.

Докажем теперь (2.9). Так как матрица M сохраняет форму F, то $\Phi_{Mg}(N)=\Phi({}^t\tilde{M}N)$ и

$$\theta_{F,Mg}(w,\chi)=v^2\sum_{N\in\mathbb{Z}^6}\chi(n_1)\Phi_g({}^t\tilde{M}N)e(F[{}^t\tilde{M}N]u+ivR_g[{}^t\tilde{M}N]).$$

Можно проверить, что эрмитова модулярная группа переводит решетку $\mathbb{Z}^6$ в себя и $n_1({}^t\tilde{M}N)\equiv(\det A)\cdot n_1(N)(\mathrm{mod}\ q)$, если $M=\begin{pmatrix} A & B \\ C & \mathcal{D}\end{pmatrix}\in\Gamma_2(q,\mathcal{O}_d)$, поэтому

$$\theta_{F,Mg}(w,\chi)=\overline{\chi}(\det A)\,\theta_{F,g}(w,\chi).$$

Обозначим через $S_{k-1}(\Gamma_0(Q),\chi\chi_\Delta)$ пространство параболических форм веса $k-1$ и характера $\chi\chi_\Delta$, тогда, если $f\in S_{k-1}(\Gamma_0(Q),\chi\chi_\Delta)$, функция

$$(f|_{k-1}\tau_Q)(w)=Q^{-\frac{k-1}{2}}w^{-k+1}f\left(-\frac{1}{Qw}\right) \tag{2.10}$$

принадлежит пространству $S_{k-1}(\Gamma_0(Q),\overline{\chi\chi}_\Delta)$ (см. [16]).

Положим $j(g,Z)=\det(CZ+\mathcal{D})$ для $g=\begin{pmatrix} A & B \\ C & \mathcal{D}\end{pmatrix}\in SU(2,2)$ и $Z\in\mathcal{H}_2$. Определим теперь для любой параболической формы $f\in S_{k-1}(\Gamma_0(Q),\chi\chi_\Delta)$ функцию $\theta(f,Z)$, заданную на эрмитовой полуплоскости $\mathcal{H}_2$:

$$\theta(f,Z)=j(g,iE_2)^k\int_{\Gamma_0(Q)\backslash H_1}(f|_{k-1}\tau_Q)\,\overline{\theta_{F,g}(w,\overline{\chi})}\,v^{k-3}du\,dv, \tag{2.11}$$

где $Z=g\langle iE_2\rangle$

В силу (2.8) $\theta(f,Z)$ не зависит от выбора g с условием

$g\langle iE_2\rangle = Z$, а из (2.9) следует, что

$$\det(CZ+\mathcal{D})^{-k}\,\theta(f, M\langle Z\rangle) = \chi(\det\mathcal{D})\,\theta(f,Z)$$

для любого $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & \mathcal{D}\end{pmatrix} \in \Gamma_2(q, \mathcal{O}_d)$. Интегрируя ряды Пуанкаре веса $k-1$ с характером $\bar\chi\,\chi_\Delta$ для группы $\Gamma_0(Q)$, можно доказать (см. работы Нивы [I4], Оды [I4] и Малолеткина [I2]), что при $k>6$ тета-интеграл $\theta(f,Z)$ является голоморфной на $\mathcal{H}_2$ функцией, имеющей нулевые коэффициенты Фурье (см. (2.3)) во всех вершинах, то есть интеграл $\theta(f,Z)$ является параболической эрмитовой формой рода 2, веса k и характера χ относительно группы $\Gamma_2(q, \mathcal{O}_d)$.

Вычислим коэффициенты Фурье эрмитовой формы $\theta(f,Z)$ через коэффициенты Фурье формы f . Для этого мы ограничим форму $\theta(f,Z)$ на "мнимую ось" iY и вычислим соответствующий интеграл, отщепляя от тета-функции $\theta_{F,q}(W,\chi)$ компоненту, зависящую только от $\det Y$. Этот метод был использован Нивой [I3] и другими авторами (см. [2], [5], [7]) в задачах, связанных с подъемом модулярных форм. Отметим, что наш подход к тета-рядам в § I основан на классических результатах и не связан с представлением Вейля, поэтому ниже мы постараемся последовательно проводить эту точку зрения по чисто методологическим соображениям.

В оставшейся части этого параграфа мы завершим доказательство следующей теоремы.

ТЕОРЕМА. Пусть k – четное целое число >6 , χ – четный характер Дирихле по модулю $q>1$, $\chi_\Delta = \left(\frac{-\Delta}{*}\right)$ – квадратичный характер поля $Q(\sqrt{-d})$ дискриминанта $-\Delta$. Если $f\in S_{k-1}(Q,\chi\chi_\Delta)$ (Q – наибольшее общее кратное q и Δ), то функция $\theta(f,Z)$, определенная интегралом (2.II), является параболической модулярной формой Эрмита рода 2, веса k и характера χ относительно модулярной группы $\Gamma_2(q,\mathcal{O}_d)$ (см. (2.2)) и имеет следующее разложение Фурье в бесконечности:

$$\theta(f,Z) = C_0 \sum_{M>0}\ \sum_{m|e(M)} \chi(m)\, m^{k-1}\, a\!\left(\frac{Q\det M}{m^2}\right) e^{2\pi i\, \mathrm{tr}(MZ)}, \qquad (2.12)$$

где

$$f(W) = \sum_{n\geq 1} a(n)\, e^{2\pi i n W}$$

– разложение Фурье формы f , $e(M)$ – наибольший общий делитель коэффициентов m_1, m_2, m_3, m_4 матрицы $M = \begin{pmatrix} m_1 & \frac{m_2+\omega m_3}{\sqrt{-\Delta}} \\ \frac{m_2+\bar\omega m_3}{-\sqrt{-\Delta}} & m_4 \end{pmatrix}$, а C_0 – рациональная константа, зависящая только от q, k и Δ.

ЛЕММА 3. Для положительно определенной эрмитовой матрицы $Y = yY_1$, где $Y_1 = \begin{pmatrix} y_1 & y_2+iy_3 \\ y_2-iy_3 & y_4 \end{pmatrix}$, $y>0$, $\det Y_1 = 1$ положим $g(Y) = \begin{pmatrix} \sqrt{Y} & 0 \\ 0 & \sqrt{Y^{-1}} \end{pmatrix}$, где $\sqrt{Y}$ – положительно определенная матрица такая, что $(\sqrt{Y})^2 = Y$. Тогда

$$b\tilde{g}^{-1}(Y) = (y^{-1}, -i\,b(Y_1), -y), \text{ где } b(Y_1) = \left(y_4, y_2 - \frac{t_k\omega}{\sqrt{\Delta}}, \frac{2y_3}{\sqrt{\Delta}}, -y_1\right),$$

$$\tilde{g}(Y) = \begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{g}(Y_1) & 0 \\ 0 & 0 & y^{-1} \end{pmatrix}, \quad R_{g(Y)} = \begin{pmatrix} y^2 & 0 & 0 \\ 0 & R(Y_1) & 0 \\ 0 & 0 & y^{-2} \end{pmatrix}$$

и для

$$F_1 = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & F_0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & F_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R(Y_1) = R_1[{}^t\tilde{g}(Y_1)] \in \mathcal{H}(F_1), (F_1 - R(Y_1))\,{}^t b(Y_1) = R(Y_1)[{}^t b(Y_1)] = 0,$$

$$b(Y_1) = b_1\tilde{g}(Y_1)^{-1} \text{ где } b_1 = (1,0,0,-1)$$ (см. (I.I), (2.4), (2.5)).

Доказательство леммы может быть проведено прямыми вычислениями, которые мы опускаем.

Для выделения переменной y в тета-ряде мы воспользуемся стандартными свойствами полиномов Эрмита $H_l(x) = (-1)^l \exp\frac{x^2}{2} \cdot \frac{d^l}{(dx)^l}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$:

$$(x-iy)^k = \sum_{l=0}^{k} C_k^l (-i)^l H_{k-l}(x) H_l(y),$$

$$x H_l'(x) = (x^2 - (l+1)) H_l(x) - H_{l+2}(x).$$

Положим ${}^tN = (n, {}^tN_1, m)$ $(N_1 \in \mathbb{Z}^4)$. Применяя первое утверждение леммы 3 и разложение для $(x-iy)^k$, получаем

$$\theta_{F,g(Y)}(w,\bar\chi) = (2\pi)^{-\frac{k}{2}} \sum_{l=0}^{k} (-i)^l C_k^l \theta_{4,l}(w,Y_1)\,\theta_{2,k-l}(w,y,\bar\chi), \quad (2.13)$$

где

$$\theta_{4,\ell}(w,Y_1)=v^{\frac{3-\ell}{2}}\sum_{N\in\mathbb{Z}^4} H_\ell(\sqrt{2\pi v}\,N F_1^t \mathscr{b}(Y_1))e(uF[N]+ivR(Y)[N]),$$

$$\theta_{2,k-\ell}(w,y,\overline{\chi})=v^{\frac{\ell-k+1}{2}}\sum_{n,m\in\mathbb{Z}}\overline{\chi}(n)H_{k-\ell}(\sqrt{2\pi v}(ny-y^{-1}m))e(-2nmu+iv(y^2n^2+y^{-2}m^2)).$$

Напомним стандартное обозначение:

$$(f|_k\gamma)(w)=\det{}^{\frac{k}{2}}\gamma(cw+d)^{-k}f(\gamma\langle w\rangle)\qquad \gamma=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in GL_2^+(\mathbb{R}).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Имеют место следующие формулы преобразования тета-ряда $\theta_{4,\ell}(w,Y_1)$ ($\ell\geqslant 0$, четное):

$$\theta_{4,\ell}(w,Y_1)\big|_{\ell-1}\gamma=\chi_\Delta(\gamma)\,\theta_{4,\ell}(w,Y_1),$$

где $\gamma=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\Gamma_0(\Delta)$ и $\chi_\Delta(\gamma)=\left(\frac{-\Delta}{d}\right)$,

$$\theta_{4,\ell}\left(-\frac{1}{\Delta w},Y_1\right)=\sqrt{-\Delta}^{\,\ell}\,w^{\ell-1}\,\theta^*_{4,\ell}(w,Y_1),$$

где

$$\theta^*_{4,\ell}(w,Y_1)=v^{\frac{3-\ell}{2}}\sum_{N\in\mathbb{Z}^4}H_\ell(\sqrt{2\pi v\Delta}\,\mathscr{b}(Y_1)N)e(u\Delta F^{-1}[N]+iv\Delta R(Y_1)^{-1}[N]),$$

и

$$\theta^*_{4,\ell}\left(\frac{Q}{\Delta}\gamma(w),Y_1\right)(cw+d)^{1-\ell}=\chi_\Delta(\gamma)\,\theta^*_{4,\ell}\left(\frac{Q}{\Delta}w,Y_1\right)$$

для любого $\gamma\in\Gamma_0(Q)$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\ell=0$, то $\theta_{4,0}(w,Y_1)=v^{\frac{3}{2}}\theta_{F_1,R(Y_1)}(w,0,0)$, и первое утверждение предложения следует из леммы I. Тета-ряд $\theta_{4,\ell}$ можно получить из ряда $\theta_{4,0}$ применением стандартного дифференциального оператора Шимуры-Маасса (см. [17]), который определяется следующим образом:

$$\delta_\lambda^\ell=\delta_{\lambda+2(\ell-1)}\cdot\ldots\cdot\delta_{\lambda+2}\delta_\lambda,\qquad \delta_\lambda=\frac{1}{2\pi i}\,v^{-\lambda}\frac{\partial}{\partial w}v^\lambda\qquad \lambda\in\mathbb{R}\text{ и }\ell\in\mathbb{Z}^+.$$

Известно, что

$$\delta_\lambda^\ell (f|_\lambda \gamma) = (\delta_\lambda^\ell f)|_{\lambda+2\ell}\gamma \quad \text{для } \gamma \in GL_2^+(\mathbb{R}).$$

Для доказательства следующей леммы достаточно применить второе свойство полиномов Эрмита и индукцию по ℓ (см. также [2], лемма 9).

ЛЕММА 4. Положим

$$t_\lambda(N) = v^{\frac{2-\lambda}{2}}(8\pi)^{-\frac{\lambda+1}{2}} H_{\lambda+1}(\sqrt{2\pi v}\, b_1 F_1 N)\, e(uF_1[N] + iv R_1[N]),$$

где λ - целое $\geqslant -1$, $N \in \mathbb{R}^4$, $b_1 = (1,0,0,-1)$, тогда

$$\delta_\lambda^\ell t_\lambda = t_{\lambda+2\ell}.$$

Первое равенство предложения 3 следует теперь из соотношения

$$\theta_{4,\ell}(W, Y_1) = (8\pi)^{\frac{\ell}{2}} \delta_{-1}^{\frac{\ell}{2}} \theta_{4,0}(W, Y_1)$$

и свойств дифференциального оператора δ_λ^ℓ.

Выведем формулу обращения. Пусть $\tau_\Delta = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}$, тогда

$$\theta_{4,\ell}(W, Y_1)|_{\ell-1}\tau_\Delta = (8\pi)^{\frac{\ell}{2}} \delta_{-1}^{\frac{\ell}{2}} (\theta_{4,0}(W, Y_1)|_{-1}\tau_\Delta) =$$

(применяя к ряду $\theta_{4,0}$ лемму 2, получим)

$$= (8\pi)^{\frac{\ell}{2}} \sqrt{-\Delta}\, \delta_{-1}^{\frac{\ell}{2}} \Big(\sum_{N \in \mathbb{Z}^4} t_{-1}({}^t\tilde{g}(Y_1)F^{-1}N\sqrt{\Delta})\Big) = (8\pi)^{\frac{\ell}{2}} \sqrt{-\Delta} \sum_{N \in \mathbb{Z}^4} t_{\ell-1}({}^t\tilde{g}(Y_1)F^{-1}N\sqrt{\Delta}),$$

что доказывает формулу обращения. Отметим, что все рассматриваемые нами тета-ряды сходятся равномерно на любом компакте полуплоскости H_1.

Третье утверждение предложения является легким следствием двух первых.

Свойства тета-ряда $\theta_{2,\ell}(W, y, \bar{\chi})$ хорошо известны. Отметим лишь, что $\theta_{2,0}$ является тета-рядом неопределенной квадратичной формы $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, следовательно, его поведение при модулярных подстановках описывается предложением I § I, а ряды $\theta_{2,\ell}$ получаются из него почленным дифференцированием. Формула суммирования Пуассона позволяет представить $\theta_{2,\ell}$ в виде удобном для выделения суммирования по смежным классам $\Gamma_\infty \backslash \Gamma_0(Q)$. Приведем соответствующий результат.

ЛЕММА 5.

$$\theta_{2,\ell}(W,\overline{\chi})=(\sqrt{2\pi}\,i)^{\ell}\frac{y^{\ell+1}}{v^{\ell}}\sum_{n,m}\overline{\chi}(n)(n\overline{W}+m)^{\ell}\,e^{-\pi y^2\frac{|mv+n|^2}{v}}$$

$$\theta_{2,\ell}\left(-\frac{1}{QW},\overline{\chi}\right)=2(-2\pi)^{\frac{\ell}{2}}y^{\ell+1}\left(\frac{W}{V}\right)^{\ell}\sum_{m\geqslant 1}\overline{\chi}(m)m^{\ell}\sum_{\gamma\in\Gamma_\infty\setminus\Gamma_0(Q)}\overline{\chi}(\gamma)j(W,\gamma)^{\ell}e^{-\frac{\pi y^2m^2}{Q}V(\gamma\langle W\rangle)^{-1}}$$

Вторые равенства предложения 3 и леммы 5 позволяют описать поведение интегрального ядра $\theta_{F,q}(W,\chi)$ при действии подстановки $\tau_Q=\begin{pmatrix}0&-1\\Q&0\end{pmatrix}$ (см. (2.13)).

ЛЕММА 6. Имеет место следующая формула обращения:

$$\theta_{F,q}(W,\overline{\chi})\big|_{k-1}\tau_Q=2Q^{\frac{1-k}{2}}y^{k}i^{k+1}\sum_{\ell=0}^{k}(2\pi)^{-\frac{\ell}{2}}C_k^{\ell}\,\Delta^{\frac{\ell}{2}}y^{1-\ell}\theta^{*}_{4,\ell}\left(\frac{Q}{\Delta}W,Y_1\right)\left(\frac{Q}{\Delta}\right)^{\ell-1}\times$$

$$\times\sum_{m\geqslant 1}\overline{\chi}(m)\,m^{k-\ell}\sum_{\gamma\in\Gamma_\infty\setminus\Gamma_0(Q)}\overline{\chi}(\gamma)\left(v^{\ell-k}e^{-\frac{\pi y^2m^2}{Q}v^{-1}}\right)\Big|_{k-\ell}\gamma.$$

Применим полученную информацию о тета-рядах к вычислению интеграла (2.11).

Утверждения леммы 6 и предложения 3 позволяют перейти в интеграле (2.11) к фундаментальной области $\mathcal{D}_\infty=\{0<x\leqslant 1,\ y>0\}$ группы Γ_∞. Если $f(W)=\sum_{n\geqslant 1}a(n)\exp(2\pi i\,nW)$ – разложение Фурье в ∞ формы f, то после интегрирования по u получим, что $\theta(f,iY)$ равна сумме интегралов вида

$$y^{1-\ell}\int_{v>0}v^{\frac{\ell-3}{2}}\sum_{N\in\mathbb{Z}^4}a\left(\frac{QF_1^{-1}[N]}{2}\right)e^{-\pi vQ(F^{-1}+R(Y_1)^{-1})[N]-\frac{\pi y^2m^2}{Qv}}H_\ell(\sqrt{2\pi Qv}\,b(Y_1)N)\,dv$$

Заметим, что $(F_1+R_1)[N]=(b_1N)^2$ (см. лемму 3), поэтому $(F^{-1}+R(Y_1)^{-1})[N]=(b(Y_1)N)^2$, и для вычисления последнего интеграла достаточно воспользоваться равенством (см. [7] стр.400)

$$\int_{v>0}v^{\frac{\ell-3}{2}}e^{-\alpha v-\beta v^{-1}}H_\ell(\sqrt{2\alpha v})\,dv=\beta^{\frac{\ell-1}{2}}\sqrt{2^{\ell}\pi}\,e^{-2\sqrt{\alpha\beta}}.$$

В итоге

$$\theta(f,iY)=\underbrace{(-i)^{k+1}2Q^{\frac{2-k}{2}}\sum_{\ell=0}^{k}C_k^{\ell}\left(\frac{Q}{\Delta}\right)^{\frac{\ell}{2}-1}}_{C_0}\sum_{m\geqslant 1}\chi(m)m^{k-1}\sum_{N\in\mathbb{Z}^4}a\left(\frac{QF_1^{-1}[N]}{2}\right)e^{-2\pi ym|b(Y_1)N|},$$

где $i\,C_0$ – рациональное число, не зависящее от f и Y. После преобразования получаем, что

$$\theta(f, iY) = C_0 \sum_{m\geq 1} \chi(m) m^{k-1} \sum_{N\in\mathbb{Z}^4} a\left(\frac{QF_1^{-1}[N]}{2}\right) e^{-2\pi y m|b(Y_1)N|},$$

где рациональная постоянная iC_0 зависит лишь от k, Q и Δ.

Пусть $M = \begin{pmatrix} n_4 & \frac{n_3-\omega n_2}{\sqrt{-\Delta}} \\ \frac{n_3-\bar\omega n_2}{-\sqrt{-\Delta}} & -n_1 \end{pmatrix}$ – полуцелая положительно определенная эрмитова матрица, тогда $my|b(Y_1)N| = |tr(Ym M)|$ (см. лемму 3) и $F_1^{-1}[N] = \det M$, поэтому после пересуммирования получим

$$\theta(f, iY) = C_0 \sum_{M>0} \sum_{m|(m_1,m_2,m_3,m_4)} \chi(m) m^{k-1} a\left(\frac{Q\det M}{m^2}\right) e^{-2\pi\, tr\, YM}$$

где M пробегает множество всех положительно определенных полуцелых эрмитовых матриц (см. (2.3)). Форма $\theta(f, Z)$ голоморфна, поэтому полученное разложение справедливо всюду, и теорема доказана.

Литература

1. А н д р и а н о в А.Н., М а л о л е т к и н Г.Н. Поведение тета-рядов рода n неопределенных квадратичных форм при модулярных подстановках. - Тр.Мат.ин-та им.Стеклова, 1978, т.148, с.5-15.
2. A s a i T. On the Doi-Naganuma lifting associated with imaginary quadratic fields. - Nagoya Math.J., 1978, vol.71, N 1, p.149-167.
3. B r a u n H. Hermitian modular functions. - Ann. of Math., 1949, vol.50, N 4, p.827-855.
4. B r a u n H. Der Basissatz fur hermitische Modulformen. - Abh.math. Sem. der Univ.Hamburg, 1955, Bd 19, N 3, S.134-148.
5. C i p r a B.A. On the Niwa-Shintani theta-kernel lifting of modular forms. - Nagoya Math.J., 1983, vol.91, N 1, p.49-117.
6. К а с с е л с Дж. Рациональные квадратичные формы. М., 1982, 436 с.
7. K o j i m a H. On construction of Siegel modular forms of degree two. - J.Math.Soc.Japan, 1982, vol.34, N 3, p.393-411.
8. K o j i m a H. An arithmetic of hermitian modular forms of degree two. - Invent.Math., 1982, vol.69, N 2, p.217-227.

9. K u d l a S.S. On certain arithmetic automorphic forms for $SU(1,q)$. - Invent.Math., 1979, vol.52, N 1, p.1-25.

10. M a a ß H. Über eine Spezialschar von Modulformen zweiten Grades. - Invent.Math., 1979, vol.52, N 1, p.95-104.

11. M a a ß H. Über eine Spezialschar von Modulformen zweiten Grades III. - Invent.Math., 1979, vol.53, N 3, p.255-265.

12. М а л о л е т к и н Г.Н. Построение зигелевых параболических форм рода 2 по параболическим формам рода I. - Зап.науч. семин.ЛОМИ, I980, т.93, с.I86-I9I.

13. N i w a S. Modular forms of half integral weight and the integral of certain theta-functions. - Nagoya Math.J., 1974, vol.56, N 1, p.147-161.

14. O d a T. On modular forms associated with indefinite quadratic forms of signature $(2, n-2)$. - Math.Ann., 1977, Bd.231, N 1, S.97-144.

15. R a l l i s S., S c h i f f m a n n G. On a relation between $\widetilde{SL}_2$ cusp forms and cusp forms on tube domains associated to orthogonal groups. - Trans.Amer.Math.Soc., 1981, vol. 263, N 1, p.1-58.

16. Ш и м у р а Г. Введение в арифметическую теорию автоморфных функций. М., I973, с.326.

17. S h i m u r a G. The special values of the zeta functions associated with cusp forms. - Comm.Pure Appl.Math., 1976, vol.29, N 6, p.783-805.

18. S h i m u r a G. The arithmetic of automorphic forms with respect to a unitary group. - Ann. of Math., 1978, vol.107, N 4, p.569-605.

19. S h i n t a n i T. On construction of holomorphic cusp forms of half integral weight. - Nagoya Math.J., 1975, vol.58, N 1, p.83-126.