Ф. Х. Арсланов, С. Р. Насыров, Некоторые обобщения условий однолистности Беккера для аналитических функций, *Тр. сем. по краев. задачам*, 1992, выпуск 27, 37–47

Л и т е р а т у р а

1. А к с е н т ь е в Л. А. Достаточные условия многолистности интегральных представлений // Тр. семин. по краев. задачам. Казань, 1980. – Вып. 17. – С.2 – 17.

2. А к с е н т ь е в Л. А., З о р и н И. А. Условия конечнолистности интегральных представлений // Тр. семин. по краев.задачам. Казань, 1990. – Вып. 25. – С.20 – 31.

3. S t y e r D. Close – to – convex multivalent functions with respect to weakly starlike functions // Trans. Amer. Math. Soc. – 1972. – V.169. – N 7. – P. 105 – 112.

4. Г а х о в Ф. Д. Краевые задачи. – М.: Наука, 1977. – 640 с.

5. В е к у а И. Н. Обобщенные аналитические функции. – М.: Наука, 1988. – 509 с.

6. П р о х о р о в Д. В., Р а х м а н о в Б. Н. Об интегральном представлении одного класса однолистных функций // Матем. заметки. – 1976. – Т.19. – № 1. – С.41 – 48.

7. А к с е н т ь е в Л. А. Достаточные условия однолистности решения обратной задачи теории фильтрации // УМН. – 1959. – Т.14. – Вып. 4. – С.133 – 140.

Ф.Х.Арсланов, С.Р.Насыров

НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ УСЛОВИЙ ОДНОЛИСТНОСТИ БЕККЕРА ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Пусть функция $f(z)$ регулярна и локально однолистна в единичном круге $E=\{z : |z|<1\}$. Хорошо известно, что $f(z)$ будет однолистна в E, если выполняется одно из условий [1]:

$$|f''(z)/f'(z)| \le 1/(1-|z|^2)\ , \quad z\in E\ , \tag{1}$$

(или [2])

$$|f''(z)/f'(z)| \le 3,05\ \ldots\ , \quad z\in E\ . \tag{2}$$

Естественно поставить вопрос о "соединении" этих двух условий, то есть получении достаточных условий однолистности вида

$$|f''(z)/f'(z)| \le R(|z|,\alpha), \quad z \in E',$$

где мажоранта R зависит непрерывно от параметра α, $0 \le \alpha \le 1$, причем $R(|z|,0) = const$, $R(|z|,1) = const/(1-|z|^2)$. В [3] было получено "соединение" степенного вида

$$|f''(z)/f'(z)| \le A(\alpha)/(1-|z|^2)^{\alpha}, \quad z \in E,$$

$0 \le \alpha \le 1$ (такие же условия рассматривались позднее в [4], [5], но с худшими константами). Константы $A(\alpha)$, лучшие, чем в [3], были получены в [6] с использованием цепей подчинения, в частности, при $\alpha = 1$ условие однолистности превращалось в (I), при $\alpha = 0$ условие имело вид

$$|f''(z)/f'(z)| \le 3/2 + \ln 4 = 2{,}88\ \ldots, \qquad (3)$$

что несколько хуже, чем (2).

Аналогично можно поставить задачу о "соединении" достаточных условий однолистности Беккера [7]

$$|\zeta F''(\zeta)/F'(\zeta)| \le 1/(|\zeta|^2-1), \quad \zeta \in E^-, \qquad (4)$$

и С.Н.Кудряшова [2]

$$|F''(\zeta)/F'(\zeta)| \le B = \frac{4\pi^2}{\pi^2+16} = 1{,}53\ \ldots, \quad \zeta \in E^-. \qquad (5)$$

В силу леммы Шварца это условие эквивалентно условию $|F''(\zeta)/F'(\zeta)| \le B/|\zeta|^3$ для функций, регулярных во внешности единичного круга $E^- = \{\zeta : |\zeta| > 1\}$ и имеющих простой полюс на бесконечности.

В данной работе, используя метод статьи [6], получим линейное "соединение" условий (I), (3) вида

$$|f''(z)/f'(z)| \le A(\alpha)[\alpha + (1-\alpha)/(1-|z|^2)], \quad z \in E, \qquad (6)$$

(теорема 2) и степенное "соединение" условий (4) и (5):

$$|\zeta F''(\zeta)/F'(\zeta)| \le B(\beta)/|\zeta|^{2(1-\beta)}(|\zeta|^2-1)^{\beta}, \quad 0 \le \beta \le 1, \quad \zeta \in E^-, \qquad (7)$$

(теорема 3), где неулучшаемые константы $B(\beta)$ определяются как решения некоторого уравнения.

В качестве следствия теоремы 3 получено условие типа (5) с константой $B = 1{,}7081\ldots$, большей, чем у С.Н.Кудряшова (следствие I).

Включив локально однолистные в E функции $f(z)$ и $F(1/z)$ в цепи подчинения по формулам

$$f(z,t)=f(e^{-t}z)+\varphi(t)e^{-t}zf'(e^{-t}z) ,$$

$$f(z,t)=F(e^{t}/z)-\frac{\varphi(t)}{1+\varphi(t)}\,\frac{e^{t}}{z}\,F'(e^{t}/z) ,$$

$z\in E$, $t\geqslant 0$, Беккер [8] доказал следующую теорему.

Теорема I. Пусть функция $\varphi:[0,\infty)\to\mathbb{C}$ такова, что $\varphi\in C^1[0,\infty)$, $\varphi(0)=0$, $e^{-t}|\varphi(t)|\to\infty$ при $t\to\infty$. Тогда условие

$$|-\varphi'(t)/2+\varphi(t)+1+\varphi(t)zf''(z)/f'(z)|\leqslant|\varphi'(t)/2| , \tag{8}$$

где $t=-\ln|z|$, $z\in E$, достаточно для однолистности функции $f(z)$ в E, а условие

$$|(e^{t}-\tau(t))F''(1/z)/zF'(1/z)-(\tau(t)+\tau'(t))/2|\leqslant|\tau(t)-\tau'(t)|/2 , \tag{9}$$

где $\tau(t)=e^{t}/(1+\varphi(t))$, достаточно для однолистности функции $F(\zeta)$, $\zeta=1/z$, в E^-.

Рассмотрим условие (6) и предположим, что функция $\varphi(t)$ удовлетворяет посылкам теоремы I и условию

$$|\varphi'(t)/2|-|1+\varphi(t)-\varphi'(t)/2|\geqslant A(\alpha)|z||\varphi(t)|\left[\alpha+(1-\alpha)/(1-|z|^2)\right], \tag{10}$$

$t=\ln|z|$, $z\in E$. Тогда (6) в силу теоремы I будет достаточно для однолистности функции $f(z)$, так как из (6) и (10) и неравенства треугольника будет следовать (8).

Ограничимся случаем вещественной и монотонно возрастающей $\varphi(t)$. Пусть $\phi(e^{-t})=\varphi(t)$. Тогда функция $\phi(r)$, $r\in(0,1]$, будет убывающей и условие (10) можно записать в виде

$$-r\phi'(r)/2-|1+\phi(r)+r\phi'(r)/2|\geqslant A\phi(r)s(r) ,$$

где $s(r)=r[\alpha+(1-\alpha)/(1-r^2)]$. Это неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} r\phi'(r)+\phi(r)+1\leqslant -A\phi(r)s(r) , \\ \phi(r)+1\geqslant A\phi(r)s(r),\ r\in(0,1). \end{cases} \tag{11}$$

Введем функции

$$\Phi(r)=\int_0^r \frac{s(r)}{r}\,dr=\alpha r+\frac{1-\alpha}{2}\ln\frac{1+r}{1-r},\quad \theta(r)=\int_0^r e^{A\Phi(r)}\,dr=\int_0^r e^{A\alpha r}\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{\frac{1-\alpha}{2}A} dr.$$

После этого (II) можно записать в виде

$$\begin{cases} (r\varphi(r))'+Ar\varphi(r)\Phi'(r)+1\le 0, & r\in(0,1), \\ \varphi(r)\le(As(r)-1)^{-1}, & r\in(0,1)\cap\{r: s(r)>A^{-1}\}, \end{cases}$$

или

$$\omega'(r)\le 0,\ r\in(0,1),\ \omega(r)\le k(r),\ r\in(0,1)\cap\{r: s(r)>A^{-1}\}, \qquad (12)$$

где

$$\omega(r)=re^{A\Phi(r)}\varphi(r)+\theta(r),\quad k(r)=re^{A\Phi(r)}(As(r)-1)^{-1}+\theta(r).$$

Как и в статье [6], можно показать, что при $0\le\alpha\le 1$ с учетом равенства $\omega(1)=\theta(1)$ условие

$$\min_{(r_0,1)} k(r)\ge\theta(1), \qquad (13)$$

где r_0 единственный в силу монотонности $s(r)$, корень уравнения $s(r)=A^{-1}$, необходимо и достаточно для существования функции $\omega(r)$, удовлетворяющей (12).

Найдем минимум функции $k(r)$ на $(r_0,1]$. Имеем

$$k'(r)=\frac{2As^2(r)e^{A\Phi(r)}}{(As(r)-1)^2}\,(A-T(r)),$$

где

$$T(r)=\frac{2s(r)+rs'(r)}{2s^2(r)}=\frac{3-(1+5\alpha)r^2+3\alpha r^4}{2r(1-\alpha r^2)^2}.$$

Несложное исследование показывает, что $T(r)$ при $0\le\alpha\le 1/3$ убывает, а при $1/3<\alpha<1$ имеет единственный минимум в точке $r=r_1>r_0$, являющейся корнем уравнения

$$T'(r)=\frac{3\alpha^2r^6+3\alpha(2-5\alpha)r^4+(10\alpha-1)r^2-3}{2r^2(1-\alpha r^2)^3}=0.$$

В случае $\alpha = \mathrm{I}$ получаем монотонно убывающую функцию $T(r) = 3/2\, r$.

Если $0 \le \alpha \le 1/3$, то при $A = T(1) = 1/(1-\alpha)$ функция $k(r)$ убывает и принимает наименьшее значение при $r = \mathrm{I}$, а так как $k(1) = \theta(1)$, то условие (I3) выполнено (рис. Iа).

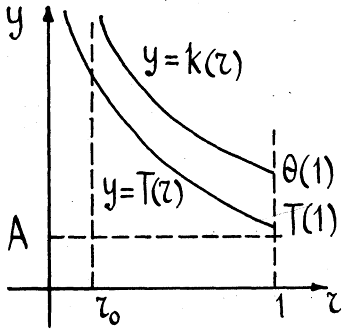

Рис. Iа

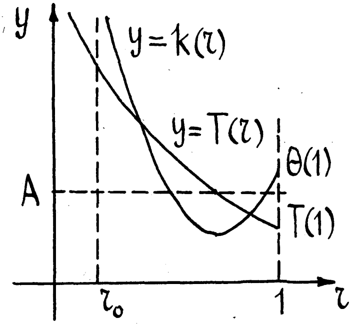

Рис. Iб

Если $A > T(1)$, то функция $k(r)$ будет на $(r_0, 1]$ иметь единственный экстремум, а именно минимум, причем $\min\limits_{(r_0,1]} k(r) < \theta(1)$ (рис. Iб). Поэтому при всех α таких, что $0 \le \alpha \le 1/3$, наилучшая константа $A = 1/(1-\alpha)$.

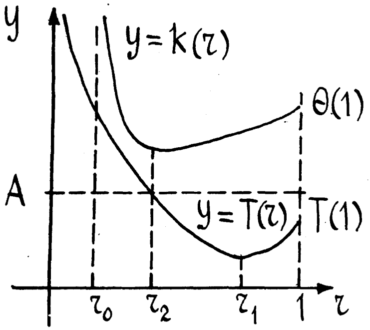

Рис. 2а

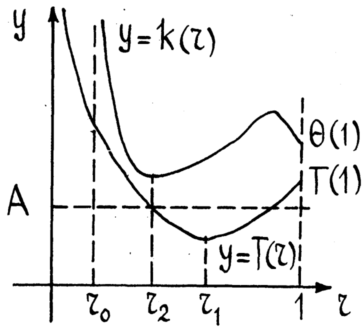

Рис. 2б

Пусть теперь $1/3 < \alpha < 1$. По-прежнему справедливо равенство $k(1) = \theta(1)$. Если $A > T(1)$, то функция $k(r)$ будет иметь единственный экстремум-минимум (рис. 2а) и условие (I3) невыполнимо. Если A таково, что $T(r_1)<A<T(1)$, то функция $k(r)$ имеет два экстремума, один из которых является минимумом, а другой - максимумом (рис. 2б). Поэтому условие (I3) можно обеспечить, если потребовать выполнения равенства $k(r_2)=\theta(1)$, где r_2 - точка минимума функции $k(r)$.

Если α = I, то $T(r)=3/2r$ монотонно убывает и функция $k(r)$ будет иметь единственный экстремум-минимум в точке $r_2 \in \in (r_0, r_1)$ при некотором $A>T(1)=3/2$. Коль скоро $k(1)=e^A/(A-1)+(e^A-1)/A>\theta(1)=(e^A-1)/A$, то (I3) будет иметь место, если потребовать выполнения равенства $k(r_2)=\theta(1)$.

Таким образом, если $\alpha\in(1/3, 1]$, то для определения A и r_2 можно рассмотреть систему уравнений $A=T(r_2)$, $k(r_2)=\theta(1)$, которую можно записать в виде

$$A=\frac{3-(1+5\alpha)r_2^2+3\alpha r_2^4}{2r_2(1-\alpha r_2^2)^2}, \qquad (I4)$$

$$r_2 e^{A\alpha r_2}\left(\frac{1+r_2}{1-r_2}\right)^{\frac{A(1-\alpha)}{2}}\left[Ar_2\left(\alpha+\frac{1-\alpha}{1-r_2^2}\right)-1\right]^{-1}=\int_{r_2}^{1} e^{A\alpha r}\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{\frac{A(1-\alpha)}{2}}dr . \qquad (I5)$$

Эта система в силу монотонности $T(r)$ на $(0, r_1)$ имеет единственное решение.

Сформулируем полученный результат.

<u>Теорема 2</u>. Регулярная в единичном круге E функция $f(z) = =z+a_2z^2+\dots$ будет однолистной, если имеет место неравенство (6), причем при $\alpha\in[0,1/3]$ константа $A(\alpha)$ равна $1/(1-\alpha)$, а при $\alpha\in(1/3,1]$ $A(\alpha)$ есть единственное решение системы уравнений (I4) и (I5).

В следующей таблице приведены приближенные значения констант A, соответствующих значениям α из $(1/3,1]$, полученные в результате решения системы (I4), (I5) на ЭВМ. Сначала решалось уравнение (I5) с заменой A по формуле (I4), причем для решения на ЭВМ это уравнение заменялось таким его приближением, чтобы полученные решения были не меньше точных решений (I5). Затем по (I4) вычислялись константы A. Так как $T(r)$ на $(0, r_1)$ убывает, то полученные таким образом константы A не превосходят точных.

Т а б л и ц а I

α	0,35	0,36	0,40	0,43	0,46	0,50	0,53	0,56	0,60	0,63
A	1,5373	1,5597	1,6485	1,7145	1,7803	1,8674	1,9324	1,9970	2,0827	2,1464
α	0,66	0,70	0,73	0,76	0,80	0,83	0,87	0,90	0,94	0,98
A	2,2095	2,2931	2,3551	2,4164	2,4976	2,5573	2,6364	2,6945	2,7714	2,8465

Отметим, что константа $A(1)$ вычисляется точно. Действительно, при $\alpha = 1$ (14) принимает вид $A=3/2r_2$. Исключив из (15) A, и после несложных преобразований для определения r_2 получим уравнение $4\exp(3/2)=\exp(3/2r_2)$. Поэтому $A(1)=3/2+\ln 4$, что согласуется с результатами из работы [6].

Замечание. Для $\alpha\in[0,1/3]$ имеем достаточное условие однолистности

$$|f''(z)/f'(z)| \leq \alpha/(1-\alpha)+1/(1-|z|^2) ,$$

которое является, очевидно, усилением условия (I). Однако оба эти условия слабее достаточного признака однолистности Беккера [I] с множителем z в левой части:

$$|zf''(z)/f'(z)| \leq 1/(1-|z|^2)$$

с точной константой в правой части [9].

Перейдем теперь к рассмотрению условия вида (7), предположив, что для функции $\tau(t)$, удовлетворяющей посылкам теоремы I, справедливо неравенство

$$|\tau(t)-\tau'(t)|/2-|\tau(t)+\tau'(t)|/2\geq|e^{t}-\tau(t)|B/|\zeta|^{2(1-\beta)}(|\zeta|^2-1)^{\beta} , \qquad (16)$$

где $t=\ln|\zeta|, \zeta\in E^-$. Тогда (7) в силу теоремы I будет достаточно для однолистности функции $F(\zeta)$ в E^-.

Пусть функция $\tau(t)$ вещественная и такая, что $\tau'(t)<0$, $t\geq 0$. Как и при обосновании достаточности условия вида (6), рассмотрим функцию $\varphi(e^{-t})=\tau(t)$ и приведем (16) к равносильной системе неравенств

$$Q'(r)\geq 0 , Q(r)\geq K(r) , r\in(0,1) , \qquad (17)$$

где $r=e^{-t}$, а

$$Q(r)=\Psi(r)e^{B\Phi(r)}-\theta(r),\ K(r)=e^{B\Phi(r)}rBS(r)/(1+r^2BS(r))-\theta(r),$$

причем $S(r)=(1-r^2)^{-\beta}$,

$$\Phi(r)=\int_0^r rS(r)dr=\frac{1}{2(1-\beta)}\left[1-(1-r^2)^{1-\beta}\right],\ \theta(r)=B\int_0^r e^{B\Phi(r)}S(r)dr.$$

Установим, что равенство $Q(1)=0$ или

$$e^{\frac{B}{2(1-\beta)}}\left(1-B\int_0^1 e^{-\frac{B}{2(1-\beta)}(1-r^2)^{1-\beta}}\frac{dr}{(1-r^2)^\beta}\right)=0 \qquad (18)$$

является достаточным условием существования функции $Q(r)$, удовлетворяющей системе (17). Действительно, положим $Q(r)\equiv 0$, тогда $\Psi(r)=\theta(r)e^{-B\Phi(r)}$. Отсюда $\Psi(0)=0$ и $\Psi(1)=1$. Это влечет за собой выполнение условий теоремы 1: $e^{-t}|\varphi(t)|=|1/\Psi(r)-r|\to\infty$, $r=e^{-t}$ при $t\to\infty$ и $\varphi(0)=0$. Для функции $Q(r)$, тождественно равной нулю, первое неравенство в (17), очевидно, выполняется. Покажем, что выполняется и второе.

Имеем

$$K'(r)=\frac{2r^2BS^2(r)e^{B\Phi(r)}}{(1+r^2BS(r))^2}\quad(B-T(r)),$$

где $T(r)=S'(r)/2rS^2(r)=\beta/(1-r^2)^{1-\beta}$. Если $\beta\neq 0$, то при $B>\beta$ функция $K(r)$ на $(0,r_0)$ убывает, а на $(r_0,1)$ – возрастает. Здесь r_0 – единственный корень уравнения $T(r)=B^{-1}$. Так как $\Psi(0)=0$, $\Psi(1)=1$, то $Q(0)=K(0)=0$ и $Q(1)=K(1)$. Поэтому и второе неравенство в (17) выполнено. Если $\beta=0$, то при любом $B\geqslant 0$ $K'(r)\leqslant 0$, а в случае $\beta=1$ неравенство $K'(r)\leqslant 0$ справедливо, если $B\geqslant 1$, то есть имеем $Q(r)\geqslant K(r)$.

Соотношение (18) можно рассматривать как уравнение относительно B, которое равносильно уравнению

$$B\int_0^1 e^{\frac{B}{2(1-\beta)}\left[1-(1-r^2)^{1-\beta}\right]}\frac{(1-r)^{1-\beta}}{(1+r)^\beta}dr=1$$

с единственным корнем в силу монотонности левой части.

Таким образом, имеет место следующая

Теорема 3. Аналитическая в $E^{-}\setminus\{\infty\}$ функция $F(\zeta)=\zeta+b_0+b_1\zeta^{-1}+\ldots$ будет однолистной, если выполняется условие (7), причем константа $B(\beta)$ для каждого фиксированного значения β из [0, I] определяется из уравнения (I8) и является неулучшаемой.

Неулучшаемость константы $B=B(\beta)$ проверяется с помощью функции

$$F_\beta(\zeta,B')=\zeta e^{\frac{B'}{2(1-\beta)}\left[1-(1-1/\zeta^2)^{1-\beta}\right]}-B'\int_0^{1/\zeta} e^{\frac{B'}{2(1-\beta)}\left[1-(1-r^2)^{1-\beta}\right]}\frac{dr}{(1-r^2)^\beta}.$$

Для функции $F_\beta(\zeta,B')$ справедливо неравенство (7) с заменой B на B' и $F_\beta(\pm 1,B')=\pm\mu(B')$, где $\mu(B)$ есть левая часть уравнения (I8). Если $B'=B$, то $\mu(B)=0$ и $F_\beta(-1,B)=F_\beta(1,B)$, то есть функция $F_\beta(\zeta,B)$ неоднолистна в $\bar{E}^{-}=\{\zeta:|\zeta|\geqslant 1\}$, а при $B'>B$ отображает E^{-} на двулистную область $F_\beta(E^{-},B')$.

В таблице 2 приведем приближенные значения констант $B(\beta)$, полученные при решении уравнения (I8) на ЭВМ. Вычисления проводились таким образом, чтобы получаемые приближенные значения не превосходили точных решений (I8).

Таблица 2

β	0,00	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45
B	1,7081	1,7008	1,6750	1,6487	1,6218	1,5943	1,5661	1,5373	1,5078	1,4774
β	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95
B	1,4462	1,4141	1,3810	1,3468	1,3114	1,2746	1,2364	1,1966	1,1550	1,1100

Интересно отметить, что при β, стремящемся к единице, величина $B(\beta)$ стремится к единице, а функция $F_\beta(\zeta,B(\beta))$ переходит в функцию $F(\zeta)=(\zeta^2-1)^{1/2}$, с помощью которой установлена неулучшаемость константы, равной единице, в достаточном условии однолистности Беккера (I) (см., напр., [9]).

При $\beta=0$ из теоремы 3 получаем такое усиление достаточного условия однолистности С.Н.Кудряшова (5).

Следствие I. Пусть для аналитической в $E^{-}\setminus\{\infty\}$ функции $F(\zeta)=\zeta+b_0+b_1\zeta^{-1}+\ldots$ справедливо неравенство

$$|\zeta F''(\zeta)/F'(\zeta)| \leq B/|\zeta|^2 , \quad \zeta \in E^- ,$$

причем константа B = I,708I... является корнем уравнения

$$e^{B/2} - B\int_0^1 e^{Br^2/2} dr = 0 . \qquad (I9)$$

Тогда функция $F(\zeta)$ однолистна в E^-. Константу B нельзя заменить на большую.

Заметим, что в работе [2] для наилучшей константы в условии (5) получена верхняя оценка, являющаяся приближенным корнем уравнения (I9).

В заключение авторы благодарят профессора Л.А.Аксентьева и старшего научного сотрудника Ф.Г.Авхадиева за внимание к работе и полезные советы.

Литература

I. B e c k e r I. Löwnersche Differentialgleichung und quasikonform fortsetzbore schlichte Funktionen // J.reine und angew. Math. - 1972. - V.255. - P.23 - 43.

2. К у д р я ш о в С. Н. О некоторых признаках однолистности аналитических функций // Матем. заметки. - 1973. - Т.13, № 3.- С.359 - 366.

3. А в х а д и е в Ф. Г. Некоторые достаточные условия однолистности аналитических функций // Тр. семинара по краевым задачам. - Казань: Изд-во Казан.ун-та, 1972.- Вып.9. - С.3 - II.

4. Y a m a s h i t a S. On theorem of Duren, Shapiro and Shields // Proc. Amer. Math. Soc. - 1979. - V.73, N.2. - P. 180 - 182.

5. Y a m a s h i t a S. Hardy norm, Bergman norm and univalency // Ann. pol. math. - 1983. - V.43, N.I. - P.23 - 33.

6. Н а с ы р о в С. Р. О применении уравнения Левнера-Куфарева к получению достаточных условий однолистности // Изв. вузов. Математика. - 1983. - № 12. - С.52 - 54.

7. B e c k e r J. Löwnersche Differentialgleichung und Schlichtheitskriteren // Math. Ann. - 1973. - V.202, N.4. - P.32I-335.

8. B e c k e r J. Uber die Lösungsstruktur einer Differentialgleichung in der konformen Abbildung // J.reine und angew. Math.- 1976.- V.285.- P.66 - 74.

9. Becker J., Pommerenke Ch. Schlichtheitskriterien und Jordangebiete // J.reine und angew. Math. - 1984. - V.354. - P.74 - 94.

Доложено на семинаре 3 апреля 1989 г.

А.В.Казанцев

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ, СВЯЗАННОЙ С ЭКСТРЕМУМОМ ВНУТРЕННЕГО РАДИУСА

Одной из величин, связанных с областью $f(E)$, в которую преобразуется единичный круг $E=\{\zeta : |\zeta|<1\}$ под действием регулярной и локально однолистной функции $f(\zeta)$, является внутренний (конформный) радиус этой области

$$R(\zeta)\equiv R(f(E),f(\zeta))=|f'(\zeta)|(1-|\zeta|^2) \qquad (1)$$

в точке $f(\zeta)$. Примечательным свойством функции $R(\zeta)$ является ее связь с обратными краевыми задачами (окз) [1]: если $f(\zeta)$ - решение внутренней окз по некоторым граничным условиям, то число решений внешней окз по этим условиям не превосходит числа критических точек (1), которые определяются из уравнения Гахова [2]

$$f''(\zeta)/f'(\zeta)=2\bar{\zeta}/(1-|\zeta|^2). \qquad (2)$$

Единственность критической точки (1) является критерием однозначной разрешимости соответствующей внешней задачи ([1], [3]). Первые достаточные признаки единственности критической точки (1) в связи с окз были выделены в статье [1] с помощью метода подчиненности и получили дальнейшее развитие в работах [3] - [5].

В данной статье с использованием подходов из [6] (с.31) и [7] указанный метод применяется к исследованию следующей задачи.

Пусть H - класс регулярных и локально однолистных в E функций $\mathcal{F}(\zeta)$ с условием

$$\mathcal{F}(0)=\mathcal{F}'(0)-1=0 \quad ; \qquad (3)$$

A_n, $n\geqslant 2$, - подкласс H функций $f(\zeta)$ с дополнительными ограничениями