УДК 514.763

РАССЛОЕНИЯ СТРУЙ КАК МНОГООБРАЗИЯ НАД АЛГЕБРАМИ

В. В. Шурыгин

Настоящий обзор естественно примыкает к обзорам А. П. Широкова [23] и [24], посвященным алгебраическим структурам на многообразиях и касательным расслоениям. Его целью является рассмотрение некоторых возможных применений теории пространств над алгебрами в геометрии расслоений струй.

§ 1. ЛОКАЛЬНЫЕ АЛГЕБРЫ

Ассоциативную коммутативную конечномерную алгебру $\mathbf{A}$ с единицей $1_{\mathbf{A}}$ над полем $\mathbf{R}$ вещественных чисел называют локальной, если ее радикал $\mathrm{Rd}(\mathbf{A})=\mathring{\mathbf{A}}$ (подмножество нильпотентных элементов) является максимальным идеалом, и факторалгебра $\mathbf{A}/\mathring{\mathbf{A}}$ изоморфна алгебре $\mathbf{R}$ вещественных чисел. Одномерное линейное подпространство в $\mathbf{A}$, натянутое на $1_{\mathbf{A}}$, образует подалгебру, изоморфную $\mathbf{R}$. Эту подалгебру можно отождествить с $\mathbf{R}$, считая что $\mathbf{R}\subset\mathbf{A}$ и $1_{\mathbf{A}}\equiv 1\in\mathbf{R}$. При этом локальная алгебра представляется в виде полупрямой суммы

$$\mathbf{A}=\mathbf{R}+\mathring{\mathbf{A}}. \tag{1}$$

Структура алгебры $\mathbf{A}$ полностью определяется ее радикалом — нильпотентной алгеброй $\mathring{\mathbf{A}}$. Укажем основные свойства нильпотентных алгебр, детально изученных В. В. Вагнером в работах [2], [3].

Алгебра $\mathring{\mathbf{A}}$ порождается набором элементов $\{\tau^A\}$ $(A=1,\ldots$ $\ldots, N)$ таких, что набор классов вычетов $\{\tau^A+\mathring{\mathbf{A}}^2\}$, где $\mathring{\mathbf{A}}^2$ — квадрат идеала $\mathring{\mathbf{A}}$, образует базис факторалгебры $\mathring{\mathbf{A}}/\mathring{\mathbf{A}}^2$. При этом набор $\{\tau^A\}$ называется псевдобазисом алгебры $\mathring{\mathbf{A}}$ ([3]), а число N — шириной ([24]) алгебры $\mathbf{A}$. Максимальное натуральное число q такое, что q-я степень радикала $\mathring{\mathbf{A}}^q$ отлична от нулевого идеала, называют высотой ([24]) алгебры $\mathbf{A}$.

Пусть $\mathbf{R}[N]=\mathbf{R}[t^1,\ldots,t^N]$ — алгебра многочленов от N переменных $t^1,\ldots,t^N$ над полем вещественных чисел, $\mathring{\mathbf{R}}[N]$ — максимальный идеал в $\mathbf{R}[N]$, состоящий из многочленов с нулевым свободным членом. Факторалгебра $\mathbf{R}(N,q)=\mathbf{R}[N]/\mathring{\mathbf{R}}[N]^{q+1}$ — алгебра многочленов степени q — называется ([3]) свободной локальной алгеброй ширины N и высоты q. Элементы $\varepsilon^A=t^A+\mathring{\mathbf{R}}[N]^{q+1}$ при $A=1,\ldots,N$ образуют псевдобазис в радикале $\mathring{\mathbf{R}}(N,q)$. Любой элемент $\alpha\in\mathbf{R}(N,q)$ может быть записан в виде

$$\alpha=\alpha_a\varepsilon^a \quad (0\leqslant|a|\leqslant q), \tag{2}$$

где $a=(a_1,\ldots,a_N)$ — мультииндекс, $\alpha_a\in\mathbf{R}$, $\varepsilon^a=(\varepsilon^1)^{a_1}\ldots(\varepsilon^N)^{a_N}$, $\varepsilon^0=1$ при $a=0=(0,\ldots,0)$, а по всей области изменения мультииндекса a, определяемой условием $0\leqslant|a|=a_1+\ldots+a_N\leqslant q$, предполагается суммирование по правилу Эйнштейна. Набор многочленов $\{\varepsilon^a\}$ при $0\leqslant|a|\leqslant q$ образует базис алгебры $\mathbf{R}(N,q)$. Линейное отображение $\Phi:\mathbf{R}(N,q)\to\mathbf{A}$, определенное соотношениями $\Phi(\alpha_a\varepsilon^a)=\alpha_a\tau^a$, является эпиморфизмом алгебр, поэтому $\mathbf{A}\simeq\mathbf{R}(N,q)/\ker\Phi$.

В дальнейшем предполагаем, что $\mathbf{A}$ — это конкретная факторалгебра $\mathbf{A}=\mathbf{R}(N,q)/Q$, где Q — некоторый идеал в $\mathbf{R}(N,q)$. Степени радикала $\mathrm{Rd}(\mathbf{A})=\mathring{\mathbf{A}}$ образуют цепочку идеалов

$$\mathbf{A}=\mathring{\mathbf{A}}^0\supset\mathring{\mathbf{A}}=\mathring{\mathbf{A}}^1\supset\mathring{\mathbf{A}}^2\supset\ldots\supset\mathring{\mathbf{A}}^q\supset\mathring{\mathbf{A}}^{q+1}=0. \tag{3}$$

В соответствии с этим в $\mathbf{A}$ можно выбрать базис $\{\tau^a\}$, $a\in J$, где J — некоторое множество мультииндексов, таким образом, чтобы набор $\{\tau^a\}$ при $a\in J$ и $|a|\geqslant p$ образовывал базис в $\mathring{\mathbf{A}}^p$. Предполагая, что $\tau^0=1\in\mathbf{A}$, произвольный элемент β алгебры $\mathbf{A}$ будем аналогично (2) записывать в виде

$$\beta=\beta_a\tau^a \quad (a\in J). \tag{4}$$

Базис $\{\tau^a\}$ в дальнейшем будет всегда предполагаться фиксированным, поэтому в выражениях вида (4) будем автоматически предполагать суммирование по области J. Последовательности идеалов (3) соответствует последовательность факторалгебр и естественных эпиморфизмов

$$\mathbf{A}=\mathbf{A}_{(q)}\xrightarrow{\pi^q_{q-1}}\mathbf{A}_{(q-1)}\xrightarrow{\pi^{q-1}_{q-2}}\ldots\xrightarrow{\pi^2_1}\mathbf{A}_{(1)}\xrightarrow{\pi^1_0}\mathbf{A}_{(0)}=\mathbf{R}, \tag{5}$$

где $\mathbf{A}_{(r)}=\mathbf{A}/\mathring{\mathbf{A}}^{r+1}$. Сквозной эпиморфизм будем обозначать $\pi^p_r:\mathbf{A}_{(p)}\to\mathbf{A}_{(r)}$ при $q\geqslant p\geqslant r\geqslant 0$. Базис $\{\tau^a\}$ в алгебре $\mathbf{A}=\mathbf{A}_{(q)}$ порождает базис $\{\tau^a+\mathring{\mathbf{A}}^{r+1}\}$ $(|a|\leqslant r)$ в факторалгебре $\mathbf{A}_{(r)}$. Этот базис для упрощения записи будем обозначать просто $\{\tau^a\}$ $(|a|\leqslant r)$.

Ограничение операции умножения $\mathbf{A}\times\mathbf{A}\to\mathbf{A}$ в алгебре $\mathbf{A}$ порождает действие $\mathbf{A}\times\mathring{\mathbf{A}}^r\to\mathring{\mathbf{A}}^r$ алгебры $\mathbf{A}$ на идеале $\mathring{\mathbf{A}}^r$ $(0\leqslant r\leqslant q)$, но поскольку при этом $\mathring{\mathbf{A}}^{q-r+1}\times\mathring{\mathbf{A}}^r\to 0$, то фактически умножение в $\mathbf{A}$ порождает действие

$$\mathbf{A}_{(q-r)}\times\mathring{\mathbf{A}}^r\to\mathring{\mathbf{A}}^r \tag{6}$$

факторалгебры $\mathbf{A}_{(q-r)}=\mathbf{A}/\mathring{\mathbf{A}}^{q-r+1}$ на идеале $\mathring{\mathbf{A}}^r$. В дальнейшем в записи это действие не будем отличать от умножения в $\mathbf{A}$.

Пусть $\mathbf{A}^n=\underbrace{\mathbf{A}\times\ldots\times\mathbf{A}}_{n}$ — $\mathbf{A}$-модуль строк длины n с элементами из алгебры $\mathbf{A}$. $\mathbf{A}^n$ — свободный модуль размерности n над алгеброй $\mathbf{A}$. Элементы

$$E_i=(\underset{1}{0},\ldots,\underset{i}{1},\ldots,\underset{n}{0})$$

при $i=1,\ldots,n$ составляют канонический $\mathbf{A}$-базис в $\mathbf{A}^n$. Произвольный элемент $X\in\mathbf{A}^n$ имеет вид $X=X^iE_i$, где $X^i\in\mathbf{A}$ — $\mathbf{A}$-координаты элемента X. Вещественный базис в $\mathbf{A}^n$ составляют элементы $\tau^aE_i=E_i{}^a$ $(i=1,\ldots,n;\ a\in J)$, при этом $X=X_a{}^iE_i{}^a$, где $X_a{}^i\tau^a=X^i$ (здесь подразумеваются все соглашения, оговоренные для формул (2) и (4)). Последовательность идеалов (3) порождает последовательность подмодулей

$$\mathbf{A}^n\supset(\mathring{\mathbf{A}})^n\supset(\mathring{\mathbf{A}}^2)^n\supset\ldots\supset(\mathring{\mathbf{A}}^q)^n\supset 0,$$

состоящих из строк длины n с элементами из соответствующего идеала. При этом действие (6) порождает действие

$$\mathbf{A}_{(q-r)}\times(\mathring{\mathbf{A}}^r)^n\to(\mathring{\mathbf{A}}^r)^n,$$

превращающее $(\mathring{\mathbf{A}}^r)^n$ в $\mathbf{A}_{(q-r)}$-модуль. Последовательность факторалгебр (5) порождает последовательность эпиморфизмов фактормодулей

$$\mathbf{A}^n=\mathbf{A}^n_{(q)}\xrightarrow{\pi^q_{q-1}}\mathbf{A}^n_{(q-1)}\xrightarrow{\pi^{q-1}_{q-2}}\ldots\xrightarrow{\pi^2_1}\mathbf{A}^n_{(1)}\xrightarrow{\pi^1_0}\mathbf{A}^n_{(0)}=\mathbf{R}^n. \tag{7}$$

При обозначении этих эпиморфизмов для упрощения записи используем те же символы, что и в последовательности (5). Аналогично $\pi^p_r=\pi^p_{p-1}\circ\ldots\circ\pi^{r+1}_r:\mathbf{A}^n_{(p)}\to\mathbf{A}^n_{(r)}$ при $q\geqslant p\geqslant r\geqslant 0$. Отметим также, что полупрямая сумма (1) определяет разложение $\mathbf{A}$-модуля $\mathbf{A}^n$ на прямую сумму линейных подпространств

$$\mathbf{A}^n=\mathbf{R}^n\dotplus(\mathring{\mathbf{A}})^n. \tag{8}$$

В соответствии с формулой (8) для $X\in\mathbf{A}^n$ получаем $X=x+\overset{\circ}{X}$, где $x\in\mathbf{R}^n$, а $\overset{\circ}{X}\in(\overset{\circ}{\mathbf{A}})^n$, при этом аналогичные соотношения получаются для координат: $X^i=x^i+\overset{\circ}{X}{}^i$, где $x^i=X^i_0$, $\overset{\circ}{X}{}^i=X^i_a\tau^a$ при условии $|a|>0$.

§ 2. А-ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ФУНКЦИИ

Поскольку все рассматривавшиеся в § 1 объекты — алгебры и модули — являются линейными пространствами, то на них имеются естественные структуры дифференцируемых многообразий, и можно говорить о дифференцируемых отображениях. Пусть $V\subset\mathbf{A}^n$ — область, а отображение

$$F: V\subset\mathbf{A}^n\to\mathbf{A} \tag{9}$$

является дифференцируемым. Это отображение называется ([7]) **A**-дифференцируемым (дифференцируемым над **A**, голоморфным), если касательное к нему отображение

$$T_XF: T_X\mathbf{A}^n\equiv\mathbf{A}^n\to T_{F(X)}\mathbf{A}\equiv\mathbf{A}$$

является **A**-линейным при всяком $X\in V$. Отображение (9) будем рассматривать также как **A**-значную функцию $Y=F(X^i)$ $(i=1,\ldots,n)$ от n переменных $X^1,\ldots,X^n$ из алгебры **A**, тогда **A**-дифференцируемость F эквивалентна тому, что $dY=\Phi_i dX^i$, где $\Phi_i\equiv\dfrac{\partial F}{\partial X^i}$ — частная производная функции $F(X^i)$ по переменной X^i. Будем говорить, что функция $Y=F(X^i)$ имеет класс дифференцируемости $C^s(\mathbf{A})$, где $s=1,\ldots,\infty$, если она обладает непрерывными частными производными над **A** до порядка s включительно. Для этого необходимо и достаточно, чтобы функция F была **A**-дифференцируемой и имела вещественный класс дифференцируемости C^s.

Определение 1. Функция $f: U\subset\mathbf{R}^n\to\mathbf{A}$, где U — некоторая область, называется C^{s-q}-регулярной $(s>q)$, если при $r=0,\ldots,q$ функция $\pi_r{}^q\circ f: U\to\mathbf{A}_{(r)}$ принадлежит классу дифференцируемости C^{s-r}.

Определение 2. **A**-дифференцируемая функция

$$F: (\pi_0{}^q)^{-1}(U)\subset\mathbf{A}^n\to\mathbf{A}$$

называется аналитическим продолжением функции $f: U\subset\mathbf{R}^n\to\mathbf{A}$, если ограничение F на U (согласно (8)) совпадает с f.

Имеет место следующая

Теорема 1 ([31]). Для C^{s-q}-регулярной функции f $(s>q)$ аналитическое продолжение существует, единственно, принадлежит классу дифференцируемости $C^{s-q}(\mathbf{A})$ и имеет вид

$$F(X^i)=\sum_{|p|=0}^{q}\frac{1}{p!}\frac{D^p\left(\pi^q_{q-|p|}\circ f\right)}{Dx^p}\overset{\circ}{X}{}^p, \tag{10}$$

где $p=(p_1,\ldots,p_n)$ — мультииндекс, $p!=p_1!\ldots p_n!$,

$$\frac{D^p g}{Dx^p}=\frac{\partial^{|p|}g}{(\partial x^1)^{p_1}\ldots(\partial x^n)^{p_n}};\quad \frac{D^0 f}{Dx^0}\equiv f;\quad \overset{\circ}{X}{}^p=(\overset{\circ}{X}{}^1)^{p_1}\ldots(\overset{\circ}{X}{}^n)^{p_n}.$$

Отметим, что C^s-дифференцируемость функции f влечет ее C^{s-q}-регулярность, а C^∞-дифференцируемость f влечет ее C^∞-регулярность и $C^\infty(\mathbf{A})$-дифференцируемость функции F. Из условий Шефферса ([7], [21]) $\mathbf{A}$-дифференцируемости функции вытекает следующее ([25], [27]): если $F:(\pi_0{}^q)^{-1}(U)\to\mathbf{A}$ — дифференцируемая над $\mathbf{A}$ функция класса $C^{s-q}(\mathbf{A})$, то функция $\pi_r{}^q\circ F$ не зависит от переменных $X_a{}^i$ при $|a|>r$, а порождаемая ею функция $F_{(r)}:(\pi_0{}^r)^{-1}(U)\to\mathbf{A}_{(r)}$ является $\mathbf{A}_{(r)}$-дифференцируемой класса $C^{s-r}(\mathbf{A}_{(r)})$. Отсюда, в частности, следует, что функция $f=F|_U$ является C^{s-q}-регулярной. Таким образом, всякая $\mathbf{A}$-дифференцируемая функция F в некоторой окрестности произвольной точки из своей области определения имеет вид (10).

В силу (1) вещественнозначные функции можно рассматривать как частный случай $\mathbf{A}$-значных. При этом C^s-дифференцируемая функция $f:U\subset\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ удовлетворяет условиям определения 1, поэтому, как следствие теоремы 1, получается

Теорема 2 ([28]). Аналитическое продолжение C^s-дифференцируемой функции $f:U\subset\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ в алгебру $\mathbf{A}$ существует, единственно, принадлежит классу дифференцируемости $C^{s-q}(\mathbf{A})$ и имеет вид

$$F(X^i)=\sum_{|p|=0}^{q}\frac{1}{p!}\frac{D^p f}{Dx^p}\overset{\circ}{X}{}^p. \tag{11}$$

Отметим некоторые свойства, которыми обладают аналитические продолжения.

1. Если функции F_1 и F_2 являются аналитическими продолжениями функций f_1 и f_2 соответственно, то аналитическим продолжением суммы функций f_1+f_2 будет являться сумма аналитических продолжений F_1+F_2, а аналитическим продолжением произведения функций $f_1\cdot f_2$ будет являться функция $F_1\cdot F_2$.

2. Если $F(X^i)$ — аналитическое продолжение функции $f(x^i)$, то функция $\frac{D^pF}{DX^p}$ является аналитическим продолжением функции $\frac{D^pf}{Dx^p}$ (здесь необходимо $s>q+|p|$).

3. Пусть $f_1:U_1\subset\mathbf{R}^n\to U_2\subset\mathbf{R}^k$ — C^s-дифференцируемое отображение, а $f_2:U_2\subset\mathbf{R}^k\to\mathbf{A}$ — C^{s-q}-регулярное отображение и

$F_1:(\pi_0^q)^{-1}(U_1)\subset\mathbf{A}^n\to(\pi_0^q)^{-1}(U_2)\subset\mathbf{A}^k$, $F_2:(\pi_0^q)^{-1}(U_2)\to\mathbf{A}$ — их аналитические продолжения, тогда композиция $F_2\circ F_1$ является аналитическим продолжением композиции $f_2\circ f_1$.

§ 3. РАССЛОЕНИЕ А-СТРУЙ

Пусть M_n — дифференцируемое класса C^s многообразие размерности n, $J_0^q(\mathbf{R}^N, M_n)$ — расслоенное многообразие q-струй дифференцируемых ростков вида $(\mathbf{R}^N, 0)\to M_n$, а $\pi_0^q: J_0^q(\mathbf{R}^N, M_n)\to\to M_n$ — проекция на базу. $J_0^q(\mathbf{R}^N, M_n)$ — дифференцируемое класса C^{s-q} многообразие размерности $nC_{N+q}^N=n(m+1)$. Отметим, что $J_0^q(\mathbf{R}^N, M_n)$ называют расслоением N^q-скоростей Эресмана (см. [35], [38], [40]). Рассмотрим некоторую координатную карту $h: U\subset M_n\to U'\subset\mathbf{R}^n$ на M_n. Гомеоморфизм h относит точке $x\in M_n$ набор $\{x^i=h^i(x)\}$ $(i=1,\ldots,n)$ ее координат. Карта (U, h) на M_n порождает карту $H:(\pi_0^q)^{-1}(U)\subset J_0^q(\mathbf{R}^N, M_n)\to\to U'\times\mathbf{R}^{mn}\subset\mathbf{R}^{(m+1)n}$ на $J_0^q(\mathbf{R}^N, M_n)$. Гомеоморфизм H относит q-струе $X=j_x^q f$ ростка $f:(\mathbf{R}^N, 0)\to(M_n, x)$ набор чисел $H(j_x^q f)=\{X_p^i\}$, где $X_p^i=\frac{1}{p!}\frac{D^p f^i}{Dt^p}\Big|_0$, $f^i=f^i(t^A)$ $(A=1,\ldots,N)$ — координатная запись ростка f в карте (U, h), $0\leqslant|p|\leqslant q$, $X_0^i\equiv x^i=f^i(0)$. Отнесем теперь этой q-струе $j_x^q f$ набор многочленов Тейлора степени q функций f^i, которые будем рассматривать как элементы алгебры $\mathbf{R}(N, q)$:

$$\mathcal{X}^i=X_p^i\varepsilon^p \quad (0\leqslant|p|\leqslant q), \tag{12}$$

тем самым определяется гомеоморфизм

$$h^{\mathbf{R}(N,q)}: U^{\mathbf{R}(N,q)}=(\pi_0^q)^{-1}(U)\to(\pi_0^q)^{-1}(U')\subset\mathbf{R}(N, q)^n, \tag{13}$$

задающий $\mathbf{R}(N, q)$-карту ([7]) на расслоении $J_0^q(\mathbf{R}^N, M_n)$. Имеет место следующая

Теорема 3 ([28], [29]). Если $\{U_\alpha, h_\alpha\}$ $(\alpha\in I)$ — атлас, определяющий на M_n структуру дифференцируемого класса C^s многообразия, то $\{U_\alpha^{\mathbf{R}(N,q)}, h_\alpha^{\mathbf{R}(N,q)}\}$ $(\alpha\in I)$ — $\mathbf{R}(N, q)$-атлас, определяющий на $J_0^q(\mathbf{R}^N, M_n)$ структуру n-мерного дифференцируемого многообразия над алгеброй $\mathbf{R}(N, q)$ (см. [7]) класса дифференцируемости $C^{s-q}(\mathbf{R}(N, q))$.

Доказательство ([28]). Отображения $H_\beta^{\mathbf{R}(N,q)}\circ(H_\alpha^{\mathbf{R}(N,q)})^{-1}$ оказываются аналитическими продолжениями отображений $h_\beta\circ(h_\alpha)^{-1}$.

Будем обозначать в дальнейшем расслоение $J_0^q(\mathbf{R}^N, M_n)$ следующим образом: $J^{\mathbf{R}(N,q)}M_n$. Отметим расслоения, получающиеся при некоторых значениях N и q.

1. $J^{\mathbf{R}(1,q)}M_n = T^qM_n$ — q-касательное расслоение. Как многообразие над алгеброй $\mathbf{R}(1, q) = \mathbf{R}(\varepsilon^q)$ плюральных чисел, T^qM_n изучалось А. П. Широковым [22], [24], Т. В. Капустиной [12]. Подробная библиография работ, посвященных геометрии касательных расслоений, имеется в обзорах [10], [23], [24], а также в монографии [7].

2. $J^{\mathbf{R}(N,1)}M_n \simeq \underbrace{TM_n \oplus \ldots \oplus TM_n}_{N}$ — N-кратная сумма Уитни касательных расслоений. Рассматривалась как многообразие над алгеброй $\mathbf{R}(N, 1)$ В. Г. Подольским [17], А. П. Широковым [24].

3. Расслоение H^qM_n q-реперов над многообразием M_n ([10]). H^qM_n является открытым подмногообразием в $J^{\mathbf{R}(n,q)}M_n$ и поэтому несет на себе структуру дифференцируемого класса $C^{s-q}(\mathbf{R}(n, q))$ многообразия над алгеброй $\mathbf{R}(n, q)$.

Рассмотрим далее два C^s-дифференцируемых ростка $f_1:(\mathbf{R}^N, 0) \to (M_n, x)$ и $f_2:(\mathbf{R}^N, 0) \to (M_n, x)$. Назовем их $\mathbf{A}$-эквивалентными, если $\mathbf{R}(N, q)$-координаты X_1^i и X_2^i их q-струй $X_1 = j_x^q f_1$ и $X_2 = j_x^q f_1$ (см. (12)) определяют один и тот же класс вычетов по модулю Q $(i = 1, \ldots, n)$, т. е. если $X_1^i \equiv \equiv X_2^i (\mathrm{mod}\, Q)$. Корректность этого определения обеспечивается свойствами $\mathbf{R}(N, q)$-цифференцируемых преобразований координат на $J^{\mathbf{R}(N,q)}M_n$ (см. [28]).

Определение 3. Класс $\mathbf{A}$-эквивалентности $j_x^{\mathbf{A}} f$ ростка $f:(\mathbf{R}^N, 0) \to (M_n, x)$ назовем $\mathbf{A}$-струей этого ростка.

Обозначим символом $J^{\mathbf{A}}M_n$ множество $\mathbf{A}$-струй C^s-дифференцируемых ростков $\{\mathbf{R}^N, 0) \to M_n$, а символом $\pi_0^q: J^{\mathbf{A}}M_n \to M_n$ — отображение, относящее $\mathbf{A}$-струе $j_x^{\mathbf{A}} f$ точку $x \in M_n$ (отметим, что для упрощения обозначений одним символом π_r^p мы обозначаем различные, но аналогичные отображения, см. (5), (7), (16)).

Теорема 4 ([28]). $J^{\mathbf{A}}M_n$ — расслоенное дифференцируемое многообразие класса дифференцируемости C^{s-q} над базой M_n со стандартным слоем $J_0^{\mathbf{A}}\mathbf{R}^n$ — многообразием $\mathbf{A}$-струй ростков $(\mathbf{R}^N, 0) \to (\mathbf{R}^n, 0)$. $J^{\mathbf{A}}M_n$ несет на себе структуру дифференцируемого класса $C^{s-q}(\mathbf{A})$ многообразия над алгеброй $\mathbf{A}$.

Доказательство. Факторизация $\mathbf{R}(N, q)$-координат (12) струи $j_x^{\mathbf{R}(N,q)} f$ ростка $f:(\mathbf{R}^N, 0) \to (M_n, x)$ по идеалу $Q \subset \mathbf{R}(N, q)$ относит $\mathbf{A}$-струе $X = j_x^{\mathbf{A}} f$ набор n элементов из алгебры $\mathbf{A}$

$$X^i = X_a^i \tau^a \quad (a \in J), \tag{14}$$

тем самым аналогично формуле (13) определяется гомеоморфизм

$$h^{\mathbf{A}}: U^{\mathbf{A}} = (\pi_0^q)^{-1}(U) \subset J^{\mathbf{A}}M_n \to (\pi_0^q)^{-1}(U') \subset \mathbf{A}^n.$$

Отображения $h_\beta^{\mathbf{A}}\circ(h_\alpha^{\mathbf{A}})^{-1}$ оказываются аналитическими продолжениями отображений $h_\beta\circ(h_\alpha)^{-1}$. Элементы $X^i\in\mathbf{A}$, определенные формулой (14), называются $\mathbf{A}$-координатами $\mathbf{A}$-струи X.

Отметим, что если многообразие M_n имеет класс дифференцируемости C^∞, то расслоение $\mathbf{A}$-струй $J^{\mathbf{A}}M_n$ эквивалентно расслоению $\mathbf{A}$-близких точек А. Вейля ([48], [7], [24]). $\mathbf{A}$-близкой точкой к точке $x\in M_n$ называется унитальный гомоморфизм

$$X: C^\infty(M_n)\to\mathbf{A} \tag{15}$$

алгебры $C^\infty(M_n)$ дифференцируемых класса C^∞ функций на M_n в алгебру $\mathbf{A}$, удовлетворяющий условию $\pi_0^q(X(g))=g(x)$, где $g\in C^\infty(M_n)$. Всякая $\mathbf{A}$-струя определяет некоторую $\mathbf{A}$-близкую точку. Действительно, если $j_x^{\mathbf{A}}f$ — $\mathbf{A}$-струя ростка $f:(\mathbf{R}^N, 0)\to\to(M_n, x)$, то соответствующая ей $\mathbf{A}$-близкая точка определяется соотношением $X(g)=j_x^{\mathbf{A}}(g\circ f)\in J^{\mathbf{A}}\mathbf{R}=\mathbf{A}$. Обратно, если задана $\mathbf{A}$-близкая точка (15), то, продолжая координатные функции h^i карты (U, h) на M_n до функций $\tilde{h}^i\in C^\infty(M_n)$ ([1]), можно отнести $\mathbf{A}$-близкой точке X набор элементов алгебры $\mathbf{A}$ ([24]) $X^i=\\=X(\tilde{h}^i)$, который определяет $\mathbf{A}$-струю $j_x^{\mathbf{A}}f$, имеющую в $\mathbf{A}$-карте $(U^{\mathbf{A}}, h^{\mathbf{A}})$ координаты X^i. Эта $\mathbf{A}$-струя определяет исходный гомоморфизм X, поскольку всякая функция $g\in C^\infty(M_n)$ в окрестности U точки x в карте (U, h) может быть записана в виде ([1], теорема 4.5)

$$g=\sum_{|p|=0}^{q}\frac{D^p g}{Dx^p}x^p+\sum_{|p|=q+1}g_p x^p,$$

где $g_p\in C^\infty(U)$. Если класс дифференцируемости M_n равен C^s при $q<s<\infty$, то пространства гомоморфизмов $C^s(M_n)\to\mathbf{A}$ будут бесконечномерными (см., например, [9], с. 17).

Аналогичные расслоения получаются в алгебраической геометрии при рассмотрении гомоморфизмов $\mathbf{K}[M]\to\mathbf{A}$, где M — алгебраическое многообразие над полем $\mathbf{K}$, $\mathbf{K}[M]$ — алгебра полиномиальных функций на M, а $\mathbf{A}$ — некоторая алгебра над $\mathbf{K}$ ([19], § 9).

Если в качестве алгебры $\mathbf{A}$ взять факторалгебру $\mathbf{R}(N, q)/Q$, где идеал Q порождается некоторым набором одночленов, то соответствующее расслоение $\mathbf{A}$-струй $J^{\mathbf{A}}M_n$ совпадает с расслоением обобщенных струй в смысле Тульчиева [46], [47].

Отметим также, что к многообразиям над алгеброй $\mathbf{R}(1, q)=\\=\mathbf{R}(\varepsilon^q)$ более общего вида (координатные гомеоморфизмы отображают области многообразия на области $\mathbf{R}(\varepsilon^q)$-модуля, не изоморфного $\mathbf{R}(\varepsilon^q)^n$) приводят полукасательные расслоения, изучавшиеся В. В. Вишневским и Т. А. Пантелеевой [4], [5], [16] и Т. В. Кирсановой [13].

Рассмотрим некоторые конструкции, возникающие в теории расслоений **A**-струй.

1. Теорема 5. Расслоенное произведение $J^{\mathbf{A}_1}M_n \times_{M_n} J^{\mathbf{A}_2}M_n$ изоморфно расслоению $J^{\mathbf{A}}M_n$ для $\mathbf{A}=\mathbf{R}+(\mathring{\mathbf{A}}_1 \oplus \mathring{\mathbf{A}}_2)$, где $\mathring{A}=\mathring{\mathbf{A}}_1 \oplus \mathring{\mathbf{A}}_2$ — прямая сумма нильпотентных алгебр $\mathring{\mathbf{A}}_1$ и $\mathring{\mathbf{A}}_2$.

Доказательство этого факта вытекает из теоремы 2. Класс дифференцируемости $J^{\mathbf{A}}M_n$ при этом равен C^{s-q}, где $q=\max(q_1, q_2)$, а q_1 и q_2 — высоты алгебр $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$ соответственно.

2. Свойства дифференцируемых функций над тензорным произведением алгебр ([6]) позволяют доказать следующую теорему ([30]).

Теорема 6. Расслоения $J^{\mathbf{A}_1}(J^{\mathbf{A}_2}M_n)$ и $J^{\mathbf{A}_2}(J^{\mathbf{A}_1}M_n)$, как расслоения над M_n, изоморфны расслоению $J^{\mathbf{A}_1 \otimes \mathbf{A}_2}M_n$.

Класс дифференцируемости $J^{\mathbf{A}_1 \otimes \mathbf{A}_2}M_n$ равен C^{s-q}, где $q=q_1+q_2$. Для расслоений **A**-близких точек теорема 6 доказана Вейлем [48], для обобщенных струй Тульчиева аналогичная теорема доказана в работе [47].

3. Пусть $\psi:\mathbf{A}_1 \to \mathbf{A}_2$ — унитальный гомоморфизм локальных алгебр. Относя $\mathbf{A}_1$-струе $X_1 \in J^{\mathbf{A}_1}M_n$ с $\mathbf{A}_1$-координатами $\{X_1^i\}$ в $\mathbf{A}_1$-карте $(U^{\mathbf{A}_1}, h^{\mathbf{A}_1})$ $\mathbf{A}_2$-струю $X_2 \in J^{\mathbf{A}_2}M_n$, имеющую в $\mathbf{A}_2$-карте $(U^{\mathbf{A}_2}, h^{\mathbf{A}_2})$ $\mathbf{A}_2$-координаты $X_2^i=\psi(X_1^i)$, получим ([30]) корректно определенное отображение $\Psi: J^{\mathbf{A}_1}M_n \to J^{\mathbf{A}_2}M_n$ класса дифференцируемости C^{s-q}, где $q=\max(q_1, q_2)$. Это отображение обладает следующими свойствами:

а) $\Psi(J^{\mathbf{A}_1}M_n)$ — подмногообразие в $J^{\mathbf{A}_2}M_n$, которое C^{s-q}-диффеоморфно расслоению $J^{\psi(\mathbf{A}_1)}M_n$, где $\psi(\mathbf{A}_1) \subset \mathbf{A}_2$ — подалгебра.

б) Если ψ — мономорфизм, то $\psi(\mathbf{A}_1) \subset \mathbf{A}_2$ — подалгебра, изоморфная $\mathbf{A}_1$, поэтому $\Psi: J^{\mathbf{A}_1}M_n \to J^{\mathbf{A}_2}M_n$ в этом случае является вложением. Этот факт можно проиллюстрировать вложениями друг в друга касательных расслоений различных порядков. Если T^qM_n — q-касательное расслоение, рассматривающееся как расслоение $\mathbf{R}(\varepsilon^q)$-струй, то по теореме 6 многократное касательное расслоение $T^{r_1}(T^{r_2}(\dots T^{r_N}M_n\dots))$ можно рассматривать как расслоение **A**-струй для алгебры

$$\mathbf{A}=\mathbf{R}(\varepsilon_1^{r_1}) \otimes \mathbf{R}(\varepsilon_2^{r_2}) \otimes \dots \otimes \mathbf{R}(\varepsilon_N^{r_N}).$$

При $r_1+r_2+\dots+r_N=q$ определим унитальный мономорфизм

$$\psi:\mathbf{R}(\varepsilon^q) \to \mathbf{R}(\varepsilon_1^{r_1}) \otimes \mathbf{R}(\varepsilon_2^{r_2}) \otimes \dots \otimes \mathbf{R}(\varepsilon_N^{r_N}),$$

задавая образ элемента ε, составляющего псевдобазис в $\mathring{\mathbf{R}}(\varepsilon^q)$: $\psi(\varepsilon)=a^1\varepsilon_1+\dots+a^N\varepsilon_N+\sigma$, где $a^1, \dots, a^N \in \mathbf{R}$, $\sigma \in \mathring{\mathbf{A}}^2$, $a^1 \cdot a^2 \cdot \dots$

$\ldots\cdot a^N\neq 0$. Всякий такой мономорфизм определяет вложение

$$\Psi : T^q M_n \to T^{r_1} T^{r_2} \ldots T^{r_N} M_n.$$

Если $N=q$ и $r_1=r_2=\ldots=r_N=1$, то при этом получается вложение q-касательного расслоения $T^q M_n$ в касательное расслоение порядка q: $\underbrace{TT\ldots T}_{q} M_n=(T)^q M_n$. В частности, при $a^1=\ldots=a^N=1$ и $\sigma=0$ получается вложение, которое отмечал М. О. Рахула [18]. При $N=2$, $r_1=1$, $r_2=q-1$ получается вложение $\Psi : T^q M_n \to TT^{q-1} M_n$. В частности, при $\psi(\varepsilon)=\varepsilon_1+\varepsilon_2$ получается вложение, использовавшееся Бауманом [33] и К. М. Егиазаряном [11].

Отметим еще вложение $TH^1 M_n \to H^1 TM_n$, рассматривавшееся Моримото [39]. Это вложение является ограничением вложения $TJ^{\mathbf{R}(n,1)} M_n \to J^{\mathbf{R}(2n,1)} TM_n$ и порождается мономорфизмом $\psi : \mathbf{R}(\varepsilon)\otimes \otimes\mathbf{R}(n,1) \to \mathbf{R}(2n,1)\otimes\mathbf{R}(\varepsilon)$, определенным в базисах $\{1, \varepsilon^j; \varepsilon; \varepsilon\otimes\varepsilon^j\}$ и $\{1, \varepsilon; \tau^j; \sigma^j; \varepsilon\otimes\tau^j, \varepsilon\otimes\sigma^j\}$ (здесь j — номер элемента базиса, пробегающий значения от 1 до n, а не степень элемента ε) соотношениями $\psi(\varepsilon)=\varepsilon$, $\psi(\varepsilon^j)=\tau^j+\sigma^j\otimes\varepsilon$.

в) Если ψ — эпиморфизм, то $\mathbf{A}_2\cong\mathbf{A}_1/\ker\psi$. В этом случае субмерсия $\Psi : J^{\mathbf{A}_1} M_n \to J^{\mathbf{A}_2} M_n$ расслаивает $J^{\mathbf{A}_1} M_n$ над $J^{\mathbf{A}_2} M_n$. Слоями этого расслоения Ψ являются подмногообразия в $J^{\mathbf{A}_1} M_n$, порожденные идеалом $\ker\psi$ (см. [26]). Примером здесь может служить канонический эпиморфизм $\mathbf{R}(N, q)\to\mathbf{A}$, расслаивающий $J^{\mathbf{R}(N,q)} M_n$ над $J^{\mathbf{A}} M_n$. Последовательность эпиморфизмов (5) индуцирует последовательность расслоений

$$J^{\mathbf{A}} M_n \xrightarrow{\pi^q_{q-1}} J^{\mathbf{A}(q-1)} M_n \xrightarrow{\pi^{q-1}_{q-2}} \ldots \xrightarrow{\pi_1^2} J^{\mathbf{A}(1)} M_n \xrightarrow{\pi_0^1} M_n, \tag{16}$$

$$\pi^p_r=\pi^p_{p-1}\circ\ldots\circ\pi^{r+1}_r : J^{\mathbf{A}(p)} M_n \to J^{\mathbf{A}(r)} M_n.$$

Если ψ — изоморфизм, то Ψ — диффеоморфизм. Примером здесь является диффеоморфизм расслоений $J^{\mathbf{A}_1} J^{\mathbf{A}_2} M_n$ и $J^{\mathbf{A}_2} J^{\mathbf{A}_1} M_n$, рассматривавшихся в теореме 6. В частности, инволютивный автоморфизм алгебры $\mathbf{R}(\varepsilon_1)\otimes\mathbf{R}(\varepsilon_2)$, определенный соотношениями $\psi(\varepsilon_1)=\varepsilon_2$; $\psi(\varepsilon_2)=\varepsilon_1$, индуцирует известный инволютивный диффеоморфизм второго касательного расслоения $\Psi : TTM_n \to TTM_n$ ([8]).

Отображение $\Psi : J^{\mathbf{A}_1} M_n \to J^{\mathbf{A}_2} M_n$, порождаемое гомоморфизмом $\psi : \mathbf{A}_1 \to \mathbf{A}_2$, может быть задано еще следующим образом ([30]): $\Psi(j^{\mathbf{A}_1} f)=j^{\mathbf{A}_2}(f\circ\hat{\psi})$, где $\hat{\psi} : (\mathbf{R}^{N_2}, 0)\to(\mathbf{R}^{N_1}, 0)$ — некоторый росток (здесь N_1 — ширина алгебры $\mathbf{A}_1$, а N_2 — ширина алгебры $\mathbf{A}_2$). Для расслоений $\mathbf{A}$-близких точек отображение Ψ записывается наиболее просто: если $X : C^\infty(M_n)\to\mathbf{A}_1$ есть $\mathbf{A}_1$-близкая точка к $x\in M_n$, то $\Psi(X)=\psi\circ X : C^\infty(M_n)\to\mathbf{A}_2$.

4. Пусть M_n и V_k — дифференцируемые класса C^s много-

образия, тогда расслоение $J^{\mathbf{A}}(M_n \times V_k)$ естественно отождествляется с $J^{\mathbf{A}}M_n \times J^{\mathbf{A}}V_k$ ([43]).

5. Расслоения полуструй ([31], [32]). Как обобщение определения 1 имеет место

Определение 4. Пусть V_k и M_n — дифференцируемые класса C^s многообразия. C^{s-q}-дифференцируемое отображение $\Phi: V_k \to J^{\mathbf{A}}M_n$ называется C^{s-q}-регулярным, если при $r=0, \ldots, q$ отображение $\pi^q_r \circ \Phi$ является дифференцируемым класса C^{s-r}.

Пусть теперь $\mathbf{A}_1$ — алгебра ширины N_1 и высоты q_1, а $\mathbf{A}_2$ — алгебра ширины N_2 и высоты q_2. На множестве C^{s-q_1}-регулярных ростков вида $g: (\mathbf{R}^{N_2}, 0) \to J^{\mathbf{A}_1}M_n$ введем отношение эквивалентности: $g_1 \sim g_2$, если при $p=0, \ldots, q_1$ выполняется

$$j^{\mathbf{A}_{2(p)}}(\pi^{q_1}_{q_1-p} \circ g_1) = j^{\mathbf{A}_{2(p)}}(\pi^{q_1}_{q_1-p} \circ g_2). \tag{17}$$

Определение 5. Класс эквивалентности ростка g по введенному отношению эквивалентности называется $\mathbf{A}_2$-полуструей и обозначается символом $\hat{j}^{\mathbf{A}_2}g$.

Обозначим множество всех $\mathbf{A}_2$-полуструй C^{s-q_1}-регулярных ростков $(\mathbf{R}^{N_2}, 0) \to J^{\mathbf{A}_1}M_n$ символом $\hat{J}^{\mathbf{A}_2}J^{\mathbf{A}_1}M_n$. При этом условия (17) показывают, что можно считать, что высота алгебры $\mathbf{A}_2$ не превосходит q_1.

Теорема 7. $\hat{J}^{\mathbf{A}_2}J^{\mathbf{A}_1}M_n$ несет на себе структуру дифференцируемого класса C^{s-q_1} расслоенного многообразия над M_n, естественно диффеоморфного расслоению $J^{\mathbf{A}_2 \hat{\otimes} \mathbf{A}_1}M_n$, где $\mathbf{A}_2 \hat{\otimes} \mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2 \otimes \mathbf{A}_1 / \mathrm{Rd}(\mathbf{A}_2 \otimes \mathbf{A}_1)^{q_1+1}$.

Применение этих расслоений будет указано в § 5.

6. Расслоения неголономных струй. Метод Эресмана построения неголономных продолжений ([37], [38]) можно применить к расслоениям струй, определяемым локальными алгебрами. Рассмотрим набор $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_k$ локальных алгебр одинаковой ширины N. Каждую алгебру $\mathbf{A}_u$ считаем заданной как конкретная фактор-алгебра $\mathbf{A}_u = \mathbf{R}(N, r)/Q_u$, где $r = \max q_u$. Предполагаем, что многообразие M_n имеет класс дифференцируемости C^s при $s > kr$. Многообразие $J^r(\mathbf{R}^N, M_n)$ r-струй C^s-дифференцируемых ростков $\mathbf{R}^N \to M_n$ как расслоение над $\mathbf{R}^N$ диффеоморфно произведению $\mathbf{R}^N \times J^{\mathbf{R}(N,r)}M_n$ ([36]); переходя здесь к $\mathbf{A}_1$-струям, получаем $J^{\mathbf{A}_1}(\mathbf{R}^N, M_n) \cong \mathbf{R}^N \times J^{\mathbf{A}_1}M_n$ (см. [32]). Многообразие $\mathbf{A}_2$-струй C^{s-r}-дифференцируемых ростков сечений $\mathbf{R}^N \to J^{\mathbf{A}_1}(\mathbf{R}^N, M_n)$ тогда диффеоморфно произведению $\mathbf{R}^N \times J^{\mathbf{A}_1 \otimes \mathbf{A}_2}M_n$, а расслоение $\mathbf{A}_2$-струй ростков сечений $(\mathbf{R}^N, 0) \to J^{\mathbf{A}_1}(\mathbf{R}^N, M_n)$ диффеоморфно расслоению $J^{\mathbf{A}_1 \otimes \mathbf{A}_2}M_n$. Далее рекуррентно определяется, как неголономное продолжение многообразия M_n, расслоение $\mathbf{A}_v$-струй

$C^{s-(v-1)r}$-дифференцируемых ростков сечений $(\mathbf{R}^N, 0)\to\to J^{\tilde{\mathbf{A}}_{v-1}}(\mathbf{R}^N, M_n)$, где $\tilde{\mathbf{A}}_{v-1}=\mathbf{A}_1\otimes\ldots\otimes\mathbf{A}_{v-1}$. Это расслоение диффеоморфно $J^{\tilde{\mathbf{A}}_v}M_n$ при $v=1,\ldots,k$, где $\tilde{\mathbf{A}}_v=\mathbf{A}_1\otimes\ldots\otimes\mathbf{A}_v$. Последовательность эпиморфизмов алгебр

$$\tilde{\mathbf{A}}_k\xrightarrow{\rho^k_{k-1}}\tilde{\mathbf{A}}_{k-1}\xrightarrow{\rho^{k-1}_{k-2}}\ldots\xrightarrow{\rho^3_2}\tilde{\mathbf{A}}_2\xrightarrow{\rho^2_1}\tilde{\mathbf{A}}_1=\mathbf{A}_1\xrightarrow{\rho^1_0}\mathbf{R},$$

где $\rho^v_{v-1}:\tilde{\mathbf{A}}_v\to\tilde{\mathbf{A}}_{v-1}$ — факторизация по идеалу $\tilde{\mathbf{A}}_{v-1}\otimes\mathring{\mathbf{A}}_v$, соответствует последовательности естественных проекций расслоений

$$J^{\tilde{\mathbf{A}}_k}M_n\xrightarrow{\rho^k_{k-1}}J^{\tilde{\mathbf{A}}_{k-1}}M_n\xrightarrow{\rho^{k-1}_{k-2}}\ldots\xrightarrow{\rho^2_1}J^{\mathbf{A}_1}M_n\xrightarrow{\rho^1_0}M_n.$$

Положим, в частности, $\tilde{\mathbf{R}}(N, q)=\underbrace{\mathbf{R}(N, 1)\otimes\ldots\otimes\mathbf{R}(N, 1)}_{q}$, тогда имеет место

Теорема 8. Расслоение $\tilde{T}^q_N M_n$ неголономных N^q-скоростей Эресмана ([37], [38]) естественно диффеоморфно расслоению $J^{\tilde{\mathbf{R}}(N,q)}M_n$.

Если росток сечения $f:(\mathbf{R}^N, t_0)\to\mathbf{R}^N\times J^{\mathbf{A}_1}M_n$ порождается ростком $g:(\mathbf{R}^N, t_0)\to M_n$, то имеет место соотношение

$$j_t^{\mathbf{A}_1}(\rho^1_0\circ f')=j_t^{\mathbf{A}_1}g'=f'(t), \qquad (18)$$

где g' — локальное отображение, представляющее росток g, а f' — порождаемое им локальное сечение, выполняющееся при всех t из области определения g'. Это условие (18) выделяет в расслоении $J^{\tilde{\mathbf{A}}_2}M_n$ подрасслоение, соответствующее подалгебре $\hat{\mathbf{A}}_2\subset\tilde{\mathbf{A}}_2$, порождаемой набором элементов $\{1, \tau^A_1+\tau^A_2\}$ $(A=1,\ldots,N)$, где $\{\tau^A_1\}$ и $\{\tau^A_2\}$ — псевдобазисы соответственно в $\mathring{\mathbf{A}}_1$ и $\mathring{\mathbf{A}}_2$. Наложение далее условия голономности

$$j_t^{\mathbf{A}_v}(\rho^v_{v-1}\circ f')\equiv f'(t) \qquad (19)$$

на ростки сечений $f:(\mathbf{R}^N, t_0)\to\mathbf{R}^N\times J^{\hat{\mathbf{A}}_{v-1}}M_n$ рекуррентно определяет голономное продолжение $J^{\hat{\mathbf{A}}_v}M_n$ $(v=2,\ldots,k)$. Алгебра $\hat{\mathbf{A}}_k$ при этом является подалгеброй в $\tilde{\mathbf{A}}_k$, порождаемой набором элементов $\left\{1, \sum_{u=1}^{k}\tau^A_u\right\}$, где $\{\tau^A_u\}$ — псевдобазис в $\mathring{\mathbf{A}}_u$, соответствующий естественному псевдобазису алгебры $\mathbf{R}(N, r)$ ([32]).

Ослабление условия (19), а именно, требование его выполнения только при $t=0$, рекуррентно определяет полуголономное продолжение $J^{\bar{\mathbf{A}}_v}M_n$, как расслоение $\mathbf{A}_v$-струй ростков сечений

$f:(\mathbf{R}^N, 0)\to \mathbf{R}^N\times J^{\overline{\mathbf{A}}_{v-1}}M_n$, удовлетворяющих условию полуголономности

$$j_0^{\mathbf{A}_v}(\rho_{v-1}^v\circ f)=f(0).$$

Расслоение $J^{\overline{\mathbf{A}}_k}M_n\subset J^{\tilde{\mathbf{A}}_k}M_n$ соответствует подалгебре $\overline{\mathbf{A}}_k\subset\tilde{\mathbf{A}}_k$, порождаемой набором элементов $\{1, \tau^{A_1}, \tau^{A_1A_2}, \dots, \tau^{A_1\dots A_k}\}$, где $A_1,\dots, A_k=1,\dots, N$ и

$$\tau^{A_1\dots A_v}=\sum_{1\leqslant u_1<\dots<u_v\leqslant k}\tau_{u_1}^{A_1}\otimes\dots\otimes\tau_{u_v}^{A_v},$$

в частности, для $\overline{\mathbf{R}}(N, q)\subset\tilde{\mathbf{R}}(N, q)$ имеет место ([32])

Теорема 9. Расслоение $\overline{T}_N^q M_n$ полуголономных N^q-скоростей естественно диффеоморфно расслоению $J^{\overline{\mathbf{R}}(N,q)}M_n$.

§ 4. АНАЛИТИЧЕСКИЕ ПРОДОЛЖЕНИЯ ОТОБРАЖЕНИЙ

Пусть V_k и M_n — дифференцируемые класса C^s многообразия, а $\varphi:M_n\to V_k$ — C^s-дифференцируемое отображение. Отображение φ порождает C^{s-q}-дифференцируемое отображение $\varphi^{\mathbf{A}}:J^{\mathbf{A}}M_n\to J^{\mathbf{A}}V_k$, определенное соотношением $\varphi^{\mathbf{A}}(j^{\mathbf{A}}f)=j^{\mathbf{A}}(\varphi\circ f)$, где $f:(\mathbf{R}^N, 0)\to M_n$ — C^s-дифференцируемый росток.

Теорема 10. $\varphi^{\mathbf{A}}$ есть $\mathbf{A}$-дифференцируемое отображение класса $C^{s-q}(\mathbf{A})$. Причем, если в картах (U, h) на M_n и (U^*, h^*) на V_k таких, что $\varphi(U)\subset U^*$, отображение $h^*\circ\varphi\circ h^{-1}$ задается функциями $y^j=\varphi^j(x^i)$ $(j=1,\dots, k;\ i=1,\dots, n)$, то отображение $h^{*\mathbf{A}}\circ\varphi^{\mathbf{A}}\circ(h^{\mathbf{A}})^{-1}$ задается функциями $Y^j=\Phi^j(X^i)$, являющимися аналитическими продолжениями функций $y^j=\varphi^j(x^i)$ (см. (11)).

Отображение $\varphi^{\mathbf{A}}$ называется аналитическим продолжением φ в алгебру $\mathbf{A}$. Очевидно, аналитическое продолжение $(\varphi\circ\psi)^{\mathbf{A}}$ композиции отображений совпадает с композицией $\varphi^{\mathbf{A}}\circ\psi^{\mathbf{A}}$ аналитических продолжений, а аналитическое продолжение тождественного отображения $\mathrm{id}:M_n\to M_n$ является тождественным отображением $\mathrm{id}^{\mathbf{A}}:J^{\mathbf{A}}M_n\to J^{\mathbf{A}}M_n$.

Аналитические продолжения позволяют легко получать поднятия различных структур с многообразия на расслоение $\mathbf{A}$-струй. Отметим некоторые важные случаи.

1. Продолжения линейных пространств. Если продолжить аналитически отображения $\lambda:\mathbf{R}\times\mathbf{R}\ni(x, y)\to x+y\in\mathbf{R}$ и $\mu:\mathbf{R}\times\mathbf{R}\ni(x, y)\to xy\in\mathbf{R}$, задающие операции сложения и умножения вещественных чисел, то получатся отображения $\lambda^{\mathbf{A}}:J^{\mathbf{A}}\mathbf{R}\times\times J^{\mathbf{A}}\mathbf{R}\ni(X, Y)\to X+Y\in J^{\mathbf{A}}\mathbf{R}$ и $\mu^{\mathbf{A}}:J^{\mathbf{A}}\mathbf{R}\times J^{\mathbf{A}}\mathbf{R}\ni(X, Y)\to XY\in J^{\mathbf{A}}\mathbf{R}$, определяющие на на $J^{\mathbf{A}}\mathbf{R}$ структуру алгебры $\mathbf{A}$. Аналогично рассмотрим отображения $\lambda:L_n\times L_n\to L_n$ и $\mu:\mathbf{R}\times L_n\to L_n$, задаю-

щие на вещественном n-мерном линейном пространстве L_n операции сложения и умножения на число. Продолжения этих отображений $\lambda^{\mathbf{A}}: J^{\mathbf{A}}L_n \times J^{\mathbf{A}}L_n \to J^{\mathbf{A}}L_n$ и $\mu^{\mathbf{A}}: \mathbf{A} \times J^{\mathbf{A}}L_n \to J^{\mathbf{A}}L_n$ определяют на $J^{\mathbf{A}}L_n$ структуру свободного модуля над $\mathbf{A}$ размерности n над $\mathbf{A}$. Выполнение аксиом $\mathbf{A}$-модуля на $J^{\mathbf{A}}L_n$ при этом получается как следствие аксиом линейного пространства. Например, чтобы показать, что $A(X+Y) = AX + AY$ при $A \in \mathbf{A}$, $X, Y \in J^{\mathbf{A}}L_n$, нужно продолжить аналитически тождественно совпадающие отображения $\mathbf{R} \times L_n \times L_n \ni (a, x, y) \to a(x+y) \in L_n$ и $\mathbf{R} \times \times L_n \times L_n \ni (a, x, y) \to ax + ay \in L_n$ и воспользоваться теоремой 10 и свойствами аналитических продолжений из § 2. Отметим, что наличие структуры $\mathbf{A}$-модуля на расслоении $\mathbf{A}$-близких точек $J^{\mathbf{A}}L_n$ отмечалось в работах [43], [45], [50].

2. Лифты сечений расслоений. Если $\pi: M_n \to V_k$ — локально тривиальное расслоение со слоем F, то аналитическое продолжение $\pi^{\mathbf{A}}$: $J^{\mathbf{A}}M_n \to J^{\mathbf{A}}V_k$ является локально тривиальным расслоением со слоем $J^{\mathbf{A}}F$. При этом аналитическое продолжение C^s-дифференцируемого сечения σ: $V_k \to M_n$ является $\mathbf{A}$-дифференцируемым сечением $\sigma^{\mathbf{A}}: J^{\mathbf{A}}V_k \to J^{\mathbf{A}}M_n$ расслоения $\pi^{\mathbf{A}}$. Сечение $\sigma^{\mathbf{A}}$ называется $\mathbf{A}$-лифтом ($\mathbf{A}$-продолжением) сечения σ. В применении к расслоению $\mathbf{A}_2$-струй $\pi_0^{q_2}$: $J^{\mathbf{A}_2}M_n \to M_n$ рассмотрим аналитическое продолжение сечения σ: $M_n \to J^{\mathbf{A}_2}M_n$ в алгебру $\mathbf{A}_1$ (предполагаем, что $s > q_1 + q_2$, где q_1 и q_2 — высоты алгебр $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$ соответственно). Учитывая теорему 6, получаем сечение $\sigma^{\mathbf{A}_1}$: $J^{\mathbf{A}_1}M_n \to \to J^{\mathbf{A}_1}J^{\mathbf{A}_2}M_n \simeq J^{\mathbf{A}_2}J^{\mathbf{A}_1}M_n$. Тем самым C^{s-q_2}-дифференцируемому полю $\mathbf{A}_2$-струй на M_n относится $C^{s-q_1-q_2}$-дифференцируемое поле $\mathbf{A}_2$-струй на $J^{\mathbf{A}_1}M_n$. В частности, если $\mathbf{A}_2 = \mathbf{R}(1, 1) = \mathbf{R}(\varepsilon)$ алгебра дуальных чисел, таким образом получаются лифты векторных полей как сечений касательного расслоения (см. [24]). Лифты тензорных полей с многообразия M_n на расслоение $J^{\mathbf{A}}M_n$ можно получать как реализации ([15]) $\mathbf{A}$-лифтов — полей $\mathbf{A}$-тензоров ([24], [30]). Для расслоений $\mathbf{A}$-близких точек лифты векторных и тензорных полей исследовались в работах Моримото [43], Баумана [34], Окасса [44], Паттерсона [45].

3. Продолжения групп Ли и главных расслоений. Пусть G — группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Аналитическое продолжение в алгебру $\mathbf{A}$ отображений $G \times G \to G$ и $G \to G$, задающих операции умножения и взятия обратного элемента в G, определяют на $J^{\mathbf{A}}G$ структуру группы Ли над алгеброй $\mathbf{A}$, алгебра Ли которой $J^{\mathbf{A}}\mathfrak{g}$ является алгеброй Ли над алгеброй $\mathbf{A}$, изоморфной $\mathbf{A} \otimes \mathfrak{g}$ (см. [48], [43], [30]). При этом $\mathbf{A}$-базис алгебры Ли $J^{\mathbf{A}}\mathfrak{g}$ будут составлять $\mathbf{A}$-лифты левоинвариантных векторных полей на G, образующих базис $\mathfrak{g}$. Аналитическое продолжение главного расслоения $P(M_n, G)$ приводит к главному $\mathbf{A}$-дифференцируемому расслоению $J^{\mathbf{A}}P(J^{\mathbf{A}}M_n, J^{\mathbf{A}}G)$. Если Γ — связность в $P(M_n, G)$ с формой связности ω: $TP \to \mathfrak{g}$, то аналитическое

продолжение отображения ω в алгебру **A** приводит к форме $\omega^{\mathbf{A}}$: $TJ^{\mathbf{A}}P \simeq J^{\mathbf{A}}TP \to J^{\mathbf{A}}\mathfrak{g}$ на расслоении $J^{\mathbf{A}}P$, определяющей связность $\Gamma^{\mathbf{A}}$, называемую **A**-лифтом (**A**-продолжением) связности Г. С этой точки зрения лифты связностей на расслоения N^q-скоростей Эресмана изучал Голлек в работе [38]. Линейность формы ω_x: $T_xP \to \mathfrak{g}$ при $x \in M_n$ влечет **A**-линейность формы $\omega_X^{\mathbf{A}}$: $T_XJ^{\mathbf{A}}P \to J^{\mathbf{A}}\mathfrak{g}$ при $X \in J^{\mathbf{A}}M_n$. Отметим также, что соотношения, которым должно удовлетворять отображение $\omega^{\mathbf{A}}$, чтобы быть формой связности ([14]), получаются при аналитическом продолжении в алгебру **A** соответствующих соотношений для отображения ω. **A**-лифтом линейной связности ∇, заданной на многообразии M_n, является **A**-линейная связность $\nabla^{\mathbf{A}}$ на $J^{\mathbf{A}}M_n$. Коэффициентами связности $\nabla^{\mathbf{A}}$ являются аналитические продолжения коэффициентов связности ∇ ([24]). **A**-лифты связностей, заданных в векторных расслоениях, получаемые **A**-продолжениями отображения связности ([9]), изучал Паттерсон [45].

4. Лифты G-структур. Пусть $G \subset L_n^r$ — замкнутая подгруппа Ли. G-структурой порядка r на многообразии M_n называют вложение ι: $P \to H^rM_n$ некоторого главного расслоения $P(M_n, G)$ в расслоение H^rM_n r-реперов, индуцирующее тождественное преобразование M_n. Это вложение ι называют редукцией структурной группы L_n^r расслоения H^rM_n к подгруппе G ([10], [14]). Аналитическое продолжение отображения ι в алгебру **A** приводит к вложению $\iota^{\mathbf{A}}$: $J^{\mathbf{A}}P \to J^{\mathbf{A}}\,H^rM_n$ главного расслоения $J^{\mathbf{A}}P$ в главное расслоение $J^{\mathbf{A}}H^rM_n$ над многообразием $J^{\mathbf{A}}M_n$ со структурной группой $J^{\mathbf{A}}L_n^r$. Группу $J^{\mathbf{A}}L_n^r$ и главное расслоение $J^{\mathbf{A}}H^rM_n$ отождествим соответственно с группой r-струй **A**-дифференцируемых обратимых ростков вида g: $(\mathbf{A}^n, 0) \to (\mathbf{A}^n, 0)$ и расслоением r-реперов над алгеброй **A** над многообразием $J^{\mathbf{A}}M_n$, т. е. расслоением r-струй **A**-дифференцируемых обратимых ростков вида f: $(\mathbf{A}^n, 0) \to J^{\mathbf{A}}M_n$ (отождествляем точки, имеющие в **A**-картах, индуцированных одной и той же картой на M_n, одинаковые координаты). Выбор базиса $\{\tau^a\}$ в алгебре **A** (см. § I) индуцирует линейный изоморфизм θ: $\mathbf{A}^n \to \mathbf{R}^{(m+1)n}$, где $m+1 = \dim \mathbf{A}$. Ростку g тогда соответствует обратимый росток $\theta \circ g \circ \theta^{-1}$: $(\mathbf{R}^{(m+1)n}, 0) \to (\mathbf{R}^{(m+1)n}, 0)$. Относя r-струе над **A** ростка g r-струю ростка $\theta \circ g \circ \theta^{-1}$, получим вложение Φ: $J^{\mathbf{A}}L_n^r \to L^r_{(m+1)n}$. Аналогично, относя r-струе над **A** обратимого **A**-дифференцируемого ростка f r-струю ростка $f \circ \theta^{-1}$, получим редукцию

$$\Phi\colon J^{\mathbf{A}}H^rM_n \to H^rJ^{\mathbf{A}}M_n \qquad (20)$$

расслоения $H^rJ^{\mathbf{A}}M_n$ к подгруппе $J^{\mathbf{A}}L_n^r$. Структура, определяемая редукцией (20) на многообразии $J^{\mathbf{A}}M_n$, — это структура многообразия над алгеброй **A** ([21]).

Композиция $\Phi \circ \iota^{\mathbf{A}}$: $J^{\mathbf{A}}P \to H^rJ^{\mathbf{A}}M_n$ определит редукцию структурной группы $L^r_{(m+1)n}$ расслоения $H^rJ^{\mathbf{A}}M_n$ к подгруппе $J^{\mathbf{A}}G$, задавая тем самым $J^{\mathbf{A}}G$-структуру на многообразии $J^{\mathbf{A}}M_n$.

называемую $\mathbf{A}$-лифтом ($\mathbf{A}$-продолжением) G-структуры ι. Если G-структура интегрируема, то интегрируем и ее $\mathbf{A}$-лифт. Лифты G-структур первого порядка на касательные расслоения исследовались Моримото [39], Юэном результаты Моримото были распространены на расслоения N^q-скоростей [49] и $\mathbf{A}$-близких точек [50].

5. Продолжения C^{s-q}-регулярных отображений. Пусть V_k и M_n — дифференцируемые класса C^s многообразия. Имеет место следующее обобщение теоремы 1.

Теорема 11 ([31]). C^{s-q}-регулярное отображение $\varphi: V_k \to J^{\mathbf{A}} M_n$ единственным образом продолжается до $\mathbf{A}$-дифференцируемого класса $C^{s-q}(\mathbf{A})$ отображения $\Phi: J^{\mathbf{A}} V_k \to J^{\mathbf{A}} M_n$, ограничение которого на V_k, отождествляемое с нулевым сечением расслоения $J^{\mathbf{A}} V_k$, совпадает с φ. При этом, если $\pi_0^q \circ \varphi: V_k \to M_n$ — диффеоморфизм, то Φ является $\mathbf{A}$-диффеоморфизмом. В частности, C^{s-q}-регулярное сечение $\sigma: M_n \to J^{\mathbf{A}} M_n$ единственным образом продолжается до $\mathbf{A}$-диффеоморфизма $\Sigma: J^{\mathbf{A}} M_n \to J^{\mathbf{A}} M_n$.

В качестве примера рассмотрим сечение $\sigma: M_n \to TM_n$ касательного расслоения. Для $x \in M_n$ имеем $\sigma(x) = v_x \in T_x M_n$, тогда для $u_x \in T_x M_n$ получим $\Sigma(u_x) = u_x + v_x$.

Если класс дифференцируемости многообразий V_k и M_n равен C^∞, то отображение Φ можно получить следующим образом. Пусть $\lambda: \mathbf{A} \otimes \mathbf{A} \to \mathbf{A}$ — билинейное отображение, определяющее операцию умножения в $\mathbf{A}$. Это отображение можно рассматривать как эпиморфизм алгебр, поэтому оно порождает (см. § 3) отображение $\Lambda: J^{\mathbf{A}\otimes\mathbf{A}} M_n \to J^{\mathbf{A}} M_n$. По теоремам 6 и 10 отображение $\varphi: V_k \to J^{\mathbf{A}} M_n$ можно продолжить до $\varphi^{\mathbf{A}}: J^{\mathbf{A}} V_k \to J^{\mathbf{A}\otimes\mathbf{A}} M_n$. Имеет место равенство $\Phi = \Lambda \circ \varphi^{\mathbf{A}}$.

§ 5. СТРУКТУРНЫЕ ГРУППЫ РАССЛОЕНИЯ А-СТРУЙ

Расслоение $J^{\mathbf{A}} M_n$ $\mathbf{A}$-струй над многообразием M_n является присоединенным расслоением к расслоению q-реперов $H^q M_n$ со стандартным слоем $J_0^{\mathbf{A}} \mathbf{R}^n = (\mathring{\mathbf{A}})^n$ — многообразием $\mathbf{A}$-струй ростков $(\mathbf{R}^N, 0) \to (\mathbf{R}^n, 0)$. Действие группы L_n^q на $J_0^{\mathbf{A}} \mathbf{R}^n$ слева осуществляется по закону композиции струй: если ростки $\varphi: (\mathbf{R}^n, 0) \to (\mathbf{R}^n, 0)$ и $f: (\mathbf{R}^N, 0) \to (\mathbf{R}^n, 0)$ определяют струи $j^q \varphi \in L_n^q$ и $j^{\mathbf{A}} f \in J_0^{\mathbf{A}} \mathbf{R}^n$, то

$$j^q \varphi \circ j^{\mathbf{A}} f = j^{\mathbf{A}} (\varphi \circ f). \tag{21}$$

q-репер $j^q \psi$, где $\psi: (\mathbf{R}^n, 0) \to (M_n, x)$, относит $\mathbf{A}$-струе $j^q g$ ростка $g: (\mathbf{R}^N, 0) \to (M_n, x)$ стандартную $\mathbf{A}$-струю $j^{\mathbf{A}} (\psi^{-1} \circ g) \in J_0^{\mathbf{A}} \mathbf{R}^n$. По теореме 10 действие (21) группы L_n^q на $J_0^{\mathbf{A}} \mathbf{R}^n$ может быть записано в виде

$$j^{\mathbf{A}}(\varphi\circ f)=\varphi^{\mathbf{A}}(j^{\mathbf{A}}f), \tag{22}$$

где $\varphi^{\mathbf{A}}$ — аналитическое продолжение ростка φ в алгебру $\mathbf{A}$. Пусть росток φ задается функциями $y^i=\varphi^i(x^j)$, тогда аналитическое продолжение $\varphi^{\mathbf{A}}:(\mathbf{A}^n, 0)\to(\mathbf{A}^n, 0)$ имеет вид (см. (11))

$$Y^i=\sum_{|p|=0}^{q}\frac{1}{p!}\frac{D^p\varphi^i}{Dx^p}\mathring{X}^p. \tag{23}$$

Полагая $x^i=0$ в формуле (23), получим запись действия (21) в виде

$$\mathring{Y}^i=\varphi^i_p\mathring{X}^p\quad(1\leqslant|p|\leqslant q), \tag{24}$$

где $\varphi^i_p=\frac{1}{p!}\frac{D^p\varphi^i}{Dx^p}\Big|_0$.

Вместо ростка $\varphi^{\mathbf{A}}$ в формуле (22) можно рассмотреть произвольный обратимый $\mathbf{A}$-дифференцируемый росток $\Psi:(\mathbf{A}^n, 0)\to\to(\mathbf{A}^n, \mathring{Y}_0)$, где $\mathring{Y}_0\in(\mathring{\mathbf{A}})^n$. Пусть $\psi=\Psi|_{\mathbf{R}^n}$ — ограничение Ψ на $(\mathbf{R}^n, 0)$. Если ψ задается функциями $Y^i=\psi^i(x^j)$, то Ψ по теореме 1 задается $\mathbf{A}$-дифференцируемыми функциями

$$Y^i=\sum_{|p|=0}^{q}\frac{1}{p!}\frac{D^p\left(\pi^q_{q-|p|}\circ\psi^i\right)}{Dx^p}\mathring{X}^p. \tag{25}$$

При $x^j=0$ из уравнений (25) получается соотношение

$$\mathring{Y}^i=\psi^i_p\mathring{X}^p\quad(0\leqslant|p|\leqslant q), \tag{26}$$

где

$$\psi^i_p=\frac{D^p\left(\pi^q_{q-|p|}\circ\psi^i\right)}{Dx^p}\in\mathbf{A}_{(q-|p|)};\quad \psi^i_0=\mathring{Y}^i_0\in\mathring{\mathbf{A}}. \tag{27}$$

Теорема 12 ([31]). Уравнениями (26) определяется группа Ли $D_n(\mathring{\mathbf{A}})$, транзитивно действующая слева на многообразии $J^{\mathbf{A}}_0\mathbf{R}^n$. Группа $D_n(\mathbf{A})$ является полупрямым ([20]) произведением $D_n(\mathbf{A})=L^q_n\times\mathring{D}_n(\mathbf{A})$ группы L^q_n и некоторого нормального делителя $\mathring{D}_n(\mathbf{A})$.

Отметим, что из (27) следует, что элемент группы $D_n(\mathbf{A})$, определяемый ростком $\psi:(\mathbf{R}^n, 0)\to(\mathbf{A}^n, \mathring{Y}_0)$, может рассматриваться как $\mathbf{R}(n, q)$-полуструя (см. § 3, п. 4) $\hat{j}^{\mathbf{R}(n,q)}\psi$ этого ростка. Для упрощения записи $\mathbf{R}(n, q)$-полуструи будем называть q-полуструями и обозначать $\hat{j}^{\mathbf{R}(n,q)}\psi=\hat{j}^q\psi$. Закон композиции в группе $D_n(\mathbf{A})$ можно записать в виде $\hat{j}^q\psi_2\circ\hat{j}^q\psi_1=\hat{j}^q(\Psi_2\circ\psi_1)$, где Ψ_2 — аналитическое продолжение ростка ψ_2. Полагая $\pi^q_0\circ\psi=\varphi$ и $\psi\circ\varphi^{-1}=\theta$, можно $\hat{j}^q\psi\in D_n(\mathbf{A})$ представить в виде композиции $\hat{j}^q\psi=\hat{j}^q\theta\circ j^q\varphi$, где $j^q\varphi\in L^q_n$, а $\hat{j}^q\theta\in\mathring{D}_n(\mathbf{A})$. Поэтому нормальный делитель $\mathring{D}_n(\mathbf{A})$ состоит из q-полуструй ростков $\theta:(\mathbf{R}^n, 0)\to$

$\to(\mathbf{A}^n, \overset{\circ}{Y}_0)$, удовлетворяющих соотношению $\pi_0^q \circ \theta = \mathrm{id}$. Группа $D_n(\mathbf{A})$ называется $\mathbf{A}$-аффинной группой. В случае алгебры $\mathbf{R}(\varepsilon)$ дуальных чисел группа $D_n(\mathbf{R}(\varepsilon))$ есть группа аффинных преобразований аффинного пространства $\mathbf{R}^n$.

Можно построить главное расслоение со структурной группой $D_n(\mathbf{A})$, присоединенное к расслоению $J^{\mathbf{A}}M_n$.

Определение 6. $\mathbf{A}$-аффинным репером на дифференцируемом класса C^s многообразии M_n называется q-полуструя C^{s-q}-регулярного ростка $\psi:(\mathbf{R}^n, 0) \to J^{\mathbf{A}}M_n$ такого, что росток $\pi_0^q \circ \psi$ обратим.

Обозначим символом $H(\mathbf{A})M_n$ множество всех $\mathbf{A}$-аффинных реперов на M_n. По теореме 7 $H(\mathbf{A})M_n$ — открытое подмногообразие в расслоении $J^{\mathbf{R}(n,q)\widehat{\otimes}\mathbf{A}}M_n$. Имеет место

Теорема 13 ([31]). $H(\mathbf{A})M_n$ — главное расслоение над M_n со структурной группой $D_n(\mathbf{A})$, присоединенное к расслоению $J^{\mathbf{A}}M_n$.

Для алгебры $\mathbf{R}(\varepsilon)$ расслоение $H(\mathbf{R}(\varepsilon))M_n$ является расслоением аффинных реперов на M_n.

Определение 7. Связность в главном расслоении $H(\mathbf{A})M_n$ назовем $\mathbf{A}$-аффинной связностью на M_n.

Для алгебры $\mathbf{R}(\varepsilon)$ при этом $\mathbf{R}(\varepsilon)$-аффинная связность — это обобщенная аффинная связность на M_n (см. [14]).

Если $x^i = x^i(t)$ — уравнения некоторой кривой на M_n в карте (U, h), то уравнения параллельного переноса $\mathbf{A}$-струи в $\mathbf{A}$-аффинной связности на M_n имеют вид

$$\frac{d\overset{\circ}{X}{}^i}{dt} + \Gamma^i_{pj}\overset{\circ}{X}{}^p \frac{dx^j}{dt} = 0,$$

где $\Gamma^i_{pj} = \Gamma^i_{pj}(x^k)$ при $0 \leqslant |p| \leqslant q$ являются $\mathbf{A}_{(q-|p|)}$-значными дифференцируемыми класса C^{s-q-1} функциями, а при $p=0$, кроме того, функции Γ^i_{0j} принимают значения в $\overset{\circ}{\mathbf{A}}$. $\mathbf{A}$-аффинная связность редуцируется к связности в расслоении H^qM_n тогда и только тогда, когда Γ^i_{pj} являются $\mathbf{R}$-значными и $\Gamma^i_{0j} = 0$.

В. В. Вагнером [2] было показано, что группа L^q_n может рассматриваться как группа автоморфизмов алгебры $\mathbf{R}(n, q)$. Аналогичные рассмотрения показывают, что $\mathbf{A}$-аффинная группа $D_n(\mathbf{A})$ является группой $\mathbf{A}$-линейных автоморфизмов алгебры $\mathbf{A}\widehat{\otimes}\mathbf{R}(n, q)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Брёкер Т., Ландер Л.,* Дифференцируемые ростки и катастрофы. Пер. с англ. М.: Мир, 1977. 208 с. (РЖМат, 1977, 12А649К)
2. *Вагнер В. В.,* Алгебраическая теория дифференциальных групп. Докл. АН СССР, 1951, *80,* № 6, 845—848

3. —, Алгебраическая теория касательных пространств высших порядков. Тр. Семинара по векторн. и тензорн. анализу. М., МГУ, 1956, вып. 10, 31—88 (РЖМат, 1957, 8910)
4. *Вишневский В. В.*, О геометрической модели полукасательных структур. Изв. вузов. Мат., 1983, № 3, 73—75 (РЖМат, 1983, 8А728)
5. —, *Пантелеева Т. А.*, Голоморфные продолжения объектов в полукасательное расслоение второго порядка. Изв. вузов. Мат., 1985, № 9, 3—10 (РЖМат, 1986, 4А857)
6. —, *Терина Г. А.*, К теории пространств над тензорными произведениями алгебр. Уч. зап. Казан. ун-т, 1968, *128*, № 3, 12—23 (РЖМат, 1969, 8А515)
7. —, *Широков А. П.*, *Шурыгин В. В.*, Пространства над алгебрами. Изд-во Казан. ун-та, 1985, 264 с. (РЖМат, 1987, 7А694К)
8. *Годбийон К.*, Дифференциальная геометрия и аналитическая механика. Пер. с фр. М.: Мир, 1973. 188 с. (РЖМат, 1973, 5А735К)
9. *Громол Д.*, *Клингенберг В.*, *Мейер В.*, Риманова геометрия в целом. Пер. с нем. М.: Мир, 1971. 344 с. (РЖМат, 1971, 7А734К)
10. *Евтушик Л. Е.*, *Лумисте Ю. Г.*, *Остиану Н. М.*, *Широков А. П.*, Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Пробл. геометрии, 1979, *9*, 247 с. (РЖМат, 1980, 1А800К)
11. *Егиазарян К. М.*, О структуре аффинных связностей и тензорных полей на касательном расслоении высшего порядка. Докл. АН СССР, 1979, *246*, № 4, 797—801 (РЖМат, 1979, 10А509)
12. *Капустина Т. В.*, Голоморфно-конформное соответствие в касательных расслоениях риманова пространства. Тр. геометр. семинара. Казан. ун-т, 1981, № 13, 39—48 (РЖМат, 1981, 12А724)
13. *Кирсанова Т. В.*, Полукасательные структуры 1-го порядка. Тр. геометр. семинара. Казан. ун-т, 1984, № 16, 41—47 (РЖМат, 1985, 5А618)
14. *Кобаяси Ш.*, *Номидзу К.*, Основы дифференциальной геометрии. Т. 1. Пер. с англ. М.: Наука, 1981. 344 с. (РЖМат, 1981, 11А686К)
15. *Кручкович Г. И.*, Гиперкомплексные структуры на многообразиях. I. Тр. Семинара по векторн. и тензорн. анализу с их прил. к геометрии, мех. и физ. Моск. ун-т, 1972, вып. 16, 174—201 (РЖМат, 1973, 3А684)
16. *Пантелеева Т. А.*, Дважды проектируемые тензорные поля и связности в полукасательном расслоении второго порядка. Тр. геометр. семинара. Казан. ун-т, 1986, № 17, 43—53 (РЖМат, 1986, 8А755)
17. *Подольский В. Г.*, Инфинитезимальные преобразования в сумме Уитни двух касательных расслоений. Казан. ун-т. Казань, 1976, 11 с. Библиогр. 4 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 13 янв. 1977 г., № 171—77 Деп.) (РЖМат, 1977, 5А521ДЕП)
18. *Рахула М. О.*, Теория катастроф и дифференциальная геометрия. Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Пробл. геометрии, 1984, *16*, 35—80 (РЖМат, 1985, 4А680)
19. *Хамфри Дж.*, Линейные алгебраические группы. Пер. с англ. М.: Наука, 1980. 400 с. (РЖМат, 1981, 2А433К)
20. *Холл М.*, Теория групп. Пер. с англ. М.: Изд-во ин. лит., 1962. 468 с. (РЖМат, 1963, 3А168К)
21. *Широков А. П.*, Об одном типе *G*-структур, определяемых алгебрами. Тр. Геометр. семинара. Всес. Ин-т научн. и техн. информ., 1966, *1*, 425—456 (РЖМат, 1967, 6А383)
22. —, Замечание о структурах в касательных расслоениях. Тр. Геометр. семинара. Всес. ин-т научн. и техн. информ., 1974, *5*, 311—318 (РЖМат, 1975, 1А781)
23. — ,Структуры на дифференцируемых многообразиях. Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Алгебра. Топол. Геометрия, 1974, *11*, 153—207 (РЖМат, 1974, 11А795)
24. —, Геометрия касательных расслоений и пространства над алгебрами. Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Пробл. геометрии, 1981, *12*, 61—95 (РЖМат, 1981, 10А546)

25. *Шурыгин В. В.*, Индуцированные связности на поверхностях пространства над алгеброй. Изв. вузов. Мат., 1977, № 9, 127—130 (РЖМат, 1978, 7А873)
26. —, Вполне геодезические подпространства в пространствах над алгебрами. Изв. вузов. Мат., 1977, № 11, 127—129 (РЖМат, 1978, 8А696)
27. —, К теории кривых на многообразиях над алгебрами. Тр. геометр. семинара. Казан. ун-т, 1981, № 13, 109—120 (РЖМат, 1981, 12А708)
28. —, Расслоения струй и многообразия над алгебрами. Тр. геометр. семинара. Казан. ун-т, 1983, № 15, 98—115 (РЖМат, 1984, 7А628)
29. —, Расслоения струй, определяемые локальными алгебрами. Изв. вузов. Мат., 1983, № 12, 77—80 (РЖМат, 1984, 6А681)
30. —, Расслоения струй и многообразия над алгебрами. II. Тр. геометр. семинара. Казан. ун-т, 1984, № 16, 127—142 (РЖМат, 1985, 5А625)
31. —, К теории дифференциальных групп высших порядков. Изв. вузов. Мат., 1984, № 11, 77—81 (РЖМат, 1985, 5А626)
32. —, Расслоения струй и многообразия над алгебрами. III. Тр. геометр. семинара. Казан. ун-т, 1986, № 17, 110—120 (РЖМат, 1986, 7А808)
33. *Bowman R. H.*, On differential extensions. Tensor, 1970, *21*, № 2, 139—150 (РЖМат, 1970, 10А492)
34. —, Concerning a problem of Yano and Kobayashi. Tensor, 1972, *25*, 105—112 (РЖМат, 1974, 1А660)
35. *Ehresmann C.*, Les prolongements d'une variété différentiable. I. Calcul des jets, prolongement principal. C. r. Acad. sci., 1951, *233*, № 11, 598—600
36. —, Les prolongements d'une variété différentiable. II. L'espace des jets d'ordre r de V_n dans V_m. C. r. Acad. sci., 1951, *233*, № 15, 777—779
37. —, Extension du calcul des jets aux jets non holonomes. C. r. Acad. sci., 1954, *239*, № 25, 1762—1764 (РЖМат, 1956, 4858)
38. *Gollek H.*, Anwendungen der Jet-Theorie auf Faserbündel und Liesche Transformationsgruppen. Math. Nachr., 1972, *53*, № 1—6, 162—180 (РЖМат, 1973, 3А683)
39. *Morimoto Akihiko*, Prolongations of G-structures to tangent bundles. Nagoya Math. J., 1968, *32*, June, 67—108 (РЖМат, 1969, 6А439)
40. —, Liftings of some types of tensor fields and connections to tangent bundles of p^r-velocities. Nagoya Math. J., 1970, *40*, 13—31 (РЖМат, 1971, 7А730)
41. —, Prolongations of connections to tangential fibre bundles of higher order. Nagoya Math. J., 1970, *40*, 85—97 (РЖМат, 1971, 7А728)
42. —, Liftings of tensor fields and connections to tangent bundles of higher order. Nagoya Math. J., 1970, *40*, 99—120 (РЖМат, 1971, 7А729)
43. —, Prolongation of connections to bundles of infinitely near points. J. Different. Geom., 1976, *11*, № 4, 479—498 (РЖМат, 1978, 3А476)
44. *Okassa E.*, Prolongements des champs de vecteurs à de variétés de points proches. C. r. Acad. sci., 1985, sér. 1, *300*, № 6, 173—176 (РЖМат, 1985, 7А795)
45. *Patterson L.-N.*, Connexions and prolongations. Can. J. Math., 1975, *27*, № 4, 766—791 (РЖМат, 1976, 7А872)
46. *Tulczyjew W. M.*, Les jets généralisés. C. r. Acad. sci., 1975, *281*, № 10, A349—A352 (РЖМат, 1976, 4А602)
47. —, A generalization of jet theory. Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math., astron. et phys., 1978, *26*, № 7, 611—615 (РЖМат, 1979, 4А626)
48. *Weil A.*, Théorie des points proches sur les variétés différentiables. Colloq. internat. Centre nat. rech. sci. 52, Strasbourg, 1953, Paris, 1953, 111—117 (РЖМат, 1956, 8309)
49. *Yuen Ping Cheng*, Prolongements de G-structures aux espaces de prolongements. C. r. Acad. sci., 1970, *270*, № 8, A538—A540 (РЖМат, 1970, 10А488)
50. —, Sur la notion d'une G-structure géométrique et les A-prolonogements de G-structures. C. r. Acad. sci., 1970, *270*, № 24, A1589—A1592 (РЖМат, 1970, 12А578)