Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

В. А. Ногин, О весовых пространствах типа риссовых потенциалов,
Изв. вузов. Матем., 1982, номер 6, 77–80

https://www.mathnet.ru/ivm6837

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.90
22 января 2026 г., 22:22:19

Полученная по ходу доказательства этих теорем информация о структуре решения задачи (1) позволяет вычислить порог разрешимости этой задачи.

Теорема 3. *Пусть* $L \in R_p$, $\ln G(t) = \varphi(t) \in T_p$, *и выполнено хотя бы одно из условий* (4), (5). *Тогда порог разрешимости задачи* (1) *может быть вычислен по формуле*

$$\varkappa = [\alpha_1] + \begin{cases} -\nu(\varphi) - \alpha_0 - 1, & \text{если это число целое, а функция} \\ & \nu(\varphi)\ln|z| - (2\pi)^{-1}\theta(|z|)\operatorname{Re}P_\varphi(z) \\ & \text{неограничена сверху при } |z| < 1; \\ [-\nu(\varphi) - \alpha_0] & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \tag{6}$$

где $\nu(\varphi) = (2\pi)^{-1}\overline{\lim\limits_{z\to 0}}\,\theta(|z|)(\ln|z|)^{-1}\operatorname{Re}P_\varphi(z)$, $\alpha_0 = (2\pi)^{-1}\operatorname{Im}\varphi(0)$, $\alpha_1 = (2\pi)^{-1}\operatorname{Im}\varphi(1)$.

Отметим следующее условие конечномерности задачи (1).

Следствие 1. Пусть $L \in R_p$. Задача (1) имеет конечное число линейно независимых решений при любом коэффициенте с логарифмом класса T_p тогда и только тогда, когда конечен предел (4).

Соотношение (6) позволяет также получить такое уточнение альтернатив (2), (3) леммы 2.

Следствие 2. Пусть $L \in R_p$, $\ln G \in T_p$ и выполнено хотя бы одно из условий (4), (5). Тогда $\varkappa + \varkappa' \leqslant -\omega(2\pi)^{-1}|\ln|G(0)||$, где $\omega = \overline{\lim\limits_{r\to 0}}\,\theta(r)/\ln r - \underline{\lim\limits_{r\to 0}}\,\theta(r)/\ln r$. В частности, хотя бы одна из задач (1), (2) не имеет нетривиальных решений в классе B_n, если $n > -\omega(4\pi)^{-1} \times \times |\ln|G(0)||$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гахов Ф. Д. Краевые задачи.—3-е изд.—М., 1977.—646 с.
2. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения.—3-е изд.—М., 1968.—511 с.
3. Сейфуллаев Р. К. Краевая задача Римана на негладкой разомкнутой кривой.—Матем. сб., 1980, т. 112 (154): 2, с. 148—161.
4. Маркушевич А. И. Избранные главы теории аналитических функций.—М., 1976.—191 с.
5. Пресдорф З. Некоторые классы сингулярных уравнений.—М., 1979.—493 с.

г. Казань

Поступила
19 II 1981

В. А. Ногин

УДК 517.983

О ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ТИПА РИССОВЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ

В [1], [2] были введены и исследованы пространства $L^\alpha_{p,r}(R^n)$, состоящие из r-суммируемых функций $f(x)$, имеющих p-суммируемую риссову производную $D^\alpha f$. В случае $r = p$ пространства $L^\alpha_{p,r}(R^n)$ совпадают с пространствами бесселевых потенциалов в силу результата П. И. Лизоркина [3]. В [1], [2] показано, что $L^\alpha_{p,r}(R^n) = L_r \cap I^\alpha(L_p)$ при

$$1 < p < \infty,\ 1 < r < \infty,\ \alpha > 0,\quad 1/p - \alpha/n \leqslant 1/r \leqslant 1/p, \tag{1}$$

где $I^\alpha(L_p)$—пространство риссовых потенциалов, а в [4] установлено (при $1 < p < n/\alpha$ и при условии (1)), что в случае целого α пространства $L^\alpha_{p,r}(R^n)$ совпадают с пространствами соболевского типа, состоящими из r-суммируемых функций $f(x)$ с p-суммируемыми обобщенными производными $D^j f$ порядков $|j| = \alpha$.

Здесь мы обобщим эти результаты (освободившись от ограничения $1/p - \alpha/n \leqslant 1/r \leqslant 1/p$ из (1)) на случай весовых пространств $L^\alpha_{p,r}(w_1, w_2)$ со степенными весами. При этом обобщении приходится преодолевать существенные трудности, связанные с наличием весов. Наиболее рудным является установление вложения (6) при доказательстве теоремы 1 (см. ниже).

Основные из возникающих трудностей обусловлены:

1) работой с конечными разностями функций из весовых пространств, не инвариантных относительно сдвигов, а также с операторами, об ограниченности которых в (нужных) весовых пространствах трудно судить. Эти трудности преодолеваются за счет перехода к обобщенным функциям;

2) необходимостью переходить от равенств в смысле обобщенных функций к равенствам в обычном смысле (почти всюду) для функций из весовых L_p-пространств. Эта трудность преодолевается леммой 1, которая представляет и самостоятельный интерес.

Ниже будем использовать обозначения: $\Phi = \Phi(R^n)$—введенный в [5] класс П. И. Лизоркина, состоящий из шварцевых основных функций, ортогональных многочленам; Φ'—пространство обобщенных функций над Φ; $L_p(w) = \left\{ f(x) : \int\limits_{R^n} w(x) |f(x)|^p dx < \infty, \ w(x) \geqslant 0 \right\}$ — весовое L_p-пространство.

1. Определим пространства $L^{\alpha}_{p,r}(w_1, w_2) = L^{\alpha}_{p,r}(w_1, w_2; R^n)$ следующим образом:

$$L^{\alpha}_{p,r}(w_1, w_2) = \{ f(x) : f \in L_r(w_1), \quad D^{\alpha} f \in L_p(w_2) \}, \ \alpha > 0, \ p > 1, \ r > 1,$$

где $D^{\alpha} f$ — оператор риссова дифференцирования

$$D^{\alpha} f = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ L_p(w_2)}} D^{\alpha}_{\varepsilon} f, \tag{2}$$

$$(D^{\alpha}_{\varepsilon} f)(x) = \frac{1}{d_{n,l}(\alpha)} \int\limits_{|t| > \varepsilon} \frac{(\Delta^l_t f)(x)}{|t|^{n+\alpha}} dt. \tag{3}$$

В (3) $(\Delta^l_t f)(x)$—центрированная или нецентрированная разность функции $f(x)$ порядка l с шагом $t \in R^n$, $d_{n,l}(\alpha)$ — постоянная, значение которой можно найти в [1], [2].

Нас будет интересовать случай степенных весов

$$w_1(x) = |x|^{\mu} ((1 + |x|)^{\mu}), \ w_2(x) = |x|^{\gamma} ((1 + |x|)^{\gamma}).$$

Относительно выбора l в (3) будем считать в дальнейшем, что

$$l > \max \{\alpha, \ \alpha - n + \gamma/(p-1), \ \alpha - n + \mu/(r-1)\}. \tag{4}$$

В пространстве $L^{\alpha}_{p,r}(w_1, w_2)$ введем норму равенством

$$\| f \|_{L^{\alpha}_{p,r}(w_1, w_2)} = \| f \|_{L_r(w_1)} + \| D^{\alpha} f \|_{L_p(w_2)}.$$

Пусть далее $w(x) = |x|^{\gamma}$, $-n < \gamma < n(p-1)$, или $w(x) = (1 + |x|)^{\gamma}$, $\gamma > -n$. Через $I^{\alpha}(L_p(w))$ будем обозначать пространство риссовых потенциалов с плотностями из $L_p(w)$

$$I^{\alpha}(L_p(w)) = \{ f : f = K^{\alpha} \varphi, \ \varphi \in L_p(w) \}, \ \alpha > 0, \ p \geqslant 1, \tag{5}$$

где $K^{\alpha} \varphi = k_{\alpha} \ast \varphi$ — риссов потенциал

$$k_{\alpha}(x) = \frac{1}{\gamma_n^{(\alpha)}} \begin{cases} |x|^{\alpha - n}, & \alpha - n \neq 0, 2, 4, \ldots; \\ |x|^{\alpha - n} \ln |x|, & \alpha - n = 0, 2, 4, \ldots \end{cases}$$

Потенциал $f = K^{\alpha} \varphi$ в (5) будем понимать в обычном смысле при $0 < \alpha < n$, $p > 1$, $\alpha p - n < \gamma < n(p-1)$ (в соответствии с теоремой Стейна—Вейса [6]) и в смысле свертки с ядром $k_{\alpha}(x)$ в пространстве Φ' в остальных случаях. Пространство $I^{\alpha}(L_p(w))$—банахово относительно нормы $\| f \|_{I^{\alpha}(L_p(w))} = \| \varphi \|_{L_p(w)}$.

Теорема 1. *Пусть* $\alpha > 0$, $1 < p < \infty$, $1 < r < \infty$ *и* $w_1(x) = (1 + |x|)^{\mu}$, $-n < \mu$, *или* $w_1(x) = |x|^{\mu}$, $-n < \mu < n(r-1)$; $w_2(x) = (1 + |x|)^{\gamma}$, $-n < \gamma$, *или* $w_2(x) = |x|^{\gamma}$, $-n < \gamma < n(p-1)$. *Тогда* $L^{\alpha}_{p,r}(w_1, w_2) = L_r(w_1) \cap I^{\alpha}(L_p(w_2))$, *при этом* $\| f \|_{L^{\alpha}_{p,r}(w_1, w_2)} = \| f \|_{L_r(w_1)} + \| f \|_{I^{\alpha}(L_p(w_2))}$.

Доказательство вложения

$$L_r(w_1) \cap I^{\alpha}(L_p(w_2)) \subset L^{\alpha}_{p,r}(w_1, w_2); \ \| f \|_{L^{\alpha}_{p,r}(w_1, w_2)} = \| f \|_{L_r(w_1)} + \| f \|_{I^{\alpha}(L_p(w_2))} \tag{6}$$

основано на следующем интегральном представлении „усеченных“ риссовых производных (3):

$$(D_\varepsilon^\alpha f)(x) = \int\limits_{R^n} K_{l,\alpha}(|t|)\,\varphi(x-\varepsilon t)\,dt, \quad \varphi \in L_p(w_2), \tag{7}$$

где $K_{l,\alpha}(|t|)$—некоторое „усредняющее“ ядро: $K_{l,\alpha}(|t|) \in L_1(R^n)$, $\int\limits_{R^n} K_{l,\alpha}(|t|)\,dt = 1$. Вложение (6) обосновывается предельным переходом в (7) при $\varepsilon \to 0$. При доказательстве (7) существенно использовалась

Лемма 1. *Пусть весовые функции $w_1(x)$ и $w_2(x)$ такие же, как в формулировке теоремы 1, $f(x) \in L_r(w_1)$, $g(x) \in L_p(w_2)$ и $f(x) = g(x)$ в смысле Φ'. Тогда $f(x) = g(x)$ почти всюду.*

Эта лемма содержательна при $L_r(w_1) \neq L_p(w_2)$, являясь тривиальной в противном случае. Доказательство обратного к (6) вложения

$$L_{p,r}^\alpha(w_1, w_2) \subset L_r(w_1) \cap I^\alpha(L_p(w_2)); \ \|f\|_{I^\alpha(L_p(w_2))} = \|D^\alpha f\|_{L_p(w_2)}$$

основано на представлении (в слабом смысле) конечных разностей функций $f(x) \in L_{p,r}^\alpha(w_1, w_2)$:

$$\int\limits_{R^n} (\Delta_h^m f)(x)\,\overline{\omega(x)}\,dx = \int\limits_{R^n} \overline{\omega(x)}\,dx \int\limits_{R^n} \Delta_{m,\alpha}(x-\xi, h)\,(D^\alpha f)(\xi)\,d\xi, \ \omega \in \Phi,$$

где $\Delta_{m,\alpha}(x, h) = (\Delta_h^m k_\alpha)(x)$.

Пусть $w_1(x)$, $w_2(x)$—весовые функции из теоремы 1. Из теоремы 1 вытекают такие утверждения.

Следствие 1. Пространства $L_{p,r}^\alpha(w_1, w_2)$ не зависят от типа разности, определяющей $D^\alpha f$ в (2), (3) и от порядка l этой разности (при указанном в (4) выборе l).

Следствие 2. Пространства $L_{p,r}^\alpha(w_1, w_2)$ полны.

2. Будем говорить, что функция $f(x) \in L_r(w_1)$ имеет обобщенную производную $D^j f \in L_p(w_2)$, если существует $g_j \in L_p(w_2)$ такая, что

$$\int\limits_{R^n} f(x)\,\overline{(D^j \omega)(x)}\,dx = (-1)^{|j|} \int\limits_{R^n} g_j(x)\,\overline{\omega(x)}\,dx, \quad \omega \in \Phi.$$

Пусть m—целое положительное число. Обозначим через $W_{p,r}^m(w_1, w_2)$ класс функций $f(x) \in L_r(w_1)$, имеющих обобщенные производные $D^j f \in L_p(w_2)$ для всех мультииндексов j длины m. Положим

$$\|f\|_{W_{p,r}^m(w_1, w_2)} = \|f\|_{L_r(w_1)} + \sum_{|j|=m} \|D^j f\|_{L_p(w_2)}.$$

Теорема 2. *Пусть $r > 1$, $p > 1$ и весовые функции $w_1(x)$ и $w_2(x)$ такие же, как в теореме 1, с той разницей, что $-n < \mu < n(r-1)$, когда $w_1(x) = (1+|x|)^\mu$ и $-n < \gamma < n(p-1)$ когда $w_2(x) = (1+|x|)^\gamma$. Тогда пространства $L_{p,r}^m(w_1, w_2)$ и $W_{p,r}^m(w_1, w_2)$ совпадают с точностью до эквивалентности норм.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Самко С. Г. О пространствах риссовых потенциалов.—Изв. АН СССР. Сер. матем. 1976, т. 40, № 5, с. 1143—1172.

2. Самко С. Г. Пространства $L_{p,r}^\alpha(R^n)$ и гиперсингулярные интегралы.—Изв. АН БССР. Сер. физ.-матем. н., 1976, № 2, с. 34—41.

3. Лизоркин П. И. Описание пространств $L_p^r(R^n)$ в терминах разностных сингулярных интегралов.—Матем. сб., 1970, т. 81 (123) : 1, с. 79—91.

4. Самко С. Г., Умархаджиев С. М. Описание пространства риссовых потенциалов в терминах старших производных.—Изв. вузов. Матем., 1980, № 11, с. 79—82.

5. Лизоркин П. И. Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и функциональные пространства $L_p^r(E_n)$. Теоремы вложения.—Матем. сб., 1963, т. 60 (102) : 3, с. 325—353.

6. Stein E. M., Weiss G. Fractional integrals on n-dimensional Euclidean space.—J. Math. and Mech., 1958, v. 7, № 4, p. 503—514.

г. Ростов-на-Дону

Поступила
23 XI 1981