P. A. Ibetov, Gevrey operator classes with respect to a hypoelliptic operator,
Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat., 1979, Number 12, 67–69

УДК 517.43

П. А. Ибетов

ОБ ОПЕРАТОРНЫХ КЛАССАХ ЖЕВРЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ГИПОЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА

1. Понятие класса Жевре относительно оператора L (L-класс Жевре), обобщающее понятие обычного класса Жевре, введено Г. С. Салеховым [4] и В. Р. Фридлендером [5].

Определение 1. Пусть Ω ограниченная область из R^m, $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_m)$, $0 \leqslant \delta_j \leqslant \infty$ ($j = 1, \dots, m$). Классом Жевре $G_\Omega(\delta)$ будем называть совокупность комплекснозначных функций $f(x) \in C^\infty(\Omega)$, если для любого компакта $K \subset \Omega$ существуют такие положительные постоянные $M \equiv M(K, f)$, $B \equiv B(K, f)$, что для всех $\alpha \in N^m$ и всех $x \in K$ выполняются неравенства

$$|D^\alpha f| \equiv |D_1^{\alpha_1} \dots D_m^{\alpha_m} f| \leqslant MB^{|\alpha|}\Gamma(\langle \alpha, \delta\rangle + 1),$$

где $D_j = -i\partial/\partial x_j$ ($j = 1, \dots, m$), $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_m$, $\langle \alpha, \delta\rangle = \alpha_1\delta_1 + \dots + \alpha_m\delta_m$, $\alpha_j\delta_j = 0$, если $\alpha_j = 0$ и $\delta_j = \infty$, $\alpha_j\delta_j = \infty$, если $\alpha_j > 0$ и $\delta_j = \infty$ ($j = 1, \dots, m$).

Определение 2. Классом Жевре $\widetilde{G}_\Omega(\delta)$ будем называть совокупность обобщенных функций (над пространством $C_0^\infty(\Omega)$), если для всякого $r > 0$ и для всех $\psi \in C_0^\infty(S_r)$ свертка $f \ast \psi \in G_{\Omega_r}(\delta)$, где S_r — шар радиуса r с центром в начале координат, Ω_r — множество точек Ω, расстояние которых до границы Ω больше r.

Согласно [7], если $\delta_j \geqslant 1$ ($j = 1, \dots, m$), то $\widetilde{G}_\Omega(\delta) \cap C^\infty(\Omega) = G_\Omega(\delta)$.

Определение 3. Пусть L — оператор, $0 \leqslant \varkappa < \infty$. L-классом Жевре $G_\Omega^L(\varkappa)$ будем называть совокупность комплекснозначных функций $\varphi(x)$, удовлетворяющих следующим условиям: 1) для любого $n \in N$ $L^n\varphi \in C(\Omega)$; 2) для любого компакта $K \subset \Omega$ существуют положительные постоянные $M \equiv M(K, \varphi)$ и $B \equiv B(K, \varphi)$, что для всех $n \in N$ и всех $x \in K$ выполняются неравенства $|L^n\varphi(x)| \leqslant MB^n\Gamma(n\varkappa + 1)$.

И. Г. Галяутдинов и В. Р. Фридлендер [2] показали, что если L — обыкновенный дифференциальный оператор порядка p с постоянными коэффициентами, то бесконечно дифференцируемая функция принадлежит L-классу Жевре $G_{[a,b]}^L(p\varkappa)$ тогда и только тогда, когда она из класса $G_{[a,b]}(\varkappa)$.

Перенесение этих результатов на операторы с частными производными, вообще говоря, возможно только для отдельных классов операторов. Это показано в [3].

Для эллиптических операторов аналогичные факты установлены в работах [8]—[10]. Наиболее общий результат содержится в работе Ж. Л. Лионса и Э. Мадженеса [10]. Ими установлено, что если L — эллиптический оператор порядка p с коэффициентами из $G_\Omega(\varkappa)$ и $\varkappa \geqslant 1$, то из принадлежности функции L-классу Жевре $G_\Omega^L(p\varkappa)$ следует ее принадлежность обычному классу Жевре $G_\Omega(\varkappa) \equiv G_\Omega(\varkappa, \dots, \varkappa)$.

В настоящей работе аналогичная задача решается для δ-гипоэллиптических операторов.

Определение 4. Пусть $\delta \in R^m$, $1 \leqslant \delta \leqslant \infty$. Оператор с постоянными коэффициентами $L(D)$ называется δ-гипоэллиптическим, если любое обобщенное решение (над $C_0^\infty(\Omega)$) уравнения $L(D)u = 0$ в области Ω принадлежит классу Жевре $\widetilde{G}_\Omega(\delta)$.

В работе рассматриваются такие δ-гипоэллиптические операторы, для которых $\delta_j < \infty$ при $j \leqslant m' \leqslant m$, $\delta_j = \infty$ при $j > m'$.

Можно показать, что для характеристического многочлена $L(\xi)$ δ-гипоэллиптического оператора $L(D)$ существуют такие положительные постоянные C, $\gamma_1, \ldots, \gamma_{m'}$, что для всех $\xi \in R^m$ имеет место

$$|L(\xi)| + 1 \geqslant C \langle \xi \rangle_{1/\gamma} \equiv C(|\xi_1|^{\gamma_1} + \ldots + |\xi_{m'}|^{\gamma_{m'}} + m - m' + 1). \tag{1}$$

Основным результатом работы является

Теорема 1. *Пусть $L \equiv L(D)$ — δ-гипоэллиптический оператор. Тогда, если $f \in G^L_{\Omega}(\varkappa) \cap C^{\infty}(\Omega)$, то $f \in G_{\Omega}(\beta)$, где $\beta_j = \infty$ при $j > m'$, $\beta_j = \max\{\varkappa/\gamma_j;\ \gamma_j\}$ при рациональном $\varkappa$, $\beta_j = \max\{\varkappa/\gamma_j + \varepsilon;\ \delta_j\}$ для любого $\varepsilon > 0$ при иррациональном $\varkappa$ ($j = 1, \ldots, m'$), $\gamma_1, \ldots, \gamma_{m'}$ — постоянные неравенства* (1), *которому удовлетворяет характеристический многочлен оператора L, и выбраны наибольшими из возможных.*

2. Для доказательства теоремы 1 потребуются следующие вспомогательные предложения.

Лемма 1. *Пусть $L \equiv L(D)$ — δ-гипоэллиптический оператор с постоянными коэффициентами, и пусть характеристический многочлен этого оператора удовлетворяет неравенству* (1). *Тогда любое дифференцируемое в области $\Omega_1 \subset R^{m+1}$ решение уравнения*

$$(D^p_{m+1} + L^q(D))\, u = 0, \tag{2}$$

аналитическое по переменной x_{m+1}, принадлежит классу Жевре

$$G_{\Omega_1}(\beta, 1) \equiv G_{\Omega_1}(\beta_1, \ldots, \beta_{m'}, \infty, \ldots, \infty, 1),$$

где $\beta_j = \max\{p/(q\gamma_j);\ \delta_j\}$ ($j = 1, \ldots, m'$).

Для доказательства этого предложения достаточно показать, что характеристический многочлен уравнения (2) удовлетворяет условию *iii)* теоремы 3.2.1 работы [6].

Лемма 2. *Пусть $f \in G^L_{\Omega}(p/q)$, где $L \equiv L(D)$ — дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами. Тогда существует открытая область $\Omega_1 \subset R^{m+1}$, $\Omega_1|_{x_{m+1}=0} = \Omega$, в которой существует обобщенное решение уравнения* (2), *аналитическое по переменной x_{m+1}, удовлетворяющее начальным условиям*:

$$u(x, 0) = f(x), \tag{3}$$

$$D^k_{m+1} u(x, 0) = 0 \quad (k = 1, \ldots, p-1). \tag{4}$$

Доказательство этого утверждения содержится в [5].

3. Доказательство теоремы 1. Пусть $f(x) \in G^L_{\Omega}(\varkappa)$, где $L \equiv L(D)$—дифференциальный оператор, удовлетворяющий условиям теоремы, $\varkappa = p/q$ — положительное рациональное число. Тогда по лемме 2 можно указать область $\Omega_1 \subset R^{m+1}$, в которой существует обобщенное решение $u_0(x, x_{m+1})$ уравнения (2), удовлетворяющее условиям (3)—(4).

Для любого $r > 0$ и любой функции $\psi(x) \in C^{\infty}_0(S_r)$ в области $\Omega_{1_r} \subset \Omega_1$, где $\Omega_{1_r}|_{x_{m+1}=0} = \Omega_r$, функция

$$u_0(x, x_{m+1}) \times \psi(x) \tag{5}$$

удовлетворяет уравнению (2). Функция (5) аналитическая по переменной x_{m+1} и бесконечно дифференцируемая в Ω_{1_r}. Тогда, согласно лемме 1, функция (5) принадлежит классу $G_{\Omega_{1_r}}(\beta, 1)$. Следовательно, $u_0(x, 0) \times \psi(x) \in G_{\Omega_r}(\beta)$. Так как r и ψ произвольные, то это, согласно определению 2, означает, что $f(x) = u_0(x, 0) \in \widetilde{G}_{\Omega}(\beta)$. Так как $f(x) \in C^{\infty}(\Omega)$ и $\delta \geqslant 1$, то $f(x) \in G_{\Omega}(\beta)$. Для рациональных $\varkappa$ теорема доказана.

Пусть $\varkappa$ иррациональное число. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ можно указать рациональное число $p/q > \varkappa$, что $p/q - \varkappa < \varepsilon$. Отсюда, учитывая, что $G^L_\Omega(\varkappa) \subset G^L_\Omega(p/q)$, и повторяя рассуждения, проведенные выше, получим утверждение теоремы для иррационального $\varkappa$. Теорема доказана.

4. Укажем соотношения между обычными и L-классами Жевре, когда L является квазиэллиптическим оператором с постоянными коэффициентами. Понятие квазиэллиптического оператора введено Л. Р. Волевичем [1].

Теорема 2. *Пусть $L \equiv L(D)$ — квазиэллиптический оператор с постоянными коэффициентами веса δ и порядка p. Пусть $\varkappa \geqslant 1$ рациональное число. Тогда* $G_\Omega(\delta_1\varkappa, \ldots, \delta_m\varkappa) = G^L_\Omega(p\varkappa)$.

Доказательство. Так как характеристический многочлен квазиэллиптического оператора веса δ и порядка p удовлетворяет неравенству (1) с $\gamma_j = p/\delta_j$ $(j = 1, \ldots, m)$, то по теореме 1 $G^L_\Omega(p\varkappa) \subseteq G_\Omega(\delta_1\varkappa, \ldots, \delta_m\varkappa)$.

Обратное включение является следствием теоремы 1 работы [3]. Теорема доказана.

Любой эллиптический оператор порядка p есть квазиэллиптический оператор веса $(1, 1, \ldots, 1)$. Поэтому теорема 2 охватывает аналогичную теорему Ж. Л. Лионса и Э. Мадженеса [10] для рациональных $\varkappa$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Волевич Л. Р. Локальные свойства решений квазиэллиптических систем. Матем. сб., т. 59 (101), 1962, с. 3—52.

2. Галяутдинов И. Г., Фридлендер В. Р. Некоторые обобщения и применения неравенств Колмогорова и Горного—Картана. Изв. вузов. Матем., 1967, № 3, с. 20—26.

3. Галя2утдинов И. Г. Об операторно-жевреевских пространствах функций. Изв. вузов. Матем., 1971, № 10, с. 36—41.

4. Салехов Г. С. О задаче Коши—Ковалевской для одного класса линейных уравнений с частными производными в области сколь угодно гладких функций. Изв. АН СССР. Сер. матем., т. 14, № 4, 1950, с. 355—366.

5. Фридлендер В. Р. Исследование задачи Ковалевской—Гурса для одного класса линейных дифференциально-операторных уравнений. ДАН СССР, т. 76, № 3, 1951, с. 363—365.

6. Friberg J. Estimates for partially hypoelliptic differential operators. Lund., 1963.

7. Klaesson T. Partial hypoellipticity and Gevrey classes. Math. Scand., № 26, 1970, p. 119—131.

8. Komatsu H. A. characterization of real analytic functions. Proc. Jap. Acad., № 36, 1962, p. 90—93.

9. Kotake T., Narasimhan M. Regularity theorems for fractional powers of a linear elliptic operator. Bull. Soc. math. France, № 90, 1962, p. 449—471.

10. Lions J. L., Magenes E. Espaces du type de Gevrey et problémes aux limites pour diverses classes d'équations d'evolutions. Ann. mat. pura ed appl., v. IV, № LXXII, 1966, p. 343—394.

г. Елабуга

Поступила
17 I 1978

Ю. И. Маковоз, М. А. Шешко УДК 517.968

О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ СИНГУЛЯРНОГО ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

В последние годы возрастает интерес к приближенному решению сингулярных интегральных уравнений (СИУ) [1]—[5]. Это обусловлено, с одной стороны, расширением сферы приложения СИУ, а с другой — недостаточной разработкой алгоритмов, реализующих их решение на ЭВМ, хотя в теоретическом плане в этом направлении накопилось уже достаточно много результатов.