



Общероссийский математический портал

Е. Ю. Смолькин, М. О. Снегур, Численное исследование спектра нормальных волн анизотропного диэлектрического волновода, *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки*, 2018, выпуск 1, 72–82

DOI: 10.21685/2072-3040-2018-1-6

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.80

11 февраля 2025 г., 22:36:42



ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СПЕКТРА НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН АНИЗОТРОПНОГО ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ВОЛНОВОДА¹

Аннотация.

Актуальность и цели. Цель работы – исследование спектра задачи о распространяющихся электромагнитных волнах анизотропного диэлектрического волновода с круговым сечением.

Материалы и методы. Для определения решения использована вариационная формулировка задачи. Физическая задача сводится к решению задачи на собственные значения для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Для нахождения численного решения задачи применяется метод Галеркина с использованием финитных кусочно-линейных базисных функций.

Результаты. Разработан и реализован численный метод решения задачи распространения нормальных волн анизотропного диэлектрического волновода с круговым сечением, проведен ряд численных экспериментов.

Вывод. Предложенный численный метод является эффективным способом нахождения приближенного решения задачи распространения электромагнитных волн.

Ключевые слова: задача распространения электромагнитных волн, анизотропный диэлектрический волновод с круговым сечением, уравнение Максвелла, дифференциальные уравнения, вариационная формулировка, пространства Соболева, метод Галеркина.

Е. Ю. Smol'kin, М. О. Snegur

A NUMERICAL RESEARCH OF A PROPER WAVE SPECTRUM OF AN ANISOTROPIC DIELECTRIC WAVEGUIDE

Abstract.

Background. The aim of this work is to study the spectrum of the problem of propagating electromagnetic waves of an anisotropic dielectric waveguide with a circular cross section.

Materials and methods. To determine the solution, we use the variational formulation of the problem. The physical problem is reduced to solving the eigenvalue problem for a system of ordinary differential equations. To find the numerical solution of the problem, we use the Galerkin method with the use of finite piecewise linear basis functions.

Results. A numerical method for solving the problem of propagation of normal waves of an anisotropic dielectric waveguide with a circular cross-section was developed and implemented; a number of numerical experiments were carried out.

¹ Работа написана при поддержке гранта Министерства образования и науки РФ (госзадание № 1.894.2017/4.6).

Conclusion. The proposed numerical method is an effective way of finding an approximate solution to the problem of propagation of electromagnetic waves.

Key words: problem of propagation of electromagnetic waves, anisotropic dielectric waveguide with circular cross section, Maxwell's equation, differential equations, variational formulation, Sobolev spaces, Galerkin method.

Введение

Анализ распространения волн в волноводах представляет собой важный класс векторных электромагнитных задач. Однако нередко требуются среды с необычными свойствами (или заданными свойствами), которые можно получить, используя анизотропные по составу среды. При исследовании процессов распространения волн в таких волноведущих структурах возникают краевые задачи на собственные значения. Для исследования спектральных свойств таких задач оказывается естественным и эффективным методом оператор-функций. После сведения исходной краевой задачи к изучению некоторой оператор-функции, можно использовать аппарат функционального анализа для исследования его спектральных свойств [1, 2].

Численные методы расчета параметров различных типов волноведущих структур описаны в монографиях и обзорных работах [3–5]. Однако следует сказать, что большинство методов, применяемых к однородным волноводам, не являются общими и их трудно реализовать и применять для конкретных анизотропных структур.

В этой работе численное исследование проблемы распространения волн в диэлектрических анизотропных волноводах проведено с помощью метода Галеркина с использованием финитных кусочно-линейных базисных функций [1, 6]. Предложенный численный метод является эффективным способом нахождения приближенного решения задачи распространения электромагнитных волн. Проведен ряд численных экспериментов.

1. Постановка задачи

Рассмотрим трехмерное пространство \mathbb{R}^3 с цилиндрической системой координат $O\rho\varphi z$. Экранированный волновод с образующей, параллельной оси Oz , и круговым поперечным сечением радиуса r помещен в \mathbb{R}^3 . На рис. 1 представлена геометрия задачи. Волновод неограниченно продолжается в направлении z .

Задача о нормальных волнах волноведущей структуры состоит в отыскании нетривиальных решений однородной системы уравнений Максвелла в виде бегущей волны [7], т.е. с зависимостью $e^{im\varphi+i\gamma z}$ от координаты φ и z , вдоль которых структура регулярна:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon_0\varepsilon\mathbf{E}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega\mu_0\mathbf{H}, \end{cases} \quad (1)$$

$$\mathbf{E} = (E_\rho(\rho)\mathbf{e}_\rho + E_\varphi(\rho)\mathbf{e}_\varphi + E_z(\rho)\mathbf{e}_z)e^{im\varphi+i\gamma z},$$

$$\mathbf{H} = (H_\rho(\rho)\mathbf{e}_\rho + H_\varphi(\rho)\mathbf{e}_\varphi + H_z(\rho)\mathbf{e}_z)e^{im\varphi+i\gamma z}, \quad (2)$$

причем должны быть удовлетворены следующие условия: ограниченность энергии поля в любом конечном объеме волновода и обращение в нуль касательных составляющих электрического поля на поверхности идеального проводника

$$E_{\varphi}|_{\rho=r} = 0, \quad E_z|_{\rho=r} = 0, \quad (3)$$

здесь ϵ_0 и μ_0 – диэлектрическая и магнитная проницаемости вакуума.

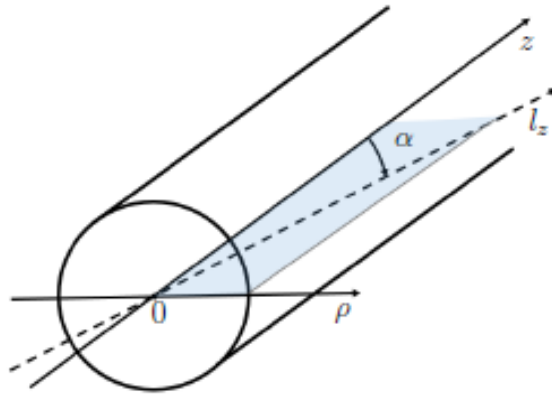


Рис. 1. Геометрия задачи. Оптическая ось l_z волновода лежит под углом α к z в плоскости ρz

Наиболее общий диэлектрический тензор ϵ для анизотропной среды без потерь является симметричным и имеет шесть независимых элементов ϵ_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$. Для простоты мы ограничимся рассмотрением случая, когда среда является одноосной, а оптическая ось l_z лежит в плоскости ρz под углом α к z . Ссылаясь на эти оси, диэлектрический тензор примет вид

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{bmatrix}, \quad (4)$$

где компоненты тензора определены следующим образом [8]:

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} &= \epsilon_{\rho}, \\ \epsilon_{22} &= \epsilon_{\rho} \cos^2 \alpha + \epsilon_z \sin^2 \alpha, \\ \epsilon_{33} &= \epsilon_{\rho} \sin^2 \alpha + \epsilon_z \cos^2 \alpha, \end{aligned} \quad (5)$$

ϵ_z и ϵ_{ρ} – некоторые константы.

Задача о нормальных волнах является задачей на собственные значения для системы уравнений Максвелла относительно спектрального параметра

γ – нормированной постоянной распространения (затухания) волноведущей структуры.

Запишем систему уравнений Максвелла (1) в координатном виде:

$$\begin{cases} i\frac{m}{\rho}H_z - i\gamma H_\varphi = -i\omega\varepsilon_0\varepsilon_{11}E_\rho, \\ i\gamma H_\rho - H'_z = -i\omega\varepsilon_0\varepsilon_{22}E_\varphi, \\ \frac{1}{\rho}(\rho H_\varphi)' - i\frac{m}{\rho}H_\rho = -i\omega\varepsilon_0\varepsilon_{33}E_z, \\ i\frac{m}{\rho}E_z - i\gamma E_\varphi = i\omega\mu_0 H_\rho, \\ i\gamma E_\rho - E'_z = i\omega\mu_0 H_\varphi, \\ \frac{1}{\rho}(\rho E_\varphi)' - i\frac{m}{\rho}E_\rho = i\omega\mu_0 H_z, \end{cases} \quad (6)$$

и выразим функции E_ρ , H_ρ , E_φ , H_φ через E_z и H_z из 1, 2, 4 и 5-го уравнений последней системы, получаем

$$\begin{aligned} E_\rho &= \frac{m\omega\mu_0}{\rho k_1^2} H_z - i\frac{\gamma}{k_1^2} E'_z, & H_\rho &= -i\frac{\gamma}{\rho k_2^2} H'_z - \frac{m\omega\varepsilon_0\varepsilon_{22}}{\rho k_2^2} E_z, \\ E_\varphi &= i\frac{\omega\mu_0}{k_2^2} H'_z + \frac{\gamma m}{\rho k_2^2} E_z, & H_\varphi &= \frac{\gamma m}{\rho k_1^2} H_z - i\frac{\omega\varepsilon_0\varepsilon_{11}}{k_1^2} E'_z, \end{aligned} \quad (7)$$

где $k_1^2 = \gamma^2 - k_0^2\varepsilon_{11}$, $k_2^2 = \gamma^2 - k_0^2\varepsilon_{22}$, $k_0^2 = \omega\mu_0\varepsilon_0$.

Из последних формул следует, что поле нормальной волны в волноводе может быть представлено при помощи двух скалярных функций:

$$u_e := iE_z(\rho), \quad u_m := H_z(\rho). \quad (8)$$

Тем самым задача сводится к нахождению функций u_e и u_m – компонент электрического и магнитного полей. Всюду $(\cdot)'$ обозначает дифференцирование по ρ .

Для компонент поля u_e и u_m имеем следующую задачу (задача P_m) на собственные значения: найти такие $\gamma \in \mathbb{R}$, что при заданном значении $m \in \mathbb{Z}$ существуют нетривиальные решения следующей системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{\rho u'_e}{k_1^2} \right)' - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\varepsilon_{33}}{\varepsilon_{11}} \rho^2 + \frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} \frac{m^2}{k_2^2} \right) u_e = \frac{\gamma m \omega \mu_0}{k_1^2 k_2^2} \left(\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} - 1 \right) u'_m, \\ \left(\frac{\rho u'_m}{k_2^2} \right)' - \frac{1}{\rho} \left(\rho^2 + \frac{m^2}{k_1^2} \right) u_m = -\frac{\gamma m \omega \varepsilon_0}{k_1^2 k_2^2} (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{11}) u'_e, \end{cases} \quad (9)$$

удовлетворяющие условиям сопряжения на границе r

$$u_e|_r = 0, u_m'|_r = 0 \quad (10)$$

и условиям ограниченности поля во всякой конечной области.

Зная компоненты поля u_e и u_m как решение задачи P_m , можно определить оставшиеся компоненты по формулам (7). Определенное так поле \mathbf{E}, \mathbf{H} удовлетворяет всем условиям (1)–(3).

2. Вариационное соотношение

Перепишем систему (9) следующим образом:

$$\begin{aligned} L_e u_e &:= p_e u_e'' + h_e u_e' - q_e u_e = f_e' u_m, \\ L_m u_m &:= p_m u_m'' + h_m u_m' - q_m u_m = f_m' u_e, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} p_e &= k_2^2 \rho^2, p_m = k_1^2 \rho^2, h_e = k_2^2 \rho, h_m = k_1^2 \rho, \\ q_e &= k_1^2 \left(k_2^2 \frac{\varepsilon_{33}}{\varepsilon_{11}} \rho^2 + \frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} m^2 \right), q_m = k_2^2 (k_1^2 \rho^2 + m^2), \\ f_e &= -\gamma m \omega \mu_0 \left(\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} - 1 \right) \rho, f_m = \gamma m \omega \varepsilon_0 (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{11}) \rho, \\ k_1^2 &= \gamma^2 - k_0^2 \varepsilon_{11}, k_2^2 = \gamma^2 - k_0^2 \varepsilon_{22}. \end{aligned}$$

Будем искать решения u_e и u_m задачи P_m в пространствах Соболева $H_0^1(0, r)$ и $H^1(0, r)$, соответственно, со скалярным произведением и нормой

$$(f, g)_1 = \int_0^r (f \bar{g}' + \bar{f} g') d\rho, \|f\|_1^2 = (f, f)_1 = \int_0^r (|f'|^2 + |f|^2) d\rho.$$

Определение 1. Если для заданного $m \in \mathbb{Z}$ существуют нетривиальные функции

$$u_e \in H_0^1(0, r), u_m \in H^1(0, r),$$

отвечающие некоторому $\gamma \in \mathbb{R}$, которые являются решением системы уравнений (11), а также удовлетворяют условиям (10), то γ называется характеристическим числом задачи P_m .

Основная цель работы: численное исследование свойств характеристических чисел γ задачи P_m .

Дадим другую вариационную формулировку задачи P_m . Умножим уравнения системы (11) соответственно на произвольные пробные функции v_e и v_m , считая их пока непрерывно дифференцируемыми на отрезке $[0, r]$. Используя формулу Грина, получаем

$$\begin{aligned}
\int_0^r vLud\rho &= \int_0^r pvu''d\rho + \int_0^r hvu'd\rho - \int_0^r qvud\rho = \\
&= pvu'|_0^r - \int_0^r (pv' + p'v)u'd\rho + \int_0^r hvu'd\rho - \int_0^r qvud\rho = \\
&= -\int_0^r (pv' + p'v)u'd\rho + \int_0^r hvu'd\rho - \int_0^r qvud\rho, \quad (12)
\end{aligned}$$

где $u = u_j$, $v = v_j$, $h = h_j$, $p = p_j$, $q = q_j$, $j = e$ или m .

Применяя полученную формулу (12) отдельно для первого и второго уравнений системы (11) на отрезке $[0, r]$ и складывая результаты, получим

$$\begin{aligned}
\int_0^r (v_e L_e u_e + v_m L_m u_m) d\rho &= -\int_0^r (q_e u_e v_e + q_m u_m v_m) d\rho + \\
+ \int_0^r ((h_e - p'_e) u'_e v_e + (h_m - p'_m) u'_m v_m) d\rho &- \int_0^r (p_e u'_e v'_e + p_m u'_m v'_m) d\rho. \quad (13)
\end{aligned}$$

Принимая во внимание правые части уравнений системы (11), имеем

$$\int_0^r (v_e L_e u_e + v_m L_m u_m) d\rho = \int_0^r (f_e u'_m v_e + f_m u'_e v_m) d\rho. \quad (14)$$

Из (13) с учетом (14), получаем

$$\begin{aligned}
\int_0^r (q_e u_e v_e + q_m u_m v_m) d\rho + \int_0^r (h_e u'_e v_e + h_m u'_m v_m) d\rho + \\
+ \int_0^r (p_e u'_e v'_e + p_m u'_m v'_m) d\rho + \int_0^r (f_e u'_m v_e + f_m u'_e v_m) d\rho. \quad (15)
\end{aligned}$$

Замечание 1. Вариационное соотношение (15) получено для гладких функций v_e и v_m .

Соотношение (15) распространяется на любые функции $v_e \in H_0^1(0, r)$, $v_m \in H^1(0, r)$ по непрерывности.

3. Проекционный метод

Используя проекционный метод [1, 2], сведем вариационное соотношение (15) к системе алгебраических уравнений. Во-первых, разделим отрезок $[0, r]$ на n отрезков длиной $h = r/n$. Определим набор из $(n-1)$ отрезков:

$$\Phi_i = [(i-1)h, (i+1)h], \quad i = 1, \dots, n-1,$$

и набор из n отрезков

$$\Psi_j = [(j-1)h, (j+1)h], \quad j = 1, \dots, n-1 \text{ и } \Psi_n = [(n-1)h, r].$$

Эти отрезки мы назовем *носителями*.

В соответствии со схемой проекционного метода необходимо ввести *базисные функции* φ_i и ψ_j , чтобы определить приближенное решение уравнения (15). Базисные функции определены для каждого носителя Φ_i и Ψ_j :

Базисные функции φ_i определены на Φ_i , имеют вид

$$\varphi_i = \begin{cases} \frac{\rho - (i-1)h}{h}, & \rho < ih, \\ -\frac{\rho - (i+1)h}{h}, & \rho > ih, \end{cases} \quad i = \overline{1, n-1}. \quad (16)$$

Базисные функции ψ_j определены на Ψ_j и имеют вид

$$\psi_j = \begin{cases} \frac{\rho - (j-1)h}{h}, & \rho < jh, \\ -\frac{\rho - (j+1)h}{h}, & \rho > jh, \end{cases} \quad j = \overline{1, n-1}, \quad (17)$$

и

$$\psi_n = \frac{\rho - r + h}{l}. \quad (18)$$

Так, определенные базисные функции учитывают краевые условия (10). Приближенные решения рассматриваемой задачи будем искать в виде

$$\begin{aligned} u_e^{(n)} &= \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \varphi_i, \\ u_m^{(n)} &= \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j \psi_j, \end{aligned} \quad (19)$$

где α_i, β_j – неизвестные коэффициенты.

Подставляя функции $u_e^{(n)}$ и $u_m^{(n)}$ с представлением (19) в вариационное соотношение (15), мы получим систему линейных уравнений относительно α_i и β_j (для фиксированного значения γ)

$$A(\gamma)x = 0, \quad (20)$$

где матрицы $A = A(\gamma)$ и x имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} A_{ee}^{1,1} & \dots & A_{ee}^{1,n-1} & A_{em}^{1,1} & \dots & A_{em}^{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{ee}^{n-1,1} & \dots & A_{ee}^{n-1,n-1} & A_{em}^{n-1,1} & \dots & A_{em}^{n,n} \\ \\ A_{me}^{1,1} & \dots & A_{me}^{1,n-1} & A_{mm}^{1,1} & \dots & A_{mm}^{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{me}^{n,1} & \dots & A_{me}^{n,n-1} & A_{mm}^{n,1} & \dots & A_{mm}^{n,n} \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix},$$

где

$$A_{ee}^{i,j} = \int_{\Phi_i} q_e \Phi_i \Phi_j d\rho + \int_{\Phi_i} p_e \Phi_i' \Phi_j' d\rho + \int_{\Phi_i} h_e \Phi_i' \Phi_j d\rho, \quad i, j = \overline{1, n-1};$$

$$A_{em}^{i,j} = \int_{\Phi_i} f_m \Phi_i' \Psi_j d\rho, \quad i = \overline{1, n-1}, j = \overline{1, n}, \quad A_{me}^{i,j} = \int_{\Psi_j} f_e \Psi_i' \Phi_j d\rho, \quad i = \overline{1, n}, j = \overline{1, n-1},$$

$$A_{mm}^{i,j} = \int_{\Psi_j} q_m \Psi_i \Psi_j d\rho + \int_{\Psi_j} h_m \Psi_i' \Psi_j d\rho + \int_{\Psi_j} p_m \Psi_i' \Psi_j' d\rho, \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Обозначим через Δ определитель матрицы A . Если интервал $[\underline{\gamma}, \overline{\gamma}]$ таков, что $\Delta(\underline{\gamma}) \times \Delta(\overline{\gamma}) < 0$, то это означает, что существует $\gamma = \tilde{\gamma} \in [\underline{\gamma}, \overline{\gamma}]$, которое является спектральным параметром (постоянной распространения) задачи P_m . Это значение может быть вычислено с любой заданной точностью.

4. Численные результаты

4.1. Точное решение

Проведем сравнение результатов численного решения задачи P_m с решением явного дисперсионного уравнения для конкретной структуры.

Пусть $\epsilon_\rho = \epsilon_z = \epsilon_c = \text{const}$, т.е. волновод заполнен однородной изотропной средой с постоянной диэлектрической проницаемостью. Для такой структуры известно точное дисперсионное уравнение, которое имеет вид

$$J_m(\tilde{k}_1 r) J_m'(\tilde{k}_1 r) = 0, \tag{21}$$

где $\tilde{k}_1^2 = k_0^2 \epsilon_c - \gamma^2$.

4.2. Численное исследование

Ниже приведены результаты численного решения задачи о распространяющихся электромагнитных волнах анизотропной волноведущей структуры (рис. 2).

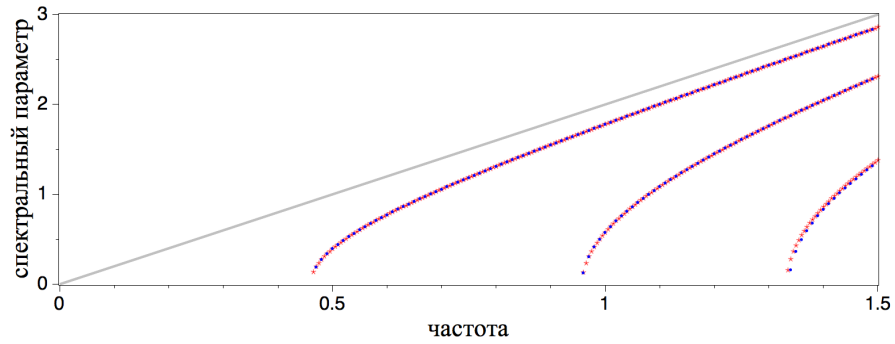


Рис. 2. Сравнение точного решения (звездочки) и решения задачи P_m , полученных с использованием проекционного метода (точки).
Значение параметров: $r = 2\text{mm}, \varepsilon_c = 4, m = 1$

На рис. 3 представлены дисперсионные кривые (графики зависимости $\gamma(\omega)$), построенные для разных значений угла α . При $\alpha = 0$ дисперсионные кривые не отличаются от известных кривых (сравнение с дисперсионными кривыми в задаче [1, 6]). При увеличении значения α дисперсионные кривые изменяют форму, появляются новые собственные значения (спектральные параметры) отсутствующие в случае $\alpha = 0$.

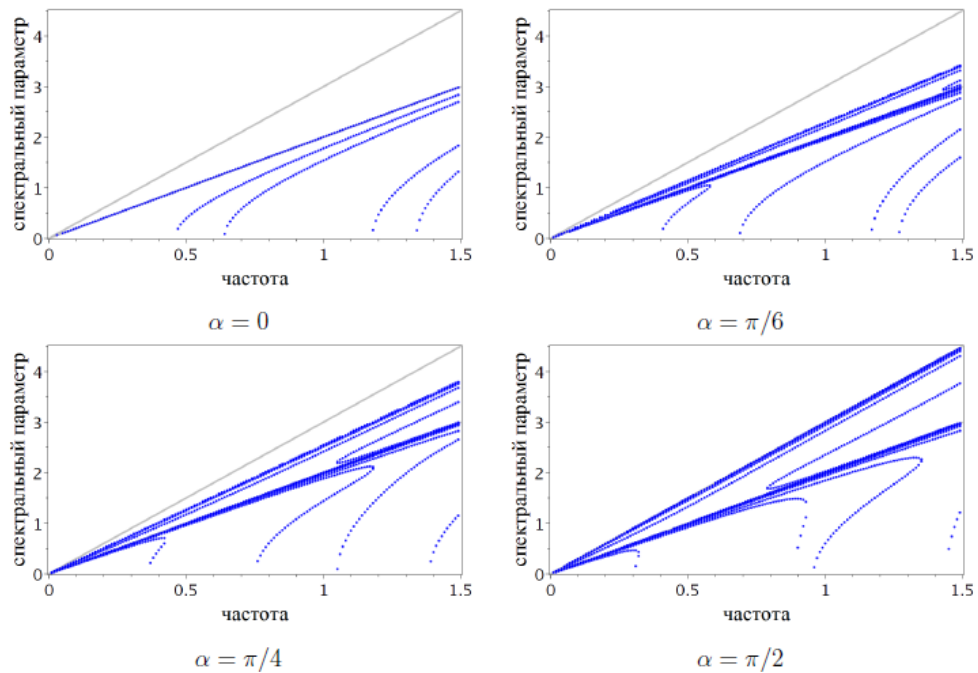


Рис. 3. Дисперсионные кривые. Значение параметров: $r = 2\text{ mm}, \varepsilon_\rho = 4, \varepsilon_z = 9, m = 1$

Заключение

Исходная задача о нормальных волнах анизотропной волноведущей структуры сведена к краевой задаче для продольных компонент электромаг-

нитного поля в пространствах Соболева. Для определения решения использована вариационная формулировка задачи.

Библиографический список

1. **Смолькин, Е. Ю.** Численный метод решения задачи распространения электромагнитных волн в цилиндрическом анизотропном неоднородном волноводе с продольным намагничиванием / Е. Ю. Смолькин, М. О. Снегур // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2017. – № 2 (42). – С. 32–43.
2. **Смирнов, Ю. Г.** О дискретности спектра в задаче о азимутальных симметричных волнах открытого неоднородного анизотропного волновода с продольным намагничиванием / Ю. Г. Смирнов, Е. Ю. Смолькин, М. О. Снегур // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2017. – № 3 (43). – С. 50–64.
3. **Lifante, G.** Numerical methods for optical waveguide devices / G. Lifante, F. Cusso and E. Cantelar // International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory. – Kharkiv, 2006. – P. 77–82.
4. **Saad, S. M.** Review of Numerical Methods for the Analysis of Arbitrarily-Shaped Microwave and Optical Dielectric Waveguides / S. M. Saad // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. – 1985. – Vol. 33, № 10. – P. 894–899.
5. **Baumert, J. C.** Numerical method for the calculation of mode fields and propagation constants in optical waveguides / J. C. Baumert and J. Hoffnagle // Journal of Lightwave Technology. – 1993. – Vol. 4, № 11. – P. 1626–1630.
6. **Смолькин, Е. Ю.** Численное исследование спектра нормальных волн открытого неоднородного волновода с круговым сечением / Е. Ю. Смолькин, М. О. Снегур, Э. А. Хорошева // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2017. – № 4 (44). – С. 76–86.
7. **Смирнов, Ю. Г.** Математические методы исследования задач электродинамики / Ю. Г. Смирнов. – Пенза : Инф.-изд. центр ПензГУ, 2009.
8. **Lu, M.** Anisotropic dielectric waveguides / M. Lu and M. M. Fejer // J. Opt. Soc. Am. A. – 1992. – Vol. 10, № 2. – P. 246–261.

References

1. Smol'kin E. Yu., Snegur M. O. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2017, no. 2 (42), pp. 32–43.
2. Smirnov Yu. G., Smol'kin E. Yu., Snegur M. O. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2017, no. 3 (43), pp. 50–64.
3. Lifante G., Cusso F., Cantelar E. *International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory*. Kharkiv, 2006, pp. 77–82.
4. Saad S. M. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*. 1985, vol. 33, no. 10, pp. 894–899.
5. Baumert J. C., Hoffnagle J. *Journal of Lightwave Technology*. 1993, vol. 4, no. 11, pp. 1626–1630.
6. Smol'kin E. Yu., Snegur M. O., Khorosheva E. A. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2017, no. 4 (44), pp. 76–86.
7. Smirnov Yu. G. *Matematicheskie metody issledovaniya zadach elektrodinamiki* [Mathematical methods of electrodynamic problems researching]. Penza: Inf.-izd. tsentr PenzGU, 2009.
8. Lu M., Fejer M. M. *J. Opt. Soc. Am. A*. 1992, vol. 10, no. 2, pp. 246–261.

Смолькин Евгений Юрьевич

кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, научно-исследовательский центр «Суперкомпьютерное моделирование в электродинамике», Пензенский государственный университет (Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: e.g.smolkin@hotmail.com

Smol'kin Evgeniy Yur'evich

Candidate of physical and mathematical sciences, research assistant, the research center "Supercomputer modeling in electrodynamics", Penza State University (40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Снегур Максим Олегович

студент, Пензенский государственный университет (Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: snegur.max15@gmail.com

Snegur Maksim Olegovich

Student, Penza State University (40 Krasnaya street, Penza, Russia)

УДК 517.958;621.372.8

Смолькин, Е. Ю.

Численное исследование спектра нормальных волн анизотропного диэлектрического волновода / Е. Ю. Смолькин, М. О. Снегур // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2018. – № 1 (45). – С. 72–82. – DOI 10.21685/2072-3040-2018-1-6.