A. D. Aleksandrov, Certain estimates for the Dirichlet problem, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1960, Volume 134, Number 5, 1001–1004

Доклады Академии наук СССР
1960. Том 134, № 5

МАТЕМАТИКА

Член-корреспондент АН СССР А. Д. АЛЕКСАНДРОВ

НЕКОТОРЫЕ ОЦЕНКИ, КАСАЮЩИЕСЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ

1. Рассмотрим в ограниченной области G изменения n переменных x_i квазилинейное уравнение

$$\sum a_{ik} u_{ik} = \varphi. \tag{1}$$

Предполагается, что матрица $\| a_{ik} \|$ не имеет отрицательных собственных значений (по крайней мере рассматриваются только такие решения u, для которых это так). Дальше X обозначает точку области G, а D — область, содержащуюся в G вместе с замыканием.

Рассматриваемые решения $u(X)$ предполагаются непрерывными и удовлетворяющими одному из следующих условий:

(I) u имеет обобщенные вторые производные по С. Л. Соболеву, суммируемые с n-й степенью во всякой D.

(II) u дважды дифференцируемо.

2. Пусть L—m-мерная плоскость, проходящая через начало координат O, и T — какая-либо $(n-1)$-мерная плоскость, не проходящая через O и пересекающая L. Вращая L вокруг O так, чтобы пересечение LT однозначно зачеркивало T, получим $(n-m)$-мерное множество плоскостей L, которое назовем пучком. В пучке естественно определяется $(n-m)$-мерная мера множества плоскостей L.

Далее, обозначим через a_L главный минор матрицы $\| a_{ik} \|$, отвечающий индексам $1, \ldots, m$, если оси $x_1, \ldots, x_m$ путем поворота всех осей располагаются в плоскости L.

Во всех дальнейших теоремах подразумевается следующее:

Если имеются в виду решения уравнения (1) *с условием* (I), *то фигурирующие в теореме соотношения, зависящие от L, выполнены для множества $\{L\}$, имеющего в каком-либо пучке положительную меру.*

Если же иметь в виду решения с условием (II), *то такие соотношения достаточно считать выполненными для какой-либо одной плоскости L.*

Для каждой плоскости L оси координат поворачиваются так, что оси $x_1, \ldots, x_m$ параллельны L. Размерность m плоскостей L всякий раз любая данная, $1 \leqslant m \leqslant n$. При $m = n$ L сводится ко всему пространству и оговорки о множестве $\{L\}$ и выборе осей отпадают, а $a_L = \operatorname{Det} \| a_{ik} \|$.

Если U — область изменения n переменных $y_1, \ldots, y_n$, то под $\int\limits_U f(y_1, \ldots, y_m)\, dy_1 \ldots dy_m$ будем понимать интеграл по всем значениям $(y_1, \ldots, y_m)$, имеющимся в U.

3. Все дальнейшие результаты основаны на следующей лемме.

Пусть $\bar{u}(X)$ — выпуклая (вогнутая) функция, «натянутая на $u(X)$ снизу (сверху)», т. е. наибольшая (наименьшая) из выпуклых (вогнутых) функций $v(X) \leqslant u(x)$ $(v \geqslant u)$, $X \in D$. Пусть $\psi(D, u)$ — ее нормальное изображение (определение см., например, ([1])). При условиях (I) или (II), наложенных на $u, \psi(D, u)$ с точностью до множества меры нуль есть множество точек с координатами $\bar{u}_i(X)$, $X \in D$.

Лемма. *Пусть для данного решения* $u(X)$ *уравнения* (1) *выполнено неравенство*

$$a_L^{-1/m}\varphi \leqslant P_L^{*}(x_1, \ldots, x_m)\, Q_L^{*}(u_1, \ldots, u_n), \tag{2}$$

где $P_L, Q_L \geqslant 0$. *Тогда для всякой* D *и для почти всех* L, *для которых верно* (2),

$$\int\limits_D P_L^m\, dx_1 \ldots dx_m \geqslant m^m \int\limits_{\psi(D,\,u)} Q_L^{-m}(u_1, \ldots, u_m, 0, \ldots, 0)\, du_1 \ldots du_m, \tag{3}$$

где $\psi(D, u)$ *берется для выпуклой* $\bar{u}$, *натянутой на* $u(X)$ *снизу. Если же* $a_L^{-1/m}\varphi \geqslant -P_L Q_L^{*}$, *то (3) верно для вогнутой* $\bar{u}$, *натянутой на* $u(X)$ *сверху*.

Неравенство (2) подразумевается выполненным с точностью до множеств меры нуль, так что не исключено, например, что a_L где-то обращается в нуль. Интегралы в (3) могут быть бесконечными.

Когда решение $u(X)$ внутри области далеко отходит от значений на краю, то $\psi(D, u)$ увеличивается. Поэтому (3) неявно содержит оценку для отклонений $u(X)$ от краевых значений.

4. Теорема 1. *Пусть для данного решения* $u(X)$ *уравнения* (1) *выполнено* (2), *причем* P_L^m *суммируема по всякой* D, *а* $Q(u_1, \ldots, u_m, 0, \ldots, 0)$ *не суммируемо в плоскости* $u_1, \ldots, u_m$ *ни в какой окрестности начала. Тогда* $u(X)$ *достигает точной нижней границы на краю* G, *и если* $a_L^{-1/m}\varphi \geqslant -P_L Q_L$ *с аналогичными условиями, то* $u(X)$ *достигает верхней границы также на краю.*

Из теоремы 1 можно вывести условия единственности решения задачи Дирихле. Так, например, имеет место

Теорема 2. *Задача Дирихле для уравнения* (1) *имеет не более одного решения с условием* (I), *если*:

1) $a = \operatorname{Det}\|a_{ik}\| > \mathrm{const} > 0$ (*что можно считать выполненным, если* $a > 0$, *стоит лишь разделить* (1) *на* $a^{1/n}$);

2) a_{ik} *не зависят от* u, *а* φ — *не убывающая по* u;

3) *во всякой области* D *при ограниченных* u, u_j

$$|a_{ik}(u_j + \Delta u_j, x_j) - a_{ik}(u_j, x_j)| \leqslant M\left[\sum \Delta u_j^2\right]^{1/2},$$

$$|\varphi(u_j + \Delta u_j, u, x_j) - \varphi(u_j, u, x_j)| \leqslant N(x_j)\left[\sum \Delta u_j^2\right]^{1/2},$$

где M — *постоянная, а* $N(x_j)$ *суммируема с* n-*й степенью* (M *и* N *зависят, вообще говоря, от* D *и границ для* u, u_j).

5. Теорема 3. *Пусть для некоторых решений* $u(X)$ *уравнения* (1) *выполнено неравенство* (2) *с одинаковыми для всех них функциями* P_L, Q_L *и*

$$\int\limits_G P_L^m\, dx_1 \ldots dx_m < m^m \int\limits_{-\infty}^{\infty} \ldots \int\limits_{-\infty}^{\infty} Q_L^{-m}(u_1, \ldots, u_m, 0, \ldots, 0)\, du_1 \ldots du_m,$$

что заведомо верно, если левый интеграл конечен, а правый бесконечен. Тогда для всех таких решений величина $\inf\limits_G u(X) - \inf\limits_\Gamma u(X)$ *ограничена снизу одним и тем же числом. Аналогично* $\sup\limits_G u(X) - \sup\limits_\Gamma u(X)$ *ограничено сверху, если* $a_L^{-1/m}\varphi \geqslant -P_L Q_L$ *при тех же условиях на* P_L, Q_L.

6. Рассмотрим, в частности, линейное уравнение

$$L(u) \equiv \sum a_{ik} u_{ik} + \sum b_i u_i + cu = f. \tag{4}$$

Введем обозначение: $\left[\sum b_i\right]^{1/2} = b$ и для любой функции $g(x_1, \ldots, x_n)$ при условии, что оси $x_1, \ldots, x_m$ лежат в плоскости L, положим $g_L(x_1, \ldots, x_m) = \sup\limits_{(x_{m+1}, \ldots, x_n)} g(x_1, \ldots, x_n)$.

Из теоремы 1 легко выводится:

Теорема 4. *Пусть в уравнении* (4) $c \leqslant 0$ *и* $a_L^{-1} b_L^m$ *суммируемо по каждой области* D. *Тогда при* $f = 0$ *никакое решение не может достигать внутри области отрицательного (положительного) минимума (максимума), не достигая его на границе, и задача Дирихле поэтому не может иметь более одного решения.*

При $m = n$ теорема 4 сводится к тому, что при $c \leqslant 0$ единственность решения задачи Дирихле обеспечивается суммируемостью $a^{-1/n}b$ с n-й степенью, где $a = \operatorname{Det}\|a_{ik}\|$. Вместе с тем простые примеры показывают, что это требование уже нельзя заменить суммируемостью с какой бы то ни было степенью, меньшей n. Кроме того, как показывает пример, указанный мне Ю. Г. Решетником, предполагаемую нами суммируемость обобщенных производных u_{ik} с n-й степенью также нельзя заменить суммируемостью с меньшей степенью. Наконец, в теорему входит только a_L (при $m = n$, соответственно, $\operatorname{Det}\|a_{ik}\|$), что существенно при отказе от ограниченности коэффициентов a_{ik}. Таким образом, теорема 4 дает в известном смысле минимальные условия единственности решения задачи Дирихле при $c \leqslant 0$.

7. Введем обозначения: $c_+ = c$ при $c > 0$, и $c_+ = 0$, при $c \leqslant 0$,

$$B_L = \int\limits_G \frac{b_L^m}{a_L} dx_1 \ldots dx_m, \quad C_L = \int\limits_G \frac{c_{+L}^m}{a_L} dx_1 \ldots dx_m, \quad F_L = \int\limits_G \frac{|f|_L^m}{a_L} dx_1 \ldots dx_m.$$

Обозначим также H_L выпуклую оболочку проекции области G на плоскости L.

Теорема 5. *Существует такая убывающая положительная функция* $\Phi(B_L; H_L)$ *, *что единственность решения задачи Дирихле для уравнения* (4) *обеспечивается условием* $C_L < \Phi(B_L; H_L)$.

Так как $\Phi > 0$, то при $C_L = 0$ это условие выполнено само собой, коль скоро $B^L < \infty$. (Это последнее замечание обеспечивает единственность решения задачи Дирихле при $c \leqslant 0$, если $a_L^{-1} b_L^m$ суммируемо по всей области G, что, однако, сильнее условия теоремы 4.)

Можно дать явное выражение функции Φ, но оно довольно сложно. При $B_L = 0$, т. е. $b = 0$, условию $C_L < \Phi$ можно придать простой вид:

$$C_L \leqslant m^m \varkappa_m^2 V_L^{-1}, \tag{5}$$

где $\varkappa_m$ — объем m-мерного единичного шара, а V_L — объем m-мерного эллипсоида, содержащего H_L.

Теорема 5 очевидным образом включает оценку снизу для первого собственного значения уравнения $L(u) + \lambda u = 0$.

Теоремы, подобные теореме 5, хорошо известны для эллиптических уравнений при более жестких предположениях о коэффициентах и характере решения. Известны оценки в зависимости от объема области (см., например, ([2], [3])). Заключающаяся в теореме 5 оценка зависит от выпуклой оболочки области, а не от объема самой области; но для выпуклых областей характер оценки тот же, что в указанных известных случаях.

---

* Т. е., в частности, при $H_L' \supset H_L''$ $\Phi(B_L, H_L') \leqslant \Phi(B_L, H_L'')$.

8. Теорема 6. *Если для решения* $u(X)$ *уравнения* (4) *положить* $h = \inf_{\Gamma} u(X) - \inf_{G} u(X)$, $h_\Gamma = \inf_{\Gamma} u(X)$, *то*

$$h \leqslant \Psi(B_L,\ (1 + h_\Gamma^n) C_L,\ F_L;\ H_L),$$

где Ψ — *возрастающая функция всех своих аргументов.*

Та же оценка верна для $h = \sup_{G} u(X) - \sup_{\Gamma} u(X)$ при $h_\Gamma = \sup_{\Gamma} u(X)$.

В простейшем случае, когда $b = c_+ = 0$, оценка может быть представлена в виде

$$h^m \leqslant m^{-m} \varkappa_m^{-2} V_L F_L,$$

где $\varkappa_m$ и V_L те же, что в (5).

9. Отметим еще следующий результат.

Теорема 7. *Если уравнение* (4) *с* $b = f = 0$ *имеет нетривиальное, знакопостоянное решение* $u(X)$ *с краевым условием* $u|_\Gamma = 0$, *то, полагая* $\sup|u| = h$, *имеем*

$$\int_G \left(\frac{|u|_L}{h}\right)^{2m} dx_1 \ldots dx_m > m^{m/2} \varkappa_m V_L^{-1/2} \left[\int_G \frac{|c|_L^{2m}}{a_L^2} dx_1 \ldots dx_m\right]^{-1}. \quad (6)$$

Это означает, что $u(X)$ не может иметь слишком выделяющегося максимума (минимума). Подобное же утверждение верно при $b \neq 0$, но тогда оценка для левой части (6) получается более сложной и включает также B_L.

Поступило
18 VII 1960

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Д. Александров, Вестн. ЛГУ, № 1 (1957). [2] И. Г. Петровский, Лекции об уравнениях в частных производных, 1950, § 37. [3] G. Polya, G. Szegö, Ann. of Math. Studies, № 27 (1951).