



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

L. Yu. Kolotilina, Bounds for the singular values of a matrix involving its sparsity pattern, *Zap. Nauchn. Sem. POMI*, 2005, Volume 323, 57–68

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.169

February 18, 2025, 19:27:13



Л. Ю. Колотилина

**ОЦЕНКИ СИНГУЛЯРНЫХ ЗНАЧЕНИЙ,
УЧИТЫВАЮЩИЕ СТРУКТУРУ
РАЗРЕЖЕННОСТИ МАТРИЦЫ**

§1. ВВЕДЕНИЕ

В работе представлены верхние и нижние оценки для сингулярных значений матрицы, учитывающие ее структуру разреженности или, что то же самое, структуру ее ориентированного графа. Полученные оценки улучшают соответствующие результаты из [5] и [6] и базируются на следующих теоремах.

Теорема 1.1 [2, следствие 5.1 и замечание 5.3]. Пусть $A = (a_{ij})$ – неотрицательная матрица порядка $n \geq 1$ и пусть $0 \leq \alpha \leq 1$. Тогда для спектрального радиуса $\rho(A)$ матрицы A (т.е. ее перроновского корня) справедлива верхняя оценка

$$\rho(A) \leq \max_{i,j:a_{ij} \neq 0} \{r_i(A)^\alpha r_j(A)^{1-\alpha}\}.$$

Теорема 1.2 [4, следствие 7.2 при $k = 2$]. Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geq 2$. Тогда

$$\begin{aligned} \text{Спек } A \subseteq & \bigcup_{i \neq j: a_{ij} \neq 0} \{z \in \mathbb{C} : |a_{ii} - z| |a_{jj} - z| \leq r'_i(A) r'_j(A)\} \\ & \bigcup \{a_{ii}, 1 \leq i \leq n : A[i] \text{ – неприводимая компонента } A\}. \end{aligned}$$

Здесь и далее мы используем следующие обозначения: если $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{m \times n}$, то

$$r_i(A) = \sum_{j=1}^n |a_{ij}|, \quad r'_i(A) = r_i(A) - |a_{ii}|, \quad i = 1, \dots, m;$$

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ 03-01-00349 и НШ 2268.2003.1.

$$c_j(A) = \sum_{i=1}^m |a_{ij}|, \quad c'_j(A) = c_j(A) - |a_{jj}|, \quad j = 1, \dots, n.$$

Если A – квадратная матрица, т.е. $m = n$, то через $\text{Spes } A$ мы обозначаем спектр A , так что

$$\text{Spes } A = \{\lambda_i(A), 1 \leq i \leq n\},$$

где через $\lambda_i(A)$ обозначаются собственные значения A . Кроме того, на протяжении всей статьи мы предполагаем, что сингулярные значения матриц, а также собственные значения квадратных матриц с вещественным спектром всегда упорядочены в порядке невозрастания, т.е.

$$\sigma_1(A) \geq \dots \geq \sigma_q(A), \quad q = \min\{m, n\},$$

и

$$\lambda_1(A) \geq \dots \geq \lambda_n(A).$$

§2. ВЕРХНИЕ ОЦЕНКИ

Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $m, n \geq 1$, – произвольная матрица. Упорядочим $m+n$ величин $r_i(A)$, $i = 1, \dots, m$, и $c_j(A)$, $j = 1, \dots, n$, в порядке невозрастания и обозначим полученные суммы модулей по линиям A через

$$l_1(A) \geq l_2(A) \geq \dots \geq l_{m+n}(A) \geq 0.$$

Через A' обозначим матрицу, полученную в результате удаления из A любой линии (строки или столбца), такой что соответствующая сумма модулей компонент совпадает с $l_1(A)$, и положим

$$A_{(0)} = A; \quad A_{(k)} = A'_{(k-1)}, \quad k = 1, \dots, \min\{m, n\} - 1.$$

В этих обозначениях справедлива следующая теорема.

Теорема 2.1 [5, теорема 3.7.7]. Пусть $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$. Тогда при $k = 1, \dots, \min\{m, n\}$,

$$\sigma_k(A) \leq \sigma_1(A_{(k-1)}) \leq \left[\max_i r_i(A_{(k-1)}) \max_j c_j(A_{(k-1)}) \right]^{1/2}. \quad (2.1)$$

В частности,

$$\sigma_1(A) \leq \left[\max_i r_i(A) \max_j c_j(A) \right]^{1/2}. \quad (2.2)$$

Ниже мы установим оценки, улучшающие оценки теоремы 2.1. Для этого введем в рассмотрение вспомогательную эрмитову матрицу

$$B = \begin{bmatrix} 0 & A \\ A^* & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{(m+n) \times (m+n)}.$$

Как хорошо известно, отличные от нуля собственные значения матрицы B совпадают с числами $\pm\sigma_i(A)$, $i = 1, \dots, \text{rank } A$, и, в частности,

$$\sigma_1(A) = \rho(B). \quad (2.3)$$

Кроме того, в силу леммы Виландта (см., например, [7, II.5.7.5] или [4, лемма 2.1]), мы также имеем

$$\rho(B) \leq \rho(|B|). \quad (2.4)$$

Следовательно,

$$\sigma_1(A) \leq \rho(|B|), \quad (2.5)$$

и наибольшее сингулярное значение матрицы A можно ограничить сверху с помощью любой верхней оценки для перроновского корня неотрицательной эрмитовой матрицы $|B|$.

Воспользовавшись неравенством (2.5) и применив теорему 1.1 к матрице $|B|$, мы легко получаем следующий результат.

Лемма 2.1. Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $m, n \geq 1$, и пусть $0 \leq \alpha \leq 1$. Тогда

$$\sigma_1(A) \leq \max_{i,j: a_{ij} \neq 0} \{r_i(A)^\alpha c_j(A)^{1-\alpha}, r_i(A)^{1-\alpha} c_j(A)^\alpha\}; \quad (2.6)$$

в частности (при $\alpha = 1/2$),

$$\sigma_1(A) \leq \max_{i,j: a_{ij} \neq 0} \{r_i(A) c_j(A)\}^{1/2}. \quad (2.7)$$

Заметим, что оценка (2.7) улучшает оценку (2.2) и явно учитывает структуру разреженности матрицы A .

Для того, чтобы получить улучшенные верхние оценки для остальных сингулярных значений, мы используем следующий прием. Пусть матрица $A' = (a'_{ij})$ получена из A удалением произвольной строки или произвольного столбца. Тогда, очевидно, справедливо неравенство

$$\max_{i,j: a'_{ij} \neq 0} \{r_i(A') c_j(A')\} \leq \max_{i,j: a_{ij} \neq 0} \{r_i(A) c_j(A)\}. \quad (2.8)$$

Обозначим

$$A^{(0)} = A; \quad A^{(k)} = (a_{ij}^{(k)}) = \left(A^{(k-1)} \right)', \quad k = 1, \dots, \min\{m, n\} - 1.$$

Для того чтобы установить соотношения между сингулярными значениями матриц A и $A^{(k)}$, мы воспользуемся следующим известным результатом.

Лемма 2.2 (см., напр., [5, следствие 3.1.3]). Пусть $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $m, n \geq 1$. Тогда

$$\sigma_i(A) \geq \sigma_i(A_r) \geq \sigma_{i+r}(A), \quad i = 1, \dots, \min\{m, n\},$$

где матрица A_r получена удалением в совокупности r строк и/или столбцов из A , и для $X \in \mathbb{C}^{p \times q}$ мы полагаем $\sigma_j(X) = 0$ при $j > \min\{p, q\}$.

При $i = 1$ и $r = k - 1$ из леммы 2.2 вытекают неравенства

$$\sigma_k(A) \leq \sigma_1(A_{k-1}), \quad k = 1, \dots, \min\{m, n\}. \quad (2.9)$$

Используя введенные обозначения, неравенство (2.9) и лемму 2.1, мы немедленно получаем следующую последовательность (которая является невозрастающей в силу (2.8)) верхних оценок для последовательных сингулярных значений матрицы A , улучшающих оценки теоремы 2.1.

Теорема 2.2. Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $m, n \geq 1$. Тогда для $k = 1, \dots, \min\{m, n\}$ справедливы неравенства

$$\sigma_k(A) \leq \sigma_1(A^{(k-1)}) \leq \max_{i,j: a_{ij}^{(k-1)} \neq 0} \left\{ r_i(A^{(k-1)}) c_j(A^{(k-1)}) \right\}^{1/2}.$$

Замечание 2.1. Ясно, что верхняя оценка для $\sigma_1(A)$, полученная применением к $|B|$ верхней оценки Фробениуса

$$\rho(|B|) \leq \max_{1 \leq i \leq m+n} r_i(B) = \max \left\{ \max_{1 \leq i \leq m} r_i(A), \max_{1 \leq j \leq n} c_j(A) \right\}, \quad (2.10)$$

хуже, чем оценка (2.2). Далее, поскольку матрица $|B|$ симметрична, верхняя оценка Островского

$$\rho(|B|) \leq \max_{1 \leq i \leq m+n} \left\{ r_i(B)^\alpha c_i(B)^{1-\alpha} \right\}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1,$$

совпадает с (2.10). Наконец, из структурной симметрии матрицы $|B|$ следует (см. [3, замечание 2.2]), что оценка

$$\rho(|B|) \leq \max_{i,j: b_{ij} \neq 0} \{r_i(B) r_j(B)\}^{1/2},$$

даваемая теоремой 1.1, совпадает с контурной оценкой (см. [1] или [3, следствие 2.2])

$$\rho(|B|) \leq \max_{\gamma \in \mathfrak{C}(B)} \left\{ \prod_{i \in \bar{\gamma}} r_i(B) \right\}^{1/|\gamma|}$$

(где $\mathfrak{C}(B)$ – множество простых контуров в ориентированном графе матрицы B , $\bar{\gamma}$ – носитель γ , и $|\gamma|$ – это длина γ), так же как и с соответствующими верхними оценками для $\rho(|B|)$, зависящими от путей, которые были предложены в [2].

§3. Нижние оценки

В этом параграфе будут предложены улучшенные варианты следующих нижних оценок для наименьшего сингулярного значения квадратной матрицы.

Теорема 3.1 [6, теорема 3]. Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geq 2$. Тогда

$$\sigma_n(A) \geq \frac{1}{2} \min_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} \left\{ \operatorname{Re} a_{ii} + \operatorname{Re} a_{jj} - \sqrt{(\operatorname{Re} a_{ii} - \operatorname{Re} a_{jj})^2 + 4r'_i(H(A))r'_j(H(A))} \right\}. \quad (3.1)$$

Здесь и ниже

$$H(A) = (A + A^*)/2$$

– это эрмитова часть матрицы A .

Теорема 3.2 [6, следствие 1]. Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geq 2$. Тогда

$$\sigma_n(A) \geq \frac{1}{2} \min_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} \left\{ |a_{ii}| + |a_{jj}| - \sqrt{(|a_{ii}| - |a_{jj}|)^2 + [r'_i(A) + c'_i(A)][r'_j(A) + c'_j(A)]} \right\}. \quad (3.2)$$

Также мы обобщим предложенные оценки на случай прямоугольных матриц и представим нижние оценки для всех сингулярных значений.

Следующая лемма вытекает из теоремы 1.2.

Лемма 3.1. Пусть $H = (h_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geq 1$, — эрмитова матрица. Определим величины¹

$$\alpha(H) = \frac{1}{2} \min_{i \neq j, h_{ij} \neq 0} \left\{ h_{ii} + h_{jj} - \sqrt{(h_{ii} - h_{jj})^2 + 4r'_i(H)r'_j(H)} \right\}, \quad (3.3)$$

$$\beta(H) = \min_{i: r'_i(H)=0} h_{ii}. \quad (3.4)$$

Тогда

$$\text{либо } \lambda_n(H) = \beta(H), \quad \text{либо } \lambda_n(H) \geq \alpha(H). \quad (3.5)$$

Доказательство. Применяя теорему 1.2 к эрмитовой матрице H , собственные значения которой вещественны, и используя очевидное неравенство

$$\lambda_n(H) \leq \min_{1 \leq i \leq n} h_{ii},$$

мы приходим к заключению, что либо

$$\lambda_n(H) = \beta(H),$$

либо при некоторых i и j , $i \neq j$, таких что $h_{ij} \neq 0$, справедливо неравенство

$$(h_{ii} - \lambda_n(H))(h_{jj} - \lambda_n(H)) \leq r'_i(H) r'_j(H).$$

В последнем случае легко видеть, что $\lambda_n(H)$ удовлетворяет квадратичному неравенству

$$\lambda_n(H)^2 - \lambda_n(H)(h_{ii} + h_{jj}) + h_{ii} h_{jj} - r'_i(H)r'_j(H) \leq 0,$$

из которого немедленно следует, что $\lambda_n(H) \geq \alpha(H)$. \square

¹Мы постулируем, что минимум по пустому множеству равен $+\infty$.

Следствие 3.1. Пусть $H = (h_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geq 1$, — эрмитова матрица. Тогда

$$\lambda_n(H) \geq \min \left\{ \alpha(H), \min_{1 \leq i \leq n} h_{ii} \right\}.$$

Доказательство. Сперва, воспользовавшись леммой 3.1, мы покажем, что

$$\lambda_n(H) \geq \min\{\alpha(H), \beta(H)\}. \quad (3.6)$$

Действительно, если $\alpha(H) \geq \beta(H)$, то либо

$$\lambda_n(H) = \beta(H) = \min\{\alpha(H), \beta(H)\},$$

либо

$$\lambda_n(H) \geq \alpha(H) \geq \beta(H) = \min\{\alpha(H), \beta(H)\}.$$

В противном случае, если $\alpha(H) < \beta(H)$, то либо

$$\lambda_n(H) = \beta(H) > \alpha(H) = \min\{\alpha(H), \beta(H)\},$$

либо

$$\lambda_n(H) \geq \alpha(H) = \min\{\alpha(H), \beta(H)\}.$$

Таким образом, неравенство (3.6) установлено.

Заметим теперь, что, в силу (3.3),

$$\alpha(H) \leq \min_{i: r'_i(H) \neq 0} h_{ii}. \quad (3.7)$$

Следовательно, если $\alpha(H) \leq \beta(H) = \min_{i: r'_i(H) = 0} h_{ii}$, то по (3.7) мы также имеем

$$\alpha(H) \leq \min_{1 \leq i \leq n} h_{ii},$$

и из неравенства (3.6) следует, что

$$\lambda_n(H) \geq \alpha(H) = \min\{\alpha(H), \min_{1 \leq i \leq n} h_{ii}\}.$$

В противном случае, если $\alpha(H) > \beta(H)$, то по (3.6) мы имеем

$$\lambda_n(H) \geq \beta(H) \geq \min_{1 \leq i \leq n} h_{ii} = \min\{\alpha(H), \min_{1 \leq i \leq n} h_{ii}\},$$

что и завершает доказательство следствия 3.1. \square

Следующие свойства собственных значений эрмитовой матрицы (неравенства Коши) хорошо известны.

Лемма 3.2 (см., напр., [7, П.4.4.7]). Пусть $H \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geq 1$, – эрмитова матрица и пусть $H_{[k]}$ – произвольная главная подматрица порядка k , $1 \leq k < n$, матрицы H . Тогда

$$\lambda_i(H) \geq \lambda_i(H_{[k]}), \quad i = 1, \dots, k,$$

и, в частности,

$$\lambda_k(H) \geq \lambda_k(H_{[k]}).$$

Теперь определим последовательность вложенных главных подматриц эрмитовой матрицы $H \in \mathbb{C}^{n \times n}$ следующим образом. Через $H' = (h'_{ij})$ обозначим подматрицу, полученную из матрицы H удалением произвольной строки и одноименного столбца. Очевидно,

$$\min\{\alpha(H), \min_{1 \leq i \leq n} h_{ii}\} \leq \min\{\alpha(H'), \min_{1 \leq i \leq n} h'_{ii}\}. \quad (3.8)$$

Положим

$$H^{[n]} = H; \quad H^{[k]} = (H^{[k+1]})', \quad k = n-1, \dots, 1. \quad (3.9)$$

В этих обозначениях следствие 3.1 и лемма 3.2 немедленно дают нам следующие нижние оценки для собственных значений эрмитовой матрицы.

Теорема 3.3. Пусть $H = (h_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geq 1$, – эрмитова матрица и пусть последовательность $H^{[k]} = \{h_{ij}^{[k]}\}$ ее главных $k \times k$ подматриц определена в соответствии с (3.9). Тогда

$$\lambda_k(H) \geq \lambda_k(H^{[k]}) \geq \min\left\{\alpha(H^{[k]}), \min_{i \in K} \{h_{ii}^{[k]}\}\right\}, \quad k = n, n-1, \dots, 1, \quad (3.10)$$

где K – это множество индексов, специфицирующих подматрицу $H^{[k]}$, т.е. $H^{[k]} = H[K]$.

Замечание 3.1. Неравенство (3.8) очевидно обеспечивает, что правые части соотношений (3.10) образуют неубывающую последовательность нижних оценок для собственных значений $\lambda_n(H), \dots, \lambda_1(H)$ соответственно.

Следующая хорошо известная лемма позволяет перенести оценки теоремы 3.3 с собственных значений эрмитовой матрицы на сингулярные значения произвольной квадратной матрицы.

Лемма 3.3 (см., напр., [5, следствие 3.1.5]). Пусть $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geq 1$. Тогда

$$\sigma_i(A) \geq \lambda_i(H(A)), \quad i = 1, \dots, n.$$

Из леммы 3.3 и теоремы 3.3 немедленно вытекает следующий результат, обобщающий и уточняющий теорему 3.1.

Теорема 3.4. Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geq 1$. Тогда

$$\sigma_k(A) \geq \min \left\{ \alpha(H(A^{[k]})), \min_{i \in K} \operatorname{Re} a_{ii} \right\}, \quad k = n, \dots, 1,$$

где $A^{[k]}$, $k = n, \dots, 1$, – это произвольная последовательность вложенных главных $k \times k$ подматриц матрицы A ; K – множество индексов, специфицирующее подматрицу $A^{[k]}$, т.е. $A^{[k]} = A[K]$, и, в соответствии с (3.3),

$$\alpha(H(A^{[k]})) = \frac{1}{2} \min_{\substack{i \neq j: i, j \in K \\ a_{ij} + \bar{a}_{ji} \neq 0}}$$

$$\left\{ \operatorname{Re} a_{ii} + \operatorname{Re} a_{jj} - \sqrt{(\operatorname{Re} a_{ii} - \operatorname{Re} a_{jj})^2 + 4r'_i(H(A^{[k]})) r'_j(H(A^{[k]}))} \right\}.$$

Далее, следуя подходу, использованному при доказательстве следствия 3.7 в [5], от заданной матрицы A перейдем к матрице $B = SA = (b_{ij})$, где

$$S = \operatorname{diag}(s_1, \dots, s_n), \quad s_i = \begin{cases} |a_{ii}|/a_{ii}, & \text{если } a_{ii} \neq 0, \\ 1, & \text{если } a_{ii} = 0. \end{cases} \quad (3.11)$$

Ясно, что

$$\{H(B)\}_{ii} = |a_{ii}|, \quad i = 1, \dots, n.$$

Поскольку, с другой стороны, сингулярные значения матрицы B совпадают с сингулярными значениями A , то, применяя теорему 3.4 к матрице B , мы получаем следующий результат.

Следствие 3.2. Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geq 1$, пусть унитарная диагональная матрица S определена, как в (3.11), и пусть $(SA)^{[k]}$, $k = n, \dots, 1$, – произвольная последовательность вложенных главных $k \times k$ подматриц матрицы SA . Тогда

$$\sigma_k(A) \geq \min \left\{ \frac{1}{2} \min_{\substack{i \neq j: i, j \in \mathbb{K} \\ \{(SA)_{ij} + \overline{\{(SA)_{ji}}\} \neq 0}} \left\{ |a_{ii}| + |a_{jj}| \right. \right. \\ \left. \left. - \sqrt{(|a_{ii}| - |a_{jj}|)^2 + 4r'_i(H(SA)^{[k]}) r'_j(H(SA)^{[k]})} \right\}, \min_{i \in \mathbb{K}} |a_{ii}| \right\}, \\ k = n, \dots, 1,$$

где $(SA)^{[k]} = (SA)[\mathbb{K}]$.

В силу неравенства треугольника и унитарности матрицы S , мы имеем

$$r'_i(H(SA)^{[k]}) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{j \in \mathbb{K} \\ j \neq i}} |s_i a_{ij} + \overline{s_j a_{ji}}| \leq \frac{1}{2} \sum_{\substack{j \in \mathbb{K} \\ j \neq i}} (|a_{ij}| + |a_{ji}|) \\ = \frac{1}{2} \left[r'_i(A^{[k]}) + c'_i(A^{[k]}) \right], \quad i \in \mathbb{K}, \quad (3.12)$$

где $A^{[k]} = A[\mathbb{K}]$. С учетом (3.12) из следствия 3.2 легко выводятся следующие упрощенные оценки для сингулярных значений матрицы A , зависящие лишь от модулей ее диагональных элементов и ее строчных и столбцовых сумм и улучшающие (при $k = n$) оценку (3.2).

Следствие 3.3. Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geq 1$, и пусть $A^{[k]}$, $k = n, \dots, 1$, – произвольная последовательность вложенных главных $k \times k$ подматриц матрицы A . Тогда

$$\sigma_k(A) \geq \min \left\{ \frac{1}{2} \min_{\substack{i \neq j: i, j \in \mathbb{K} \\ |a_{ij}| + |a_{ji}| \neq 0}} \left\{ |a_{ii}| + |a_{jj}| \right. \right. \\ \left. \left. - \sqrt{(|a_{ii}| - |a_{jj}|)^2 + \left[r'_i(A^{[k]}) + c'_i(A^{[k]}) \right] \left[r'_j(A^{[k]}) + c'_j(A^{[k]}) \right]} \right\}, \right. \\ \left. \min_{i \in \mathbb{K}} |a_{ii}| \right\}, \quad k = n, \dots, 1, \quad (3.13)$$

где $A^{[k]} = A[\mathbb{K}]$.

Наконец, рассмотрим случай прямоугольной матрицы $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $m, n \geq 1$. Обозначим $q = \min\{m, n\}$ и положим

$$\hat{A} = \{a_{ij}\}_{1 \leq i, j \leq q}. \quad (3.14)$$

Тогда, ввиду леммы 2.2, мы имеем

$$\sigma_i(A) \geq \sigma_i(\hat{A}), \quad i = 1, \dots, q. \quad (3.15)$$

Применив следствие 3.3 к $q \times q$ матрице \hat{A} и воспользовавшись неравенствами (3.15), мы приходим к следующему окончательному результату.

Теорема 3.5. Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $m, n \geq 1$, и пусть $q = \min\{m, n\}$. Тогда для произвольной последовательности вложенных главных $k \times k$ подматриц $A^{[k]}$, $k = n, \dots, 1$, $q \times q$ матрицы \hat{A} , определенной в (3.14), справедливы неравенства

$$\sigma_k(A) \geq \min \left\{ \frac{1}{2} \min_{\substack{i \neq j, i, j \in K \\ |a_{ij}| + |a_{ji}| \neq 0}} \left\{ |a_{ii}| + |a_{jj}| \right. \right. \\ \left. \left. - \left[(|a_{ii}| - |a_{jj}|)^2 + \sum_{\substack{s \in K \\ s \neq i}} (|a_{is}| + |a_{si}|) \sum_{\substack{r \in K \\ r \neq j}} (|a_{jr}| + |a_{rj}|) \right]^{1/2} \right\}, \min_{i \in K} |a_{ii}| \right\}, \\ k = n, \dots, 1, \quad (3.16)$$

где $A[K] = A^{[k]}$.

Замечание 3.2. Поскольку сингулярные значения любой матрицы инвариантны относительно перестановок ее строк и столбцов, сингулярные значения $m \times n$ матрицы A можно ограничить снизу, применив оценки (3.16) к произвольной матрице вида PAQ , где P и Q — это матрицы-перестановки размеров $m \times m$ и $n \times n$ соответственно. Отсюда, в частности, следует, что при оценивании сингулярных значений главная диагональ матрицы теряет ту специфическую роль, которую она играет в оценках типа Гершгорина для собственных значений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. А. Альпин, *Границы для перроновского корня неотрицательной матрицы, учитывающие свойства ее графа*. — Мат. заметки, **58** (1995), 635–637.
2. Л. Ю. Колотилина, *Оценки и неравенства для перроновского корня неотрицательной матрицы*. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **284** (2002), 77–122.
3. Л. Ю. Колотилина, *Оценки и неравенства для перроновского корня неотрицательной матрицы. II*. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **296** (2003), 60–88.

4. Л. Ю. Колотилина, *Проблема вырожденности/невыврожденности для матриц, удовлетворяющих условиям диагонального преобладания, формулируемым в терминах ориентированных графов.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **309** (2004), 40–83.
5. R. A. Horn, C. R. Johnson, *Topics in Matrix Analysis.* — Cambridge University Press (1991).
6. C. R. Johnson, T. Szulc, *Further lower bounds for the smallest singular value.* — Linear Algebra Appl., **272** (1998), 169–179.
7. M. Marcus, H. Minc, *A Survey of Matrix Theory and Matrix Inequalities.* — Allyn and Bacon, Inc., Boston (1964).

Kolotilina L. Yu. Bounds for the singular values of a matrix involving its sparsity pattern.

The paper presents new upper and lower bounds for the singular values of a rectangular matrix explicitly involving the matrix sparsity pattern. These bounds are based on an upper bound for the Perron root of a nonnegative matrix and on the sparsity-dependent version of the Ostrowski–Brauer theorem on eigenvalue inclusion regions.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: liko@pdmi.ras.ru

Поступило 9 февраля 2005 г.