



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. И. Пантелеева, К вопросу о проблеме делителей Дирихле в числовых полях,
Матем. заметки, 1988, том 44, выпуск 4, 494–505

<https://www.mathnet.ru/mzm4238>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.83

20 мая 2025 г., 12:23:45



К ВОПРОСУ О ПРОБЛЕМЕ ДЕЛИТЕЛЕЙ ДИРИХЛЕ В ЧИСЛОВЫХ ПОЛЯХ

Е. И. Пантелеева

Пусть $\tau_k(n)$ — число представлений n в виде произведения k натуральных сомножителей. Рассмотрим функцию

$$D_k(x) = \sum_{n \leq x} \tau_k(n).$$

Вопрос о поведении $D_k(x)$ впервые был поставлен Л. Дирихле в 1849 г. Элементарные соображения позволяют получить формулу вида:

$$D_k(x) = xP_k(\log x) + O(x^{\alpha_k + \varepsilon}), \quad (1)$$

где P_k — многочлен k — 1-й степени, $\varepsilon > 0$ — произвольно малое фиксированное действительное число, $\alpha_k < 1$.

Проблему нахождения возможно лучшего значения α_k называют проблемой делителей Дирихле. История оценок α_k такова:

$$\alpha_k \leq 1 - \frac{1}{k}, \quad k \geq 2,$$

Л. Дирихле, 1849 [1],

$$\alpha_k \leq 1 - \frac{2}{k+1}, \quad k \geq 2,$$

Г. Вороной, 1903 [2] и Э. Ландау, 1912 [3],

$$\alpha_k \leq 1 - \frac{3}{k+2}, \quad k \geq 4,$$

Г. Харди и Д. Литтлвуд, 1922 [4].

В 1971 г. А. А. Карацуба в [5] доказал, что

$$\alpha_k \leq 1 - \frac{c}{k^{2/3}}, \quad k \geq 2. \quad (2)$$

При доказательстве была использована оценка для функции $\zeta(s)$ в критической полосе: при $|t| \geq 2$, $1/2 \leq \sigma \leq 1$

$$\zeta(\sigma + it) \ll |t|^{a(1-\sigma)^{3/2}} \log |t|, \quad (3)$$

где a — абсолютная положительная константа. Именно, была получена формула, связывающая константы c из (2) и a из (3),

$$c = \frac{1}{2(2a)^{2/3}}, \quad \text{при } k \geq 2. \quad (4)$$

В 1976 г. Фуджи в [6] улучшил значение константы c , показав, что

$$c = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{8} - 1)^{-1/3} a^{-2/3}, \quad \text{при } k \geq k_0. \quad (5)$$

Все эти оценки из-за формы остаточного члена в (1) становятся хуже тривиальных при $k \geq k_0(\varepsilon)$, следовательно, (1) теряет смысл при $k \rightarrow \infty$, $x \rightarrow \infty$.

В 1973 г. А. А. Карацуба в [7] получил асимптотическую формулу для $D_k(x)$ с α_k вида (2) и константой c из α_k вида (4) равномерно по параметрам x и k .

В 1972 г. А. А. Карацуба в [8] по схеме [6] получил новые результаты в проблеме делителей Дирихле в числовых полях, улучшающие соответствующие результаты Э. Ландау 1912 г. [3].

В настоящей работе, следуя схеме доказательства [7], получены равномерные оценки остаточных членов в проблеме делителей Дирихле в числовых полях. Кроме того, получены численные значения констант, аналогичных константе c из выражения (2) для α_k . В частности, из результатов работы следует, что можно взять

$$c = \frac{1}{(2a)^{2/3}}, \quad \text{при } k \geq 2,$$

что лучше (4) и (5) при всех $k \geq 2$.

Схема доказательства позволяет получить значение $a = 21$ (ранее были опубликованы результаты $a = 100$ [9], $a = 39$ [10], $a = 86$ [11], $a = 26,22$ [12]). Отсюда следует, что можно взять $c = 1/12$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть χ — характер Дирихле по mod D , $D \leq N/2$, $N_1 \leq 2N \leq t$, $t \geq t_0 > 0$, A — абсолютная положительная константа. Тогда

$$\left| \sum_{N < n \leq N_1} \chi(n) n^{it} \right| \leq ANe^{-\frac{1}{2976} \log^3 ND^{-1} / \log^2 t}.$$

Доказательство. 1. Введем величину γ соотношением $ND^{-1} = \gamma$. Введем параметр $c = 0,235$. Возьмем $b = [(ND^{-1})^c]$, $1 \leq x, y \leq b$.

$$\sum_{N < n \leq N_1} \chi(n) n^{it} = \sum_{l=0}^{D-1} \chi(l) e^{it \log D} S,$$

где $S = \sum_{ND^{-1} < z \leq N_1 D^{-1}} e^{it \log z}$, $z \in \mathbb{Q}$. Сделаем в S сдвиг интервала суммирования. Имеем:

$$S = \sum_{ND^{-1} < n \leq N_1 D^{-1}} e^{it \log(n+xy)} + 2\theta_1 b^2,$$

где $n = z - xy \in \mathbb{Q}$, $|\theta_1| \leq 1$. Отсюда

$$|S| \leq 2b^2 + b^{-2} \sum_{ND^{-1} < n \leq N_1 D^{-1}} \left| \sum_{x=1}^b \sum_{y=1}^b e^{it \log(n+xy)} \right|.$$

$$\log(n+xy) = \log n + F_r(xy) + R(n),$$

где

$$F_r(xy) = \sum_{m=1}^r \frac{(-1)^{m-1}}{m} \left(\frac{xy}{n} \right)^m,$$

$$R(n) = \sum_{m=r+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m} \left(\frac{xy}{n} \right)^m.$$

Выберем r из неравенств

$$\frac{1}{\gamma(1-2c)} - 1 \leq r \leq \frac{1}{\gamma(1-2c)}. \quad (6)$$

При таком выборе r двойное преобразование Абеля дает

$$\left| \sum_{x=1}^b \sum_{y=1}^b e^{it \log(n+xy)} \right| \leq 4 \sum_{x=1}^b \left| \sum_{y=1}^{u_1} e^{it F_r(xy)} \right|,$$

где $1 \leq u_1 \leq b$. Обозначив

$$W = \sum_{x=1}^b \left| \sum_{y=1}^{u_1} e^{it F_r(xy)} \right|,$$

имеем

$$\sum_{N < n \leq N_1} \chi(n) n^{it} \leq 4Nb^{-2}W. \quad (7)$$

$$2. W = \sum_{x=1}^b \left| \sum_{y=1}^{u_1} e^{2\pi i(\alpha_1 xy + \dots + \alpha_r x^r y^r)} \right|,$$

$$\text{где } \alpha_m = \frac{(-1)^{m-1} t}{2\pi m n^m} \quad (m = 1, \dots, r)$$

где

$$\Pi_1 = \prod_{m \geq 1/\gamma} \prod_{A_m \leq q_m} q_m A_m^{-1} \prod_{m \geq 1/\gamma} \prod_{A_m > q_m} q_m^{-1}.$$

Из определения A_m и q_m , пользуясь формулой Эйлера -- Маклорена [13, с. 10], получим

$$\Pi_1 \leq t^\Delta, \quad \Delta = -\frac{c^2}{\gamma(1-c)(1-2c)} + \frac{\gamma(1-c)}{4}.$$

Из теоремы о среднем И. М. Виноградова [14, теорема 1]

$$J_{k,r}(0, \dots, 0) \leq A_1^{2k^2} b^{2r-y(k)},$$

где $y(x)$ — функция, обратная к функции

$$x(y) = y + 2r - (r+1)^2 \log \left(1 - 2 \frac{y-r}{r^2-r} \right),$$

$A_1 > 0$ — абсолютная константа. Возьмем $k = r^2 \omega$ и выберем ω так, чтобы $y(k) \geq \beta r^2/2$, $\beta = 0,92$. При таком выборе ω

$$J_{k,r}^2(0, \dots, 0) \leq A_1^{4k^2} b^{4k-\beta r^2},$$

$$W \leq A_2 b^2 (b^{1-\beta-1/r} t^{\Delta/r^2})^{1/4r^2 \omega^2} \leq A_2 b^2 t^{\Delta_1},$$

где

$$\Delta_1 = \frac{\gamma c \left(1 - \beta - \frac{1}{r} \right) - \frac{c^2}{\gamma r^2 (1-c)(1-2c)} + \frac{\gamma(1-c)}{4r^2}}{4r^2 \omega^2},$$

A_2 — абсолютная константа.

$\Delta_1 = \Delta_1(r, \gamma, \beta, c)$ является возрастающей по r функцией. Из (6) следует, что можно взять $r = \frac{1}{\gamma(1-2c)}$.

Тогда

$$\Delta_1 = -\frac{\frac{c(1-2c)^2}{4} \left(\beta - \frac{2c^2 - 2c + 1}{1-c} - \delta_1 \right)}{\omega^2} \cdot \gamma^3,$$

где $\delta_1 = \gamma(1-2c) + \gamma^2 \frac{(1-c)(1-2c)^2}{4}$.

Найдем ω . В теореме о среднем возьмем $y(k) = \beta r^2/2$. Тогда

$$k = x(y) = r^2 \left(-\frac{\beta}{2} - \log((1-\beta) + \delta_2) - \delta_3 \right),$$

где $\delta_2 = \frac{2-\beta}{r-1}$, $\delta_3 = \frac{2}{r} + \frac{2r+1}{r^2} \log((1-\beta) + \delta_2)$. От-

сюда $\omega = -\frac{\beta}{2} - \log((1-\beta) + \delta_2) - \delta_3$.

Из оценок С. Б. Стечкина [15, предложение 4] модуля тригонометрической суммы следует, что утверждение теоремы 1 выполняется при $\gamma \geq 10^{-258}$. Значит, достаточно рассмотреть $\gamma < 10^{-258}$. Так как $r = \frac{1}{\gamma(1-2c)}$, $c = 0,235$, $\beta = 0,92$, то при $\gamma < 10^{-258}$ $\max(\delta_1, \delta_2, \delta_3) \leq \leq 10^{-257}$. При проведении вычислений этими величинами можно пренебречь и пользоваться формулой

$$W \leq A_2 b^2 t^{\Delta_2},$$

где

$$\Delta_2 = - \frac{\frac{c(1-2c)^2}{4} \left(\beta - \frac{2c^2 - 2c + 1}{1-c} \right)}{\left(\frac{\beta}{2} + \log(1-\beta) \right)^2} \cdot \gamma^3.$$

Отсюда при $c = 0,235$, $\beta = 0,92$

$$W \leq A_2 b^2 t^{-\alpha} \cdot \gamma^3, \quad \alpha = \frac{1}{2976}. \quad (8)$$

$\gamma = \log ND^{-1} / \log t$, следовательно, из (7) и (8) получим утверждение теоремы. Теорема 1 доказана.

ТЕОРЕМА 2. Пусть χ — характер Дирихле по mod D , $|t| \geq 2$, $1/2 \leq \sigma \leq 1$, B — абсолютная положительная константа. Тогда

$$|L(\sigma + it, \chi)| \leq BD^{1-\sigma} |t|^{2(1-\sigma)^{3/2}} \max(\log D, \log^{2/3+\varepsilon} |t|).$$

Доказательство. Простейшее приближение $L(s, \chi)$ при $\operatorname{Re} s = \sigma > 0$ [13, с. 155] дает:

$$L(s, \chi) = \sum_{n \leq D(|t|+1)} \frac{\chi(n)}{n^s} + O(D^{1-\sigma}), \quad (9)$$

$$\left| \sum_{n \leq D} \frac{\chi(n)}{n^s} \right| \leq 1 + \int_1^D \frac{u^{1-\sigma}}{u} du \leq 2D^{1-\sigma} \log D. \quad (10)$$

По преобразованию Абеля и теореме 1

$$\begin{aligned} \left| \sum_{D < n \leq D(|t|+1)} \frac{\chi(n)}{n^s} \right| &\leq \\ &\leq \sigma \int_D^{D(|t|+1)} \left| \sum_{D < n \leq u} \chi(n) n^{-it} \right| u^{-1-\sigma} du + \\ &+ \left| \sum_{D < n \leq D(|t|+1)} \chi(n) n^{-it} \right| D^{-\sigma} (|t|+1)^{-\sigma} \leq \\ &\leq D^{1-\sigma} \left(\int_0^{\log(|t|+1)} e^{f(v)} dv + e^{f(\log(|t|+1))} \right), \end{aligned}$$

где $f(v) = -\alpha \frac{v^3}{\log^2 t} + (1-\sigma)v$, $\alpha = \frac{1}{2976}$. Функция $f(v)$

достигает максимума в точке $v_0 = \sqrt{\frac{1-\sigma}{3\alpha}} \log t$,

$$f(v_0) = \frac{2}{3\sqrt{3\alpha}} (1-\sigma)^{3/2} \log t.$$

Разобьем промежутки $[0, \log(|t|+1)]$ на промежутки длины $\log^{2/3+\varepsilon} t$ вида $[M, M + \log^{2/3+\varepsilon} t]$, $M \in [0, \log(|t|+1)]$. Если один из этих промежутков $[M_0, M_0 + \log^{2/3+\varepsilon} t]$ содержит точку v_0 , то

$$\int_{M_0}^{M_0 + \log^{2/3+\varepsilon} t} e^{f(v)} dv \leq e^{f(v_0)} \log^{2/3+\varepsilon} t \leq t \frac{2}{3\sqrt{3\alpha}} (1-\sigma)^{3/2} \log^{2/3+\varepsilon} t.$$

Такая же оценка верна и для двух промежутков, прилегающих к $[M_0, M_0 + \log^{2/3+\varepsilon} t]$ справа и слева (если они есть). Для всех остальных промежутков, если $v \in [M, M + \log^{2/3+\varepsilon} t]$, то $|v - v_0| \geq \log^{2/3+\varepsilon} t$.

Пусть $v \geq v_0 + \log^{2/3+\varepsilon} t$ (симметричный случай рассматривается аналогично). Тогда

$$\begin{aligned} f(v) - f(v_0) &= -\alpha \frac{(v^3 - v_0^3)}{\log^2 t} + (1-\sigma)(v - v_0) = \\ &= -(v - v_0) \left(\frac{\alpha}{\log^2 t} (v^2 + vv_0) - \frac{2}{3} (1-\sigma) \right) \leq -\alpha \log^{2\varepsilon} t. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \int_M^{M + \log^{2/3+\varepsilon} t} e^{f(v)} dv &\leq e^{f(v_0)} \int_M^{M + \log^{2/3+\varepsilon} t} e^{f(v)-f(v_0)} dv \leq \\ &\leq e^{f(v_0)} \log^{2/3+\varepsilon} t e^{-\alpha \log^{2\varepsilon} t} \leq t \frac{2}{3\sqrt{3\alpha}} (1-\sigma)^{3/2}. \end{aligned}$$

Так как число интервалов $[M, M + \log^{2/3+\varepsilon} t]$ не превосходит $\log^{1/3-\varepsilon} t$, то получаем

$$\left| \sum_{D < n \leq D(|t|+1)} \frac{\chi(n)}{n^s} \right| \leq B_1 t \frac{2}{3\sqrt{3\alpha}} (1-\sigma)^{3/2} D^{1-\sigma} \log^{2/3+\varepsilon} t. \quad (11)$$

Взяв $\alpha = 1/2976$, из (9)–(11) получим утверждение теоремы. Теорема 2 доказана.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $L_1(s, \chi_1), \dots, L_k(s, \chi_k)$ — L -ряды Дирихле с характерами χ_1 по mod D_1, \dots, χ_k по mod D_k , и при $\operatorname{Re} s > 1$ пусть

$$L_1(s, \chi_1) \dots L_k(s, \chi_k) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n}{n^s}.$$

Тогда

$$\sum_{n \leq x} c_n = x P_m(\log x) + \theta x^{1 - \frac{1}{12} k - 2/3} (C \log x)^k,$$

где m — число главных характеров среди χ_1, \dots, χ_k , P_m — многочлен $m - 1$ -й степени, $P_0 = 0$, $\max(D_1, \dots, D_k) \leq \log^2 x$, $k \leq \log x$, $|\theta| \leq 1$, C — абсолютная положительная постоянная.

Доказательство. Используем формулу [7, лемма 1]: при $x \geq 1$, $T \geq 2$

$$\int_1^x A(\zeta) d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \frac{F(s) x^{s+1}}{s(s+1)} ds + R(x), \quad (12)$$

где $F(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^s}$ — абсолютно сходящийся при $\operatorname{Re} s > > 1$ ряд, $A(\zeta) = \sum_{n \leq \zeta} a_n$, при $b > 1$

$$B(b) = \int_1^{+\infty} \frac{|A(\zeta)|}{\zeta^{b+1}} d\zeta,$$

$$|R(x)| \leq C_1 \left(B(b) \frac{x^{b+1}}{T} + + 2^b \left(\frac{x \log x}{T} + \log T \right) \max_{x/2 \leq \zeta \leq 3x/2} |A(\zeta)| \right).$$

Возьмем $F(s) = L_1(s, \chi_1) \dots L_k(s, \chi_k)$, $a_n = c_n$, $A(\zeta) = = \sum_{n \leq \zeta} c_n$, $b = 1 + 1/\log x$, $e^2 \leq T \leq x$. По лемме Марджанишвили [16]

$$0 \leq |A(\zeta)| \leq \sum_{n \leq \zeta} |c_n| = \sum_{n \leq \zeta} \tau_k(n) \leq \zeta \frac{(\log \zeta + k - 1)^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Поэтому

$$B(b) = \int_1^{+\infty} \frac{|A(\zeta)|}{\zeta^{b+1}} d\zeta \leq \int_1^{+\infty} \frac{(\log \zeta + k - 1)^{k-1}}{(k-1)! \zeta^b} d\zeta \leq 2(3 \log x)^k.$$

Кроме того,

$$\max_{x/2 \leq \zeta \leq 3x/2} |A(\zeta)| \leq 4x(3 \log x)^{k-1},$$

следовательно,

$$|R(x)| \leq C_1 \left(\frac{x^2}{T} (3 \log x)^k + x (3 \log x)^{k-1} \log T \right) \leq \leq C_2 \frac{x^2}{T} (3 \log x)^k.$$

Таким образом, получаем равенство

$$\int_1^x A(\zeta) d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \frac{L_1(s, \chi_1) \dots L_k(s, \chi_k) x^{s+1}}{s(s+1)} ds + \theta_1 \frac{x^2}{T} (C_3 \log x)^k. \quad (13)$$

Вычислим последний интеграл. Возьмем $\alpha_1 = 1 - (2ak)^{-2/3}$ ($a = 21$), $T = x^{1-\alpha_1}$, и рассмотрим интеграл J по контуру Γ с вершинами $b + iT$, $\alpha_1 + iT$, $\alpha_1 - iT$, $b - iT$:

$$J = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{L_1(s, \chi_1) \dots L_k(s, \chi_k)}{s(s+1)} x^{s+1} ds.$$

Если среди характеров χ_1, \dots, χ_k нет главных, то подынтегральная функция не имеет особенностей внутри Γ , если среди характеров χ_1, \dots, χ_k есть главные, то в точке $s = 1$ имеется полюс, вообще, в обозначениях теоремы, $J = x^2 \tilde{P}_m(\log x)$.

Оценим интегралы J_1 , J_2 и J_3 по левой, верхней и нижней сторонам контура Γ .

$$|J_1| \leq \int_{-T}^T \left| \frac{L_1(\alpha_1 + it, \chi_1) \dots L_k(\alpha_1 + it, \chi_k)}{(\alpha_1 + it)(\alpha_1 + 1 + it)} \right| x^{\alpha_1+1} dt.$$

Известная формула для $L(s, \chi)$ [17, с. 133] дает:

$$\begin{aligned} \int_{-11}^{11} \left| \frac{L_1(\alpha_1 + it, \chi_1) \dots L_k(\alpha_1 + it, \chi_k)}{(\alpha_1 + it)(\alpha_1 + 1 + it)} \right| x^{\alpha_1+1} dt &\leq \\ &\leq 22x^{\alpha_1+1} (\max_{1 \leq i \leq k} |t| \leq 11 |L_i(\alpha_1 + it, \chi_i)|)^k \leq \\ &\leq 22x^{\alpha_1+1} (C_4 k^{2/3} + D^{1/2})^k \leq x^{\alpha_1+1} (C_5 \log x)^k. \end{aligned}$$

Пусть $11 \leq x \leq T$. Тогда из теоремы 2

$$\begin{aligned} \int_{T_1}^{2T_1} \left| \frac{L_1(\alpha_1 + it, \chi_1) \dots L_k(\alpha_1 + it, \chi_k)}{(\alpha_1 + it)(\alpha_1 + 1 + it)} \right| x^{\alpha_1+1} dt &\leq \\ &\leq \frac{x^{\alpha_1+1} D^{k(1-\alpha_1)} T_1^{ka(1-\alpha_1)^{3/2}}}{T_1} (C_6 \log^{2/3+\varepsilon_3} x) \end{aligned}$$

Так как $ka(1-\alpha_1)^{3/2} = \frac{1}{2}$, $k(1-\alpha_1) = k^{1/3}(2a)^{-2/3}$, $D^{k(1-\alpha_1)} \leq (\log^{1/3-\varepsilon} x)^k$, то правая часть последнего неравенства не превосходит $x^{\alpha_1+1} (C_7 \log x)^k$, следовательно,

$$|J_1| \leq x^{\alpha_1+1} (C_8 \log x)^k.$$

Заметим далее, что модули интегралов J_2 и J_3 по верхней и нижней сторонам контура Γ равны.

$$\begin{aligned} |J_2| = |J_3| &\leq \int_{\alpha_1}^b \frac{|L_1(\sigma + iT, \chi_1) \dots L_k(\sigma + iT, \chi_k)|}{T^2} x^{\sigma+1} d\sigma \leq \\ &\leq \frac{D^{k(1-\alpha_1)} T^{ka(1-\alpha_1)^{3/2}} (C_9 \log^{2/3+\varepsilon} x)^k x^2}{T^2} \leq \\ &\leq x^2 T^{-3/2} (C_{10} \log x)^k \leq x^{\alpha_1+1} (C_{10} \log x)^k. \end{aligned}$$

Из оценок $J_1 - J_3$, равенства (13) и значения J получаем

$$\int_1^x A(\zeta) d\zeta = x^2 \tilde{P}_m(\log x) + \theta_2 x^{\alpha_1+1} (C_{11} \log x)^k.$$

Рассмотрим функцию

$$A_1(\zeta) = \frac{1}{2\Delta} \int_0^{2\Delta} A(\zeta + u) du, \quad \Delta = \frac{1}{x}$$

$$\begin{aligned} A_1(\zeta) &= A(\zeta) + \frac{1}{2\Delta} \int_0^{2\Delta} ([\zeta + u] - [\zeta]) c_{[\zeta+u]} du = \\ &= A(\zeta) + O(|c_{[\zeta+1]}|) = A(\zeta) + O(x^\varepsilon); \\ \int_1^x A_1(\zeta) d\zeta &= \int_1^x A(\zeta) d\zeta + O(|c_{[\zeta+1]}|) \int_1^x ([\zeta + 2\Delta] - [\zeta]) d\zeta = \\ &= \int_1^x A(\zeta) d\zeta + O(x^{1+\varepsilon}\Delta) = \int_1^x A(\zeta) d\zeta + O(x^\varepsilon). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\int_1^x A_1(\zeta) d\zeta = x^2 \tilde{P}_m(\log x) + \theta_3 x^{\alpha_1+1} (C_{12} \log x)^k. \quad (14)$$

Так как $A_1(\zeta)$ — непрерывная функция, то обе части (14) можно дифференцировать по x :

$$A_1(x) = x P_m(\log x) + \theta_4 x^{\alpha_1} (C_{13} \log x)^k.$$

$\alpha_1 = 1 - (2ak)^{-2/3}$, что при $a = 21$ дает $1 - \frac{1}{12} k^{-2/3}$. Отсюда и из формулы, связывающей $A_1(\zeta)$ и $A(\zeta)$, получим

$$A(x) = x P_m(\log x) + \theta x^{1 - \frac{1}{12} k^{-2/3}} (C \log x)^k.$$

Теорема 3 доказана.

ТЕОРЕМА 4. Пусть D — бесквадратное число, $|D| \leq \log^2 x$, $K = R(\sqrt{D})$ — квадратичное поле, \mathfrak{a} — целые дивизоры поля K . Тогда для любого $k \geq 1$

$$\sum_{N(\mathfrak{a}_1 \dots \mathfrak{a}_k) \leq x} 1 = x P_k(\log x) + \theta x^{1 - \frac{10}{133} k^{-2/3}} (C \log x)^{2k},$$

где P_k — многочлен $k-1$ -й степени, $|\theta| \leq 1$, C — абсолютная положительная константа.

Доказательство. Дзета-функция Дедекинда квадратичного поля K имеет вид

$$\zeta_K(s) = \zeta(s) L(s, \chi)$$

где χ — неглавный характер по $\text{mod } |D|$. В формуле (12) возьмем $F(s) = \zeta_K^k(s)$. Тогда

$$A(\zeta) = \sum_{N(a_1 \dots a_k) \leq \zeta} 1.$$

Из вида $\zeta_K(s)$ следует, что мы находимся в условиях теоремы 3, если вместо k взять $2k$ и в качестве m взять k . Показатель в остаточном члене будет иметь вид

$$1 - \frac{1}{12} (2k)^{-2/3} \leq 1 - \frac{10}{133} k^{-2/3}.$$

Теорема 4 доказана.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $m > 1$ — фиксированное натуральное число, $h = \varphi(m)$, $\zeta^m = 1$, $K = R(\zeta)$ — m -круговое поле, \mathfrak{a} — целые дивизоры поля K . Тогда для любого $k \geq 1$

$$\sum_{N(a_1 \dots a_k) \leq x} 1 = x P_k(\log x) + \theta x^{1 - \frac{1}{12} (hk)^{-2/3}} (C \log x)^{hk}.$$

Доказательство. Дзета-функция Дедекинда кругового поля K имеет вид

$$\zeta_K(s) = L_1(s, \chi_1) \dots L_h(s, \chi_h) \prod_{p|m} \frac{1}{(1 - p^{-1/s})^q},$$

где χ_1, \dots, χ_h — все $h = \varphi(m)$ характеров по $\text{mod } m$, а конечное произведение, в котором f и q означают зависящие от m и p положительные целые числа, представляет собой при $\sigma > 0$ абсолютно сходящийся ряд.

В формуле (12) возьмем $F(s) = \zeta_K^k(s)$. Из вида $\zeta_K(s)$ следует, что мы находимся в условиях теоремы 3, если вместо k взять hk и в качестве m взять k . Показатель в остаточном члене будет иметь вид

$$1 - \frac{1}{12} (hk)^{-2/3}.$$

Теорема 5 доказана.

Московский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина

Поступило
19.02.88

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Dirichlet L. Über die Bestimmung der mittleren Werte in der Zahlentheorie // Abh. Akad. Wiss. Berlin. 1849. Werke 2. S. 49—66.
- [2] Вороной Г. Ф. Об одной задаче из теории асимптотических функций // Собрание сочинений в 3-х томах. Т. 2 / Киев: Изд-во АН УССР, 1952 г. С. 5—50.
- [3] Landau E. Über die Anzahl der Gitterpunkte in gewissen Bereichen // Nachr. Akad. Wiss. Gottingen Math. Phys. Kl. 1912. Hft. 6. S. 687—771.
- [4] Hardy G. H., Littlewood J. E. The approximate functional equation in the theory of the zeta-function, with applications to the divisors problems of Dirichlet and Piltz // Proc. London Math. Soc. Ser. 2. 1922. V. 21. P. 39—74.
- [5] Карацуба А. А. Оценки тригонометрических сумм методом И. М. Виноградова // Труды МИАН СССР. 1971. Т. 112. С. 241—255.
- [6] Fujii A. On the problem of divisors // Acta Arith. 1976. V. 31. P. 355—360.
- [7] Карацуба А. А. Равномерная оценка остаточного члена в проблеме делителей Дирихле // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1900. Т. 36. № 3. С. 475—483.
- [8] Карацуба А. А. Проблема делителей Дирихле в числовых полях // ДАН СССР. 1972. Т. 204. № 3. С. 540—541.
- [9] Richert H. E. Zur Abschätzung der Riemannschen Zetafunktion in der Nahl der Vertikalen $\sigma = 1$ // Math. Ann. 1967. Bd 169. № 1. S. 97—101.
- [10] Turan P. On some recent results in the analytical theory of numbers // Proc. Symp. Pure Math. XX. 1969. / N. Y.: AMS, Institute of Number theory, 1971. P. 359—347.
- [11] Ribenboim P. Prime numbers records. A New Chapter for the Guinness Boock. Kingston, Ontario Canada: Queen's University, 1985.
- [12] Пантелеева Е. И. Применение ЭВМ в решении одной задачи аналитической теории чисел // Научные труды. Вып. 195 / М.: МЛТИ, 1987. С. 112—114.
- [13] Карацуба А. А. Основы теории чисел. 2-е изд. М.: Наука, 1985.
- [14] Тырина О. В. Новая оценка тригонометрического интеграла И. В. Виноградова // Изв. АН СССР, Сер. мат. 1987. Т. 51. № 2. С. 363—378.
- [15] Стечкин С. Б. О средних значениях модуля тригонометрической суммы // Труды МИАН СССР. 1975. Т. 134. С. 283—309.
- [16] Марджанишвили К. К. Оценка одной арифметической суммы // ДАН СССР. 1939. Т. 22. № 7. С. 391—393.
- [17] Гитчмарш Е. К. Теория дзета-функции Римана. М.: ИЛ, 1953.