Алгебра и анализ
Том 24 (2012), №4

СПЕКТРАЛЬНЫЙ СИНТЕЗ В ПРОСТРАНСТВЕ ФУНКЦИЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО РОСТА НА КОНЕЧНО ПОРОЖДЕННОЙ АБЕЛЕВОЙ ГРУППЕ

© С. С. ПЛАТОНОВ

Доказывается справедливость спектрального синтеза в пространстве функций экспоненциального роста на произвольной конечно порожденной дискретной абелевой группе.

§1. Введение и формулировка основных результатов

Пусть G — локально компактная абелева группа, $\mathcal{F}$ — топологическое векторное пространство, состоящее из комплекснозначных функций на G. Будем называть пространство $\mathcal{F}$ трасляционно инвариантным, если $\mathcal{F}$ инвариантно относительно преобразований (сдвигов)

$$\tau_y : f(x) \mapsto f(x+y), \quad f(x) \in \mathcal{F}, \quad y \in G, \tag{1.1}$$

и все операторы τ_y являются непрерывными операторами в пространстве $\mathcal{F}$.

Замкнутое линейное подпространство $H \subseteq \mathcal{F}$ называется инвариантным подпространством, если $\tau_y(H) \subseteq H$ для любого $y \in G$.

Экспоненциальной функцией или обобщенным характером называется произвольный гомоморфизм группы G в мультипликативную группу ненулевых комплексных чисел. Непрерывные гомоморфизмы из группы G в аддитивную группу комплексных чисел называются аддитивными функциями. Функция $x \mapsto P(a_1(x), \dots, a_m(x))$ на G называется полиномиальной, если P — комплексный полином от m переменных и $a_1, \dots, a_m$ — аддитивные функции. Произведение полиномиальной и экспоненциальной функций называется экспоненциальным мономом, а линейная комбинация экспоненциальных мономов называется экспоненциальным полиномом.

Пусть $\mathcal{F}$ — трансляционно инвариантное функциональное пространство на группе G, H — инвариантное подпространство в $\mathcal{F}$.

Ключевые слова: спектральный синтез, конечно порожденные абелевы группы, функции экспоненциального роста, инвариантные подпространства.

Определение 1.1. Инвариантное подпространство H допускает спектральный синтез, если оно совпадает с замыканием в $\mathcal{F}$ линейной оболочки всех содержащихся в H экспоненциальных мономов. В пространстве $\mathcal{F}$ справедлив спектральный синтез, если любое инвариантное подпространство $H \subseteq \mathcal{F}$ допускает спектральный синтез.

Приведенное определение спектрального синтеза берет свое начало с работы Л. Шварца [1], в которой доказана справедливость спектрального синтеза для случая, когда $G = \mathbb{R}$, а пространство $\mathcal{F}$ может совпадать с пространством $C(\mathbb{R})$ всех непрерывных функций на $\mathbb{R}$ или с пространством $\mathcal{E}(\mathbb{R}) = C^\infty(\mathbb{R})$ всех бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}$ (все классические функциональные пространства рассматриваются с обычными топологиями). Из результатов работы Дж. Гилберта [2] вытекает справедливость спектрального синтеза для некоторых топологических векторных пространств на $\mathbb{R}$, состоящих из функций экспоненциального роста. Другие примеры функциональных топологических векторных пространств на $\mathbb{R}$, в которых справедлив спектральный синтез, приведены в [3].

В [1] Л. Шварц высказал гипотезу, что спектральный синтез справедлив для группы $G = \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, когда $\mathcal{F}$ совпадает с одним из пространств $C(\mathbb{R}^n)$ или $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n) = C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Эта гипотеза была опровергнута Д. И. Гуревичем, который в [4] построил пример ненулевого инвариантного подпространства в $\mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$, в котором нет ни одного ненулевого экспоненциального полинома. Отметим также, что для случая, когда $G = \mathbb{R}^n$, а пространство $\mathcal{F}$ совпадает с пространством $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ обобщенных функций медленного роста на $\mathbb{R}^n$, спектральный синтез справедлив (Л. Шварц [5]).

Для случая, когда G — дискретная абелева группа естественным функциональным пространством является пространство $C(G)$, состоящее из всех комплекснозначных функций на G, с топологией поточечной сходимости. В этом случае различные результаты о спектральном синтезе и его приложениях приведены в книге [6]. Отметим, что спектральный синтез в пространстве $C(G)$ справедлив для группы $\mathbb{Z}^n$ (М. Лефранк [7]), для любой конечно порожденной абелевой группы [8], для любой периодической абелевой группы [9]. В общем случае для произвольной дискретной абелевой группы спектральный синтез в пространстве $C(G)$ не справедлив.

В настоящей работе доказывается справедливость спектрального синтеза для случая, когда G — произвольная конечно порожденная бесконечная абелева группа (здесь и далее группа G дискретная), а функциональное пространство $\mathcal{F}$ совпадает с пространством функций экспоненциального роста на группе G. Перейдем к точной формулировке результатов.

Всюду далее запись $\mathcal{F}_1 \hookrightarrow \mathcal{F}_2$ означает, что функциональное пространство $\mathcal{F}_1$ вложено в функциональное пространство $\mathcal{F}_2$, причем вложение непрерывное.

Пусть G — бесконечная, конечно порожденная абелева группа с операцией $+$ и с нулевым элементом 0. Пусть $v_1, \dots, v_n$ — система образующих группы G. Любой элемент $x \in G$ можно представить в виде $x = t_1 v_1 + \dots + t_n v_n$, где $t_j \in \mathbb{Z}$. Для $x \in G$ определим число $|x| \in \mathbb{Z}_+ := \{0, 1, 2, \dots\}$ равенством

$$|x| := \inf\{|t_1| + \dots + |t_n| : x = t_1 v_1 + \dots + t_n v_n, t_j \in \mathbb{Z}\}. \tag{1.2}$$

Очевидно, что для функции $x \mapsto |x|$ выполняются следующие свойства: 1) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$; 2) $|-x| = |x|$; 3) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$, $x, y \in G$; 4) для любого $d \in \mathbb{Z}_+$ неравенству $|x| \leqslant d$ удовлетворяет только конечное множество элементов группы G.

Функция $|x|$ является частным случаем квазинормы на группе G (см., например, [10]). Будем называть ее квазинормой, порожденной системой образующих $v_1, \dots, v_n$.

Для любого $k > 0$ через $C_k(G)$ обозначим множество всех комплекснозначных функций $f(x)$ на G, удовлетворяющих условию

$$|f(x)|\, e^{-k|x|} \to 0 \quad \text{при} \quad |x| \to \infty. \tag{1.3}$$

Относительно нормы

$$\|f\|_k := \sup_{x \in G} |f(x)|\, e^{-k|x|} \tag{1.4}$$

множество $C_k(G)$ является банаховым пространством. Очевидно, что $C_{k_1}(G) \hookrightarrow C_{k_2}(G)$ при $k_1 < k_2$. Пусть

$$C_*(G) := \bigcup_{k>0} C_k(G). \tag{1.5}$$

Пространство $C_*(G)$ снабдим топологией индуктивного предела банаховых пространств $C_k(G)$. Будем называть пространство $C_*(G)$ пространством функций экспоненциального роста на группе G.

Используя свойства квазинормы, легко доказать, что каждое банахово пространство $C_k(G)$ является трансляционно инвариантным функциональным пространством на группе G, а из определения топологии индуктивного предела банаховых пространств (см., например, [11]) вытекает, что и топологическое векторное пространство $C_*(G)$ будет трансляционно инвариантным пространством.

В определении пространства $C_*(G)$ участвует некоторая система образующих группы G. Проверим, что это пространство не зависит от выбора

системы образующих. Пусть $v_1^1, \dots, v_n^1$ и $v_1^2, \dots, v_m^2$ — две системы образующих группы G и пусть $|x|_1$ и $|x|_2$ — квазинормы, построенные по этим системам образующих. Пространства $C_*(G)$, построенные по квазинормам $|\cdot|_1$ и $|\cdot|_2$, будем обозначать ${}^1C_*(G)$ и ${}^2C_*(G)$.

Пусть $x \in G$, $x = t_1 v_1^1 + \dots + t_n v_n^1$, причем числа $t_1, \dots, t_n$ выбраны так, что $|x|_1 = |t_1| + \dots + |t_n|$. Тогда

$$|x|_2 \leqslant \sum_{j=1}^{n} |t_j||v_j^1|_2 \leqslant c_1|x|_1, \tag{1.6}$$

где

$$c_1 = \max\{|v_j^1|_2,\ j = 1, \dots, n\}$$

— не зависящее от x положительное число. Аналогично доказывается неравенство

$$|x|_1 \leqslant c_2|x|_2, \quad x \in G, \tag{1.7}$$

где $c_2 > 0$ — не зависящее от x число. Из неравенств (1.6) и (1.7) легко получить, что ${}^1C_*(G) = {}^2C_*(G)$ как топологические векторные пространства.

Основным результатом статьи является следующая теорема.

Теорема 1.1. *Для любой конечно порожденной бесконечной абелевой группы G в функциональном пространстве $C_*(G)$ справедлив спектральный синтез.*

В §2 приводится доказательство теоремы 1.1 для частного случая, когда группа G совпадает со свободной абелевой группой $\mathbb{Z}^n$. Доказательство теоремы проводится по следующей схеме. От пространства $C_*(\mathbb{Z}^n)$ переходим к двойственному пространству $C'_*(\mathbb{Z}^n)$, которое является топологической алгеброй относительно свертки. Для того, чтобы замкнутое линейное подпространство $H \subseteq C_*(\mathbb{Z}^n)$ было инвариантным подпространством, необходимо и достаточно, чтобы его аннулятор $H^\perp$ был замкнутым идеалом в алгебре $C'_*(\mathbb{Z}^n)$. Дискретное преобразование Фурье Λ задает изоморфизм сверточной алгебры $C'_*(\mathbb{Z}^n)$ на алгебру $\mathcal{A}(\Omega)$, состоящую из всех голоморфных функций в некоторой области $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, относительно поточечного умножения функций. Далее доказывается, что инвариантное подпространство H допускает спектральный синтез тогда и только тогда, когда соответствующий ему идеал $\Lambda(H^\perp)$ локализуем в алгебре $\mathcal{A}(\Omega)$ и доказывается локализуемость всех замкнутых идеалов в алгебре $\mathcal{A}(\Omega)$. Приведенная схема доказательства справедливости спектрального синтеза на основе дуальности и локализуемости является одной из основных схем в задачах спектрального синтеза (см., например,

обзор Н. К. Никольского [12], книги А. Г. Баскакова [13], В. В. Напалкова [14], Б. Мальгранжа [15]). В настоящей работе эта схема реализуется для нового случая $G = \mathbb{Z}^n$ и $\mathcal{F} = C_*(\mathbb{Z}^n)$. В §3 теорема 1.1 доказывается для произвольной конечно порожденной бесконечной абелевой группы.

Отметим, что теорема 1.1 остается справедливой и для любой конечной абелевой группы G, так как в этом случае пространство $C_*(G)$ совпадает с пространством $C(G)$, для которого справедливость спектрального синтеза хорошо известна (см. [6]).

Автор выражает благодарность рецензенту за полезные замечания.

§2. Доказательство теоремы 1.1 для $G = \mathbb{Z}^n$

В этом параграфе рассматривается случай, когда группа G совпадает со свободной абелевой группой $\mathbb{Z}^n$. Элементы из группы $\mathbb{Z}^n$ имеют вид $x = (x_1, \dots, x_n)$, где $x_j \in \mathbb{Z}$. Естественной системой образующих в $\mathbb{Z}^n$ служат элементы $v_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, v_n = (0, \dots, 0, 1)$. Из определения $|x|$ (см. (1.2)) следует, что $|x| = |x_1| + \dots + |x_n|$. Как частный случай пространств $C_k(G)$ и $C_*(G)$, определенных в §1, определяются пространства $C_k(\mathbb{Z}^n)$ и $C_*(\mathbb{Z}^n)$.

Через $C'_*(\mathbb{Z}^n)$ обозначим множество всех комплекснозначных функций $g(x)$ на $\mathbb{Z}^n$, удовлетворяющих условию: для любого $k > 0$

$$|g(x)|\, e^{k|x|} \to 0 \quad \text{при} \quad |x| \to \infty. \tag{2.1}$$

Множество $C'_*(\mathbb{Z}^n)$ является полным локально выпуклым пространством с топологией, порожденной системой полунорм (даже норм)

$$\mathfrak{n}_k(g) := \sup_{x \in \mathbb{Z}^n} |g(x)|\, e^{k|x|}, \quad k > 0. \tag{2.2}$$

Легко видеть, что $C'_*(\mathbb{Z}^n)$ является трансляционно инвариантным пространством на группе $\mathbb{Z}^n$.

Пространство $C'_*(\mathbb{Z}^n)$ можно отождествить с сопряженным пространством к топологическому векторному пространству $C_*(\mathbb{Z}^n)$, если определить двойственность между этими пространствами по формуле

$$\langle g, f \rangle := \sum_{x \in \mathbb{Z}^n} g(x) f(x), \quad f \in C_*(\mathbb{Z}^n), \ g \in C'_*(\mathbb{Z}^n). \tag{2.3}$$

Ряд в правой части формулы (2.3) абсолютно сходится, так как если $f \in C_k(\mathbb{Z}^n)$, то

$$\sum_{x \in \mathbb{Z}^n} |g(x)|\, |f(x)| = \sum_{x \in \mathbb{Z}^n} |g(x)| e^{(k+1)|x|} |f(x)| e^{-k|x|} e^{-|x|} \leqslant c\, \mathfrak{n}_k(g) \|f\|_k < \infty,$$

где

$$c = \sum_{x \in \mathbb{Z}^n} e^{-|x|}.$$

Если H — замкнутое линейное подпространство в $C_*(\mathbb{Z}^n)$, то пусть $H^\perp$ — его ортогональное дополнение (аннулятор) в $C'_*(\mathbb{Z}^n)$, т. е.

$$H^\perp = \{g \in C'_*(\mathbb{Z}^n) : \langle g, f \rangle = 0 \quad \forall f \in H\}.$$

Если H — инвариантное подпространство в $C_*(\mathbb{Z}^n)$, то $H^\perp$ — инвариантное подпространство в $C'_*(\mathbb{Z}^n)$, так как

$$\langle \tau_y g, f \rangle = \langle g, \tau_{-y} f \rangle,$$

где $f \in C_*(\mathbb{Z}^n)$, $g \in C'_*(\mathbb{Z}^n)$, $y \in \mathbb{Z}^n$, τ_y — оператор сдвига (см. (1.1)). Соответствие $H \mapsto H^\perp$ задает биекцию между инвариантными подпространствами в $C_*(\mathbb{Z}^n)$ и $C'_*(\mathbb{Z}^n)$.

Лемма 2.1. *Пространство $C'_*(\mathbb{Z}^n)$ является топологической алгеброй относительно свертки*

$$(g_1 * g_2)(x) := \sum_{y \in \mathbb{Z}^n} g_1(x-y) g_2(y), \quad g_1, g_2 \in C'_*(\mathbb{Z}^n).$$

При этом замкнутое линейное подпространство $H \subseteq C'_*(\mathbb{Z}^n)$ инвариантно относительно сдвигов тогда и только тогда, когда H является замкнутым идеалом в $C'_*(\mathbb{Z}^n)$.

Доказательство. Пусть $g_1, g_2 \in C'_*(\mathbb{Z}^n)$, $k > 0$. Пользуясь тем, что $|x| \leqslant |x-y| + |y|$, получим

$$|g_1 * g_2(x)| \leqslant \sum_{x \in \mathbb{Z}^n} |g_1(x-y)| e^{k|x-y|} |g_2(y)| e^{k|y|} e^{-k|x|} \leqslant \mathfrak{n}_k(g_1) \mathfrak{n}_k(g_2) e^{-k|x|}. \tag{2.4}$$

Из неравенства (2.4) вытекает, что $g_1 * g_2 \in C'_*(\mathbb{Z}^n)$ и справедливо неравенство

$$\mathfrak{n}_k(g_1 * g_2) \leqslant \mathfrak{n}_k(g_1)\, \mathfrak{n}_k(g_2), \tag{2.5}$$

откуда следует, что $g_1 * g_2$ непрерывно зависит от g_1 и g_2, т. е. $C_*(\mathbb{Z}^n)$ является топологической алгеброй.

Для любого $a \in \mathbb{Z}^n$ определим функцию

$$e_a(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \neq a, \\ 1 & \text{при } x = a. \end{cases}$$

Заметим, что

$$(g * e_a)(x) = g(x-a) = (\tau_{-a} g)(x) \tag{2.6}$$

для любой функции $g \in C'_*(\mathbb{Z}^n)$. Из равенства (2.6) и из того, что линейные комбинации функций e_a, $a \in \mathbb{Z}^n$, образуют всюду плотное подмножество в $C'_*(\mathbb{Z}^n)$, следует, что замкнутое линейное подпространство $H \subseteq C'_*(\mathbb{Z}^n)$ инвариантно относительно сдвигов тогда и только тогда, когда H является замкнутым идеалом в топологической алгебре $C'_*(\mathbb{Z}^n)$. $\square$

Пусть $\mathbb{C}_* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\mathbb{C}_*^n = \mathbb{C}_* \times \dots \times \mathbb{C}_*$ — декартово произведение n экземпляров множества $\mathbb{C}_*$. Для $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}_*^n$ и $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$ пусть $z^x := z_1^{x_1} \dots z_n^{x_n}$. Экспоненциальные функции на группе $\mathbb{Z}^n$ имеют вид $x \mapsto z^x$ для любого $z \in \mathbb{C}_*^n$, а экспоненциальными мономами являются функции вида $f(x) = P(x)z^x$, где $P(x) = P(x_1, \dots, x_n)$ — произвольный комплексный многочлен от n переменных.

Обозначим через $\mathcal{A}$ множество всех функций $\varphi(z) = \varphi(z_1, \dots, z_n)$ голоморфных в области $\mathbb{C}_*^n \subset \mathbb{C}^n$. Множество $\mathcal{A}$ снабжается топологией равномерной сходимости на компактных подмножествах в $\mathbb{C}_*^n$ и становится локально выпуклым пространством. Относительно поточечного умножения функций множество $\mathcal{A}$ будет топологической алгеброй.

Для любой функции $g(x) \in C'_*(\mathbb{Z}^n)$ определим функцию

$$\hat{g}(z) := \sum_{x \in \mathbb{Z}^n} g(x) z^x, \quad z \in \mathbb{C}_*^n. \tag{2.7}$$

Лемма 2.2. *Отображение $\Lambda : g(x) \mapsto \hat{g}(z)$ является изоморфизмом топологической алгебры $C'_*(\mathbb{Z}^n)$ на топологическую алгебру $\mathcal{A}$.*

Доказательство. Пусть $g(x) \in C'_*(\mathbb{Z}^n)$, $k > 0$,

$$\Omega_k := \{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}_*^n : e^{-k} \leqslant |z_j| \leqslant e^k, j = 1, \dots, n\}.$$

Заметим, что Ω_k является компактным подмножеством в $\mathbb{C}_*^n$ и любое компактное подмножество в $\mathbb{C}_*^n$ содержится в некотором множестве Ω_k.

Пусть $z \in \Omega_k$, тогда

$$\sum_{x \in \mathbb{Z}^n} |g(x)||z^x| \leqslant \sum_{x \in \mathbb{Z}^n} |g(x)| e^{k|x|} = \sum_{x \in \mathbb{Z}^n} |g(x)| e^{(k+1)|x|} e^{-|x|} \leqslant c\, \mathfrak{n}_{k+1}(g), \tag{2.8}$$

где

$$c = \sum_{x \in \mathbb{Z}^n} e^{-|x|}$$

— не зависящее от g положительное число.

Из (2.8) вытекает, что ряд из правой части формулы (2.7) равномерно сходится на любом множестве Ω_k, поэтому его сумма — голоморфная функция на $\mathbb{C}_*^n$. Из неравенства (2.8) также получаем оценку

$$\sup_{z \in \Omega_k} |\hat{g}(z)| \leqslant c\, \mathfrak{n}_{k+1}(g), \tag{2.9}$$

откуда вытекает, что отображение $\Lambda : g(x) \mapsto \hat{g}(z)$ является непрерывным и инъективным отображением из $C'_*(\mathbb{Z}^n)$ в $\mathcal{A}$.

Обратно, пусть $\varphi \in \mathcal{A}$. Функцию $\varphi(z)$ можно разложить на множестве $\mathbb{C}^n_*$ в ряд Лорана

$$\varphi(z) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^n} g(x) z^x, \tag{2.10}$$

где $g(x)$ — коэффициенты ряда Лорана.

Пусть $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, α_j — произвольные положительные числа,

$$T_\alpha := \{z \in \mathbb{C}^n : |z_j| = \alpha_j,\ j = 1, \dots .n\}.$$

Коэффициент $g(x)$ ряда Лорана можно найти по формуле Коши:

$$g(x) = (2\pi i)^{-n} \int_{T_\alpha} \varphi(z)\, z^{-x}\, \frac{dz}{z}, \tag{2.11}$$

где

$$\frac{dz}{z} := \frac{dz_1}{z_1} \dots \frac{dz_n}{z_n}.$$

В качестве чисел α_j возьмем следующие числа:

$$\alpha_j = \begin{cases} e^k, & \text{если } x_j < 0, \\ e^{-k}, & \text{если } x_j \geqslant 0. \end{cases}$$

Тогда $\alpha_j^{x_j} = e^{-k|x_j|}$, и если $z \in T_\alpha$, то

$$|z^x| = e^{-k|x|}. \tag{2.12}$$

Из (2.11) и (2.12) получаем оценку

$$|g(x)| \leqslant e^{-k|x|} \sup_{z \in T_\alpha} |\varphi(z)| \leqslant e^{-k|x|} \sup_{z \in \Omega_k} |\varphi(z)|. \tag{2.13}$$

Пусть

$$d_k(\varphi) := \sup_{z \in \Omega_k} |\varphi(z)|,$$

тогда $d_k(\cdot)$, $k > 0$, образуют систему полунорм, порождающих топологию в локально выпуклом пространстве $\mathcal{A}$. Используя оценку (2.13), в которой k заменено на $(k+1)$, получим, что $\mathfrak{n}_k(g) \leqslant d_k(\varphi)$, откуда вытекает, что отображение $\Lambda^{-1} : \varphi(z) \mapsto g(x)$ является непрерывным отображением из пространства $\mathcal{A}$ в $C'_*(\mathbb{Z}^n)$. Таким образом, Λ является изоморфизмом топологических векторных пространств $C'_*(\mathbb{Z}^n)$ и $\mathcal{A}$. Легко проверить, что для любых $g_1, g_2 \in C'_*(\mathbb{Z}^n)$ справедливо равенство

$$\Lambda(g_1 * g_2) = \Lambda(g_1)\Lambda(g_2),$$

т. е. отображение Λ переводит свертку функций в произведение, поэтому Λ является изоморфизмом топологических алгебр. $\square$

Для любого открытого множества $U \subseteq \mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$ пусть $\mathcal{E}(U)$ — множество всех бесконечно дифференцируемых комплекснозначных функций на U. Множество $\mathcal{E}(U)$ является полным локально выпуклым пространством с обычной топологией равномерной сходимости вместе со всеми производными на компактных подмножествах множества U. Сопряженное пространство $\mathcal{E}'(U)$ совпадает с множеством обобщенных функций на U с компактным носителем. Для $f \in \mathcal{E}'(U)$ и $\varphi \in \mathcal{E}(U)$ через $\langle f, \varphi \rangle$ будем обозначать значение линейного функционала f на функции φ.

Если $r = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, то пусть $|r| := r_1 + \dots + r_n$, $r! := r_1! \dots r_n!$. Для любой функции $\varphi \in \mathcal{E}(U)$ пусть

$$\partial_j \varphi := \frac{\partial \varphi}{\partial z_j}, \quad \partial^r \varphi := \partial_1^{r_1} \dots \partial_n^{r_n} \varphi.$$

Обычным образом действие оператора ∂^r переносится на обобщенные функции, т. е.

$$\langle \partial^r f, \varphi \rangle := (-1)^{|r|} \langle f, \partial^r \varphi \rangle, \quad f \in \mathcal{E}'(U), \ \varphi \in \mathcal{E}(U). \tag{2.14}$$

Через δ_β будем обозначать δ-функцию с носителем в точке $\beta \in U$, т. е.

$$\langle \delta_\beta, \varphi \rangle := \varphi(\beta), \quad \varphi \in \mathcal{E}(U).$$

Для $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{C}^n$ через $\mathcal{F}_\beta$ обозначим множество формальных степенных рядов от n комплексных переменных с центром в точке β. Элементы из $\mathcal{F}_\beta$ имеют вид

$$\Phi = \sum_{r \in \mathbb{Z}_+^n} a_r (z - \beta)^r, \quad a_r \in \mathbb{C}, \tag{2.15}$$

где $r = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, $(z-\beta)^r := (z_1-\beta_1)^{r_1} \dots (z_n-\beta_n)^{r_n}$.

Множество $\mathcal{F}_\beta$ является кольцом и, если ввести топологию покоэффициентной сходимости (см. [14, гл. I, §5]), то становится локально выпуклым пространством.

Сопряженное пространство $\mathcal{F}'_\beta$ можно отождествить с пространством обобщенных функций вида

$$F = \sum_{|r| \leqslant N} c_r \partial^r \delta_\beta, \tag{2.16}$$

где $N \in \mathbb{Z}_+$, $r \in \mathbb{Z}_+^n$, $c_r \in \mathbb{C}$. Двойственность между пространствами $\mathcal{F}'$ и $\mathcal{F}$ задается формулой

$$\langle F, \Phi \rangle = \sum_{r \in \mathbb{Z}_+^n} (-1)^{|r|} r! a_r c_r, \tag{2.17}$$

где F задается формулой (2.16), а Φ — формулой (2.15).

Через $\mathcal{A}_\beta$ обозначим кольцо ростков голоморфных функций в точке β. Возникает естественное вложение $\mathcal{A}_\beta \subset \mathcal{F}_\beta$, которое получается сопоставлением каждой функции из $\mathcal{A}_\beta$ ее степенного ряда с центром в точке β.

Напомним следующие свойства колец $\mathcal{A}_\beta$ и $\mathcal{F}_\beta$ ([14, гл. I, §5] или [16]):

1°. Кольцо $\mathcal{A}_\beta$ нетерово, т. е. всякий идеал I из $\mathcal{A}_\beta$ порожден конечным числом элементов из I.

2°. Всякий идеал в кольце $\mathcal{F}_\beta$ замкнут.

3°. Пусть $f, g_1, \dots, g_k \in \mathcal{A}_\beta$. Для того, чтобы f содержался в идеале кольца $\mathcal{A}_\beta$, порожденном элементами $g_1, \dots, g_k$, необходимо и достаточно, чтобы f принадлежал идеалу кольца $\mathcal{F}_\beta$, порожденному элементами $g_1, \dots, g_k$.

Через $\mathcal{D}_j$ обозначим дифференциальный оператор

$$(\mathcal{D}_j f)(z) := -\frac{\partial}{\partial z_j}(z_j f(z)) = -z_j \frac{\partial f}{\partial z_j}(z) - f(z), \quad j = 1, \dots, n.$$

Любому многочлену $P(x) = P(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ ($\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ — множество многочленов от n переменных $x_1, \dots, x_n$ с комплексными коэффициентами) сопоставим дифференциальный оператор

$$P(\mathcal{D}) := P(\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_n).$$

Если $r = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, то пусть $\mathcal{D}^r := (\mathcal{D}_1)^{r_1} \dots (\mathcal{D}_n)^{r_n}$.

Лемма 2.3. *Любой элемент $F \in \mathcal{F}'_\beta$, $\beta \in \mathbb{C}_*^n$, можно представить в виде*

$$F = P(\mathcal{D})\delta_\beta$$

для некоторого многочлена $P(x) \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$.

Доказательство. Воспользуемся вложением $\mathcal{F}'_\beta \subset \mathcal{E}'(\mathbb{C}'_*)$. Для любых $F_1, \dots, F_d \in \mathcal{E}'(\mathbb{C}'_*)$ пусть $\mathrm{Lin}\{F_1, \dots, F_d\}$ — линейная оболочка обобщенных функций $F_1, \dots, F_d$. Для любого $N \in \mathbb{Z}_+$ обозначим

$$V_n := \mathrm{Lin}\{\partial^r \delta_\beta : r \in \mathbb{Z}_+^n, |r| \leqslant N\},$$
$$\tilde{V}_n := \mathrm{Lin}\{\mathcal{D}^r \delta_\beta : r \in \mathbb{Z}_+^n, |r| \leqslant N\}.$$

Пусть $F \in \mathcal{F}'_\beta$. С учетом того, что F можно представить в виде (2.16), для доказательства леммы достаточно показать, что $\tilde{V}_N = V_N$.

Обозначим через $\mathcal{D}_j^*$ дифференциальный оператор

$$(\mathcal{D}_j^* f)(z) := z_j \partial_j f(z). \tag{2.18}$$

Оператор $\mathcal{D}_j^*$ является сопряженным оператором к $\mathcal{D}_j$, т. е.

$$\langle \mathcal{D}_j f, \varphi \rangle = \langle f, \mathcal{D}_j^* \varphi \rangle, \quad f \in \mathcal{E}'(\mathbb{C}_*^n), \ \varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{C}_*^n). \tag{2.19}$$

Для $r = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ полагаем $(\mathcal{D}_1^*)^r := (\mathcal{D}^*)^{r_1} \dots (\mathcal{D}_n^*)^{r_n}$.

Пусть $|r| = N$. Легко видеть, что

$$(\mathcal{D}^*)^r \varphi(z) = z^r \partial^r \varphi(z) + \sum_{|s|<N} a_s(z) \partial^s \varphi(z), \tag{2.20}$$

где $s = (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, $a_s(z) = a_s(z_1, \dots, z_n)$ — некоторый многочлен от n-переменных.

Используя (2.19) и (2.20), получим, что для любого $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{C}_*^n)$ справедливо равенство

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{D}^r \delta_\beta, \varphi \rangle = \langle \delta_\beta, (\mathcal{D}^*)^r \varphi \rangle &= \left\langle \delta_\beta, z^r \partial^r \varphi(z) + \sum_{|s|<N} a_s(z) \partial^s \varphi(z) \right\rangle \\
&= \beta^r (\partial^r \varphi)(\beta) + \sum_{|s|<N} a_s(\beta) (\partial^s \varphi)(\beta) \\
&= (-1)^{|r|} \beta^r \langle \partial^r \delta_\beta, \varphi \rangle + \sum_{|s|<N} (-1)^{|s|} a_s(\beta) \langle \partial^s \delta_\beta, \varphi \rangle,
\end{aligned}$$

следовательно,

$$\mathcal{D}^r \delta_\beta = (-1)^{|r|} \beta^r \partial^r \delta_\beta + \sum_{|s|<N} (-1)^{|s|} a_s(\beta) \partial^s \delta_\beta. \tag{2.21}$$

Из (2.21) следует включение $\tilde{V}_N \subseteq V_N$, а так как $\beta^r \neq 0$, то из (2.21) вытекает и обратное включение $V_N \subseteq \tilde{V}_N$, откуда $V_n = \tilde{V}_N$. □

Лемма 2.4. *Пусть $f(x) = P(x)\beta^x$, $x \in \mathbb{Z}^n$, $\beta \in \mathbb{C}_*^n$, $P(x) \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$. Тогда для любой функции $g(x) \in C_*'(\mathbb{Z}^n)$ справедливо равенство*

$$\langle g, f \rangle = \langle P(\mathcal{D}) \delta_\beta, \hat{g} \rangle, \tag{2.22}$$

где $\hat{g}(z) = \Lambda(g) \in \mathcal{A}$.

Доказательство. Определим дифференциальный оператор

$$P(\mathcal{D}^*) := P(\mathcal{D}_1^*, \dots, \mathcal{D}_n^*),$$

где $\mathcal{D}_j^*$ — дифференциальные операторы, определенные в (2.18). Из (2.19) вытекает, что

$$\langle P(\mathcal{D}) F, \varphi \rangle = \langle F, P(\mathcal{D}^*) \varphi \rangle \tag{2.23}$$

для любых $F \in \mathcal{E}'(\mathbb{C}_*^n)$, $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{C}_*^n)$.

Из (2.3) следует, что

$$\langle g, f \rangle = \sum_{x \in \mathbb{Z}^n} g(x) P(x) \beta^x. \tag{2.24}$$

С другой стороны, заметим, что

$$(\mathcal{D}^*)^r z^x = x^r z^x,$$

откуда получим

$$P(\mathcal{D}^*)z^x = P(x)z^x. \tag{2.25}$$

Если

$$\hat{g}(z) = \sum_{x\in\mathbb{Z}^n} g(x)z^x,$$

то из (2.29) вытекает

$$P(\mathcal{D}^*)\hat{g}(z) = \sum_{x\in\mathbb{Z}^n} g(x)P(x)z^x. \tag{2.26}$$

Используя (2.23) и (2.26), получим, что

$$\langle P(\mathcal{D})\delta_\beta, \hat{g}\rangle = \langle \delta_\beta, P(\mathcal{D}^*)\hat{g}\rangle = \sum_{x\in\mathbb{Z}^n} g(x)P(x)\beta^x,$$

откуда с учетом (2.24) вытекает равенство (2.22). □

Пусть H — инвариантное подпространство в $C_*(\mathbb{Z}^n)$, $H^\perp$ — его ортогональное дополнение в $C'_*(\mathbb{Z}^n)$, $I = \Lambda(H^\perp)$ — образ $H^\perp$ при отображении $\Lambda : g(x) \mapsto \hat{g}(z)$. Тогда I является замкнутым идеалом в алгебре $\mathcal{A}$. Для любой точки $\beta \in \mathbb{C}^n_*$ обозначим через I_β идеал кольца $\mathcal{A}_\beta$, порожденный идеалом I, а через $\mathcal{E}_\beta$ — идеал кольца $\mathcal{F}_\beta$, порожденный идеалом I (с использованием естественных вложений $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_\beta$ и $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}_\beta$). Пусть $\mathcal{E}^\perp_\beta$ — ортогональное дополнение к $\mathcal{E}_\beta$ в двойственном пространстве $\mathcal{F}'_\beta$.

Лемма 2.5. *Экспоненциальный моном $f(x) = P(x)\beta^x$ содержится в инвариантном подпространстве H тогда и только тогда, когда $P(\mathcal{D})\delta_\beta \in \mathcal{E}^\perp_\beta$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $f(x) = P(x)\beta^x \in H$, $\beta \in \mathbb{C}^n_*$, $P(x)$ — полином от n переменных. Докажем, что $P(\mathcal{D})\delta_\beta \in \mathcal{E}^\perp_\beta$.

Если $g \in H^\perp$, то $\hat{g}(z) \in I$, и из леммы 2.5 следует, что

$$\langle P(\mathcal{D})\delta_\beta, \hat{g}\rangle = \langle g, f\rangle = 0,$$

т. е.

$$\langle P(\mathcal{D})\delta_\beta, \varphi\rangle = 0 \quad \forall \varphi \in I. \tag{2.27}$$

Пусть Ψ — произвольный элемент из $\mathcal{F}_\beta$, $\varphi \in I$. Проверим, что

$$\langle P(\mathcal{D})\delta_\beta, \varphi\Psi\rangle = 0. \tag{2.28}$$

Если
$$\Psi = \sum_{r\in\mathbb{Z}_+^n} a_r(z-\beta)^r, \tag{2.29}$$
то пусть
$$\Psi^{(N)}(z) = \sum_{|r|\leqslant N} a_r(z-\beta)^r, \quad N\in\mathbb{N}. \tag{2.30}$$
Тогда $\Psi^{(N)} \in \mathcal{A}$ и $\varphi\Psi^{(N)} \to \varphi\Psi$ в пространстве $\mathcal{F}_\beta$ при $N\to\infty$. Так как I — идеал в $\mathcal{A}$, то $\varphi\Psi^{(N)} \in I$, а так как $P(\mathcal{D})\delta_\beta$ — линейный непрерывный функционал на пространстве $\mathcal{F}_\beta$, то из $\langle P(\mathcal{D})\delta_\beta, \varphi\Psi^{(N)}\rangle = 0$ вытекает (2.28).

Так как $\mathcal{E}_\beta$ — идеал в $\mathcal{F}_\beta$, порожденный идеалом I, то любой элемент $\Phi\in\mathcal{E}_\beta$ можно представить в виде конечной суммы
$$\Phi = \sum_j \varphi_j\Psi_j,$$
где $\varphi_j\in I$, $\Psi_j\in\mathcal{F}_\beta$. Из (2.28) следует, что
$$\langle P(\mathcal{D})\delta_\beta, \Phi\rangle = \sum_j \langle P(\mathcal{D})\delta_\beta, \varphi_j\Psi_j\rangle = 0,$$
откуда вытекает, что $P(\mathcal{D})\delta_\beta \in \mathcal{E}_\beta^\perp$.

Достаточность. Пусть $P(\mathcal{D})\delta_\beta\in\mathcal{E}_\beta^\perp$. Докажем, что $f(x) = P(x)\beta^x \in H$. Действительно, из того, что $P(\mathcal{D})\delta_\beta\in\mathcal{E}_\beta^\perp$, следует, в частности, равенство
$$\langle P(\mathcal{D})\delta_\beta, \hat{g}\rangle = 0 \quad \forall \hat{g}\in I.$$
Тогда из леммы 2.4 вытекает, что $\langle f, g\rangle = 0$ для любого $g\in H^\perp$, откуда следует, что $f\in H$. □

Лемма 2.6. *Пусть $g(x)\in C'_*(\mathbb{Z}^n)$, $\beta\in\mathbb{C}_*^n$, H — инвариантное подпространство в $C_*(\mathbb{Z}^n)$, $I = \Lambda(H^\perp)$, I_β — идеал в кольце $\mathcal{A}_\beta$, порожденный идеалом I. Следующие утверждения эквивалентны*:

(i) *функция $\hat{g}(z)$ принадлежит идеалу I_β*;

(ii) *для любого принадлежащего H экспоненциального монома $f(x) = P(x)\beta^x$ справедливо равенство $\langle g, f\rangle = 0$.*

Доказательство. (i) $\Rightarrow$ (ii). Пусть $\hat{g}(z)\in I_\beta$, $f(x) = P(x)\beta^x\in H$. По лемме 2.5 из того, что $f(x)\in H$, следует, что $P(\mathcal{D})\delta_\beta\in\mathcal{E}_\beta^\perp$. Так как $I_\beta\subset\mathcal{E}_\beta$, то $\hat{g}\in\mathcal{E}_\beta$ и из (2.22) вытекает, что
$$\langle g, f\rangle = \langle P(\mathcal{D})\delta_\beta, \hat{g}\rangle = 0.$$

(ii) $\Rightarrow$ (i). Пусть $\langle g, f\rangle = 0$ для любого экспоненциального монома $f\in H$. Из свойств 1° и 3° колец $\mathcal{A}_\beta$ и $\mathcal{F}_\beta$ вытекает, что для доказательства

включения $\hat{g} \in I_\beta$ достаточно доказать, что $\hat{g} \in \mathcal{E}_\beta$. Идеал $\mathcal{E}_\beta$ замкнут в $\mathcal{F}_\beta$ (свойство 2°), поэтому для доказательства включения $\hat{g} \in \mathcal{E}_\beta$ можно воспользоваться теоремой Хана–Банаха и показать, что любой функционал из $\mathcal{F}'_\beta$, ортогональный к $\mathcal{E}_\beta$, ортогонален $\hat{g}$.

По лемме 2.3 любой функционал $F \in \mathcal{F}'_\beta$ можно представить в виде $F = P(\mathcal{D})\delta_\beta$. Пусть $P(\mathcal{D})\delta_\beta \in \mathcal{E}_\beta^\perp$, тогда по лемме 2.5 экспоненциальный моном $f(x) = P(x)\beta^x$ содержится в H, следовательно, $\langle g, f\rangle = 0$. По лемме 2.4 из $\langle g, f\rangle = 0$ вытекает $\langle P(\mathcal{D})\delta_\beta, \hat{g}\rangle = 0$, откуда следует, что $\hat{g} \in \mathcal{E}_\beta$. $\square$

Для любого открытого подмножества $U \subseteq \mathbb{C}^n$ через $\mathcal{A}(U)$ обозначим множество всех голоморфных в U функций. Множество $\mathcal{A}(U)$ снабжается топологией равномерной сходимости на компактных подмножествах в U и становится полным локально выпуклым пространством. Относительно поточечного умножения функций $\mathcal{A}(U)$ будет топологической алгеброй. Частным случаем алгебры $\mathcal{A}(U)$ является алгебра $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathbb{C}^n_*)$.

Для любого $\beta \in U$ возникает естественное вложение $\mathcal{A}(U) \subset \mathcal{A}_\beta$. Если I — замкнутый идеал в алгебре $\mathcal{A}(U)$, то пусть I_β — идеал в кольце $\mathcal{A}_\beta$, порожденный идеалом I. Идеал I_β называется локальным идеалом идеала I в точке β. Замкнутый идеал I кольца $\mathcal{A}(U)$ называется локализуемым, если

$$I = \bigcap_{\beta \in U} I_\beta.$$

Теорема 2.1. *Пусть H — инвариантное подпространство в $C_*(\mathbb{Z}^n)$, $I = \Lambda(H^\perp)$ — соответствующий ему замкнутый идеал алгебры $\mathcal{A}$. Инвариантное подпространство H допускает спектральный синтез тогда и только тогда, когда замкнутый идеал I локализуем.*

Доказательство. Пусть инвариантное подпространство H допускает спектральный синтез. Любая функция из $\mathcal{A}$ имеет вид $\hat{g} = \Lambda(g)$ для некоторой функции $g(x) \in C'_*(\mathbb{Z}^n)$. Предположим, что $\hat{g}(z) \in I_\beta$ для любой точки $\beta \in \mathbb{C}^n_*$.

Если экспоненциальный моном $f(x) = P(x)\beta^x$ принадлежит H, то по лемме 2.6 $P(\mathcal{D})\delta_\beta \in \mathcal{E}_\beta^\perp$. Используя лемму 2.4 и включение $I_\beta \subset \mathcal{E}_\beta$, получим

$$\langle g, f\rangle = \langle P(\mathcal{D})\delta_\beta, \hat{g}\rangle = 0,$$

а так как H допускает спектральный синтез, то линейная оболочка всех содержащихся в H экспоненциальных мономов всюду плотна в H, поэтому $g \in H^\perp$ и, следовательно, $\hat{g} \in I$, что доказывает локализуемость идеала I.

Обратно, предположим, что идеал I локализуем, нужно доказать, что H допускает спектральный синтез. Пусть $g(x) \in C'_*(\mathbb{Z}^n)$ и $\langle g, f\rangle = 0$ для любого экспоненциального монома $f(x) = P(x)\beta^x \in H$. Тогда по лемме 2.6

$\hat{g} \in I_\beta$ для любого $\beta \in \mathbb{C}^n_*$. Из локализуемости идеала I вытекает, что $\hat{g} \in I$, откуда следует, что $g \in H^\perp$. По теореме Хана–Банаха из этого вытекает, что замыкание линейной оболочки экспоненциальных мономов из H совпадает с H, т. е. H допускает спектральный синтез. □

Доказательство теоремы 1.1 для $G = \mathbb{Z}^n$. По теореме 2.1, чтобы доказать, что спектральный синтез справедлив в пространстве $C_*(\mathbb{Z}^n)$, достаточно показать, что любой замкнутый идеал I алгебры $\mathcal{A}$ локализуем.

Пусть U — произвольное открытое подмножество в $\mathbb{C}^n$, $\mathcal{A}(U)$ — алгебра всех голоморфных в U функций. Известно, что в алгебре $\mathcal{A}(U)$ все замкнутые идеалы локализуемы, если U — область Штейна (см. [17]). В нашем случае $U = \mathbb{C}^n_* = \mathbb{C}_* \times \cdots \times \mathbb{C}_*$, $\mathbb{C}_* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ — открытое подмножество в $\mathbb{C}^1$. Известно, что в $\mathbb{C}^1$ любое открытое связное подмножество является областью Штейна или, эквивалентно, областью голоморфности (см. [18, гл. I, п. G10]). Кроме того, известно, что декартово произведение областей Штейна также является областью Штейна [19, гл. III], поэтому $\mathbb{C}^n_*$ является областью Штейна в $\mathbb{C}^n$. Следовательно, любой замкнутый идеал I в алгебре $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathbb{C}^n_*)$ локализуем. □

§3. Доказательство теоремы 1.1 в общем случае

В этом параграфе теорема 1.1 будет доказана для произвольной конечно порожденной бесконечной абелевой группы. Предварительно приведем некоторые вспомогательные результаты.

Пусть $\widetilde{G}$ и G — абелевы группы, $\alpha : \widetilde{G} \mapsto G$ — сюръективный гомоморфизм. Для любой функции $f : G \mapsto \mathbb{C}$ пусть $\tilde{f} := f \circ \alpha$.

Предложение 3.1. *Для того чтобы функция $\tilde{f} = f \circ \alpha$ была экспоненциальным мономом на группе $\widetilde{G}$, необходимо и достаточно, чтобы функция f была экспоненциальным мономом на группе G.*

Доказательство. См. [6, доказательство теоремы 2.24]. □

Далее пусть G — конечно порожденная бесконечная абелева группа, $v_1, \ldots, v_n$ — система образующих группы G, $\widetilde{G} = \mathbb{Z}^n$ — свободная абелева группа. Элементы группы $\mathbb{Z}^n$ будем обозначать через $t = (t_1, \ldots, t_n)$, $t_j \in \mathbb{Z}$, а элементы группы G — через x. Отображение

$$\alpha : t = (t_1, \ldots, t_n) \mapsto x = t_1 v_1 + \cdots + t_n v_n \tag{3.1}$$

является сюръективным гомоморфизмом группы $\mathbb{Z}^n$ на группу G. Для любой группы G через $C(G)$ будем обозначать множество всех комплекснозначных функций на G.

Определим отображение $A : C(G) \mapsto C(\mathbb{Z}^n)$ формулой $A(f)(t) := \tilde{f}(t) = f(\alpha(t))$, $t \in \mathbb{Z}^n$. Пусть $K = \{t \in \mathbb{Z}^n : \alpha(t) = 0\}$ — ядро гомоморфизма α. Очевидно, что функция $g \in C(\mathbb{Z}^n)$ имеет вид $g = A(f)$ для некоторой функции $f \in C(G)$ тогда и только тогда, когда выполняются условия

$$g(t+s) = g(t) \quad \forall t \in \mathbb{Z}^n, \ \ s \in K. \tag{3.2}$$

Если H — подмножество в $C(G)$, то пусть $\tilde{H} = A(H)$ — образ множества H при отображении A. Пространства $C_k(G)$, $C_k(\mathbb{Z}^n)$, $C_*(G)$ и $C_*(\mathbb{Z}^n)$ определены в §1. Чтобы различать нормы в банаховых пространствах $C_k(G)$ и $C_k(\mathbb{Z}^n)$ (см. (1.4)) будем обозначать через $\|\cdot\|_{G,k}$ норму в $C_k(G)$, а через $\|\cdot\|_k$ — норму в $C_k(\mathbb{Z}^n)$.

Предложение 3.2. (i) *Отображение A является линейным непрерывным оператором из пространства $C_*(G)$ в пространство $C_*(\mathbb{Z}^n)$.*

(ii) *Если H — инвариантное подпространство в $C_*(G)$, то его образ $\tilde{H} = A(H)$ является инвариантным подпространством в $C_*(\mathbb{Z}^n)$.*

Доказательство. 1) Пусть $f(x) \in C_k(G)$, $\tilde{f}(t) = f(\alpha(t))$. Из определения $|x|$ для $x \in G$ и $|t|$ для $t \in \mathbb{Z}^n$ вытекает, что $|\alpha(t)| \leqslant |t|$ для любого $t \in \mathbb{Z}^n$. Тогда

$$|\tilde{f}(t)|e^{-k|t|} = |f(\alpha(t))|e^{-k|t|} \leqslant |f(\alpha(t))|e^{-k|\alpha(t)|} \leqslant \sup_{x\in G} |f(x)|e^{-k|x|} = \|f\|_{G,k}. \tag{3.3}$$

Из (3.3) следует, что

$$|\tilde{f}(t)|e^{-(k+1)|t|} \leqslant \|f\|_{G,k}\, e^{-|t|}, \tag{3.4}$$

поэтому $\tilde{f} \in C_{k+1}(\mathbb{Z}^n)$. Кроме того, из (3.4) вытекает неравенство

$$\|\tilde{f}\|_{k+1} = \sup_{t\in\mathbb{Z}^n} |\tilde{f}(t)|e^{-(k+1)|t|} \leqslant \|f\|_{G,k}, \tag{3.5}$$

поэтому A является линейным непрерывным отображением из банахова пространства $C_k(G)$ в банахово пространство $C_{k+1}(\mathbb{Z}^n)$, а из определения топологии индуктивного предела следует, что A является линейным непрерывным отображением из топологического векторного пространства $C_*(G)$ в топологическое векторное пространство $C_*(\mathbb{Z}^n)$.

2) Как и раньше, пусть K — ядро гомоморфизма α. Введем обозначение

$$C_*^K(\mathbb{Z}^n) := \{g(t) \in C_*(\mathbb{Z}^n) : g(t+s) = g(t) \quad \forall s \in K\}.$$

Множество $C_*^K(\mathbb{Z}^n)$ является замкнутым линейным подпространством в $C_*(\mathbb{Z}^n)$. С топологией, индуцированной из пространства $C_*(\mathbb{Z}^n)$, множество $C_*^K(\mathbb{Z}^n)$ является полным локально выпуклым пространством. *Проверим, что образ $A(C_*(G))$ совпадает с пространством $C_*^K(\mathbb{Z}^n)$ и*

что отображение A является изоморфизмом топологического векторного пространства $C_*(G)$ на топологическое векторное пространство $C_*^K(\mathbb{Z}^n)$.

Вложение $A(C_*(G)) \subseteq C_*^K(\mathbb{Z}^n)$ очевидно. Пусть $g(t) \in C_*^K(\mathbb{Z}^n)$, тогда $g(t)$ можно представить в виде $g(t) = f(\alpha(t))$ для некоторой однозначно определенной функции $f(x) \in C(G)$. Докажем, что $f \in C_*(G)$ и что отображение $A^{-1} : g(t) \mapsto f(x)$ из $C_*^K(\mathbb{Z}^n)$ в $C_*(G)$ непрерывно.

Пусть $g(t) \in C_*^K(\mathbb{Z}^n) \cap C_k(\mathbb{Z}^n)$, $k > 0$. Для любого $x \in G$ существует $t \in \mathbb{Z}^n$ такой, что $x = \alpha(t)$ и $|t| = |x|$, откуда

$$|f(x)|e^{-k|x|} = |f(\alpha(t))|e^{-k|\alpha(t)|} = |g(t)|e^{-k|t|} \leqslant \|g\|_k. \tag{3.6}$$

Из (3.6) следует, что

$$|f(x)|e^{-(k+1)|x|} \leqslant \|g\|_k\, e^{-|x|}, \tag{3.7}$$

поэтому $f(x) \in C_{k+1}(G)$. Кроме того, из (3.6) вытекает неравенство

$$\|f\|_{G,k+1} \leqslant \|g\|_k,$$

откуда следует, что A^{-1} является непрерывным отображением из $C_*^K(\mathbb{Z}^n)$ в $C_*(G)$. Тем самым доказано, что $A(C_*(G)) = C_*^K(\mathbb{Z}^n)$ и отображение A является изоморфизмом топологического векторного пространства $C_*(G)$ на топологическое векторное пространство $C_*^K(\mathbb{Z}^n)$.

3) Пусть H — инвариантное подпространство в $C_*(G)$, т. е. H — замкнутое и τ-инвариантное линейное подпространство в $C_*(G)$. *Проверим, что $\widetilde{H} = A(H)$ является инвариантным подпространством в $C_*(\mathbb{Z}^n)$.*

Так как A является изоморфизмом топологических векторных пространств $C_*(G)$ и $C_*^K(\mathbb{Z}^n)$, то $\widetilde{H} = A(H)$ будет замкнутым линейным подпространством в $C_*^K(\mathbb{Z}^n)$, а так как $C_*^K(\mathbb{Z}^n)$ замкнуто в $C_*(\mathbb{Z}^n)$, то $\widetilde{H}$ является замкнутым линейным подпространством в $C_*(\mathbb{Z}^n)$.

Пусть $g(t) \in \widetilde{H}$, тогда $g(t) = f(\alpha(t)$ для некоторой функции $f \in H$. Заметим, что для любого $s \in \mathbb{Z}^n$

$$(\tau_s g)(t) = f(\alpha(t+s)) = f(\alpha(t) + \alpha(s)) = A(\tau_{\alpha(s)} f)(t).$$

Так как $\tau_{\alpha(s)} f \in H$, то $\tau_s g = A(\tau_{\alpha(s)} f) \in \widetilde{H}$, следовательно, $\widetilde{H}$ является инвариантным подпространством в $C_*(\mathbb{Z}^n)$. □

Теперь можно завершить доказательство теоремы 1.1.

Доказательство теоремы 1.1 (общий случай). Пусть G — конечно порожденная бесконечная абелева группа, $v_1, \ldots, v_n$ — система образующих группы G, $\alpha : \mathbb{Z}^n \mapsto G$ — отображение (3.1). Пусть H — инвариантное подпространство в $C_*(G)$, тогда по предложению 3.2 $\widetilde{H} = A(H)$

является инвариантным подпространством в $C_*(\mathbb{Z}^n)$. Так как теорема 1.1 справедлива для группы $\mathbb{Z}^n$, но $\widetilde{H}$ допускает спектральный синтез, т. е. $\widetilde{H}$ совпадает с замыканием линейной оболочки экспоненциальных мономов $g(t)$, принадлежащих $\widetilde{H}$. По предложению 3.1 функция $g(t)$ является экспоненциальным мономом на группе $\mathbb{Z}^n$ тогда и только тогда, когда функция $f = A^{-1}(g)$ является экспоненциальным мономом на группе G. Так как A является изоморфизмом топологических векторных пространств $C_*(G)$ и $C_*^K(\mathbb{Z}^n)$ (см. доказательство предложения 3.2), то подпространство $H = A^{-1}(\widetilde{H})$ совпадает с замыканием в $C_*(G)$ линейной оболочки экспоненциальных мономов $A^{-1}(g)$, т. е. H допускает спектральный синтез, что завершает доказательство теоремы 1.1. □

Список литературы

[1] Schwartz L., *Théorie générale des fonctions moyenne-périodiques*, Ann. of Math. (2) **48** (1947), 857–929.

[2] Gilbert J. E., *On the ideal structure of some algebras of analytic functions*, Pacific J. Math. **35** (1970), 625–634.

[3] Платонов С. С., *Спектральный синтез в некоторых функциональных топологических векторных пространствах*, Алгебра и анализ **22** (2010), №5, 154–185.

[4] Гуревич Д. И., *Контрпримеры к проблеме Л. Шварца*, Функц. анал. и его прил. **9** (1975), №2, 29–35.

[5] Schwartz L., *Analyse et synthèse harmoniques dans les espaces de distributions*, Canadian J. Math. **3** (1951), 503–512.

[6] Székelyhidi L., *Discrete spectral synthesis and its applications*, Springer, Dordrecht, 2006.

[7] Lefranc M., *Analyse spectrale sur Z_n*, C. R. Acad. Sci. Paris **246** (1958), 1951–1953.

[8] Székelyhidi L., *On discrete spectral synthesis*, Functional Equations — Results and Advances (Z. Daróczy and Zs. Páles, eds.), Adv. Math. (Dordr.), vol. 3, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2002, pp. 263–274.

[9] Bereczky A., Székelyhidi L., *Spectral synthesis on torsion groups*, J. Math. Anal. Appl. **304** (2005), 607–613.

[10] Берг Й., Лефстрем Й., *Интерполяционные пространства. Введение*, Мир, М., 1980.

[11] Робертсон А., Робертсон В., *Топологические векторные пространства*, Мир, М., 1967.

[12] Никольский Н. К., *Инвариантные подпространства в теории операторов и теории функций*, Итоги науки и техн. Мат. анал., т. 12, ВИНИТИ, М., 1974, с. 199–412.

[13] Баскаков А. Г., *Теория представлений банаховых алгебр, абелевых групп и полугрупп в спектральном анализе линейных операторов*, Соврем. мат. Фундам. направл. **9** (2004), 3–151.
[14] Напалков В. В., *Уравнения свертки в многомерных пространствах*, Наука, М., 1982.
[15] Мальгранж Б., *Идеалы дифференцируемых функций*, Мир, М., 1968.
[16] Cartan H., *Seminaire Henri Cartan.* 1951/1952. *Fonctions analytiques de plusieurs variables complexes*, W. A. Benjamin, Inc., New York–Amsterdam, 1967.
[17] Cartan H., *Idéaux et modules de fonctions analytiques de variables complexes*, Bull. Soc. Math. France **78** (1950), 29–64.
[18] Ганнинг Р., Росси Х., *Аналитические функции многих комплексных переменных*, Мир, М., 1969.
[19] Шабат Б. В., *Введение в комплексный анализ.* Ч. 2, Наука, М., 1976.

Петрозаводский
государственный университет
185910, Петрозаводск
пр. Ленина, 33
Россия
E-mail: platonov@psu.karelia.ru

Поступило 9 сентября 2011 г.