К. Н. Лунгу, Наилучшее приближение функции $|x|$ рациональными функциями вида $1/P_n(x)$,
Сиб. матем. журн., 1974, том 15, номер 5, 1152–1156

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Т. XV, № 5 Сентябрь — Октябрь 1974

УДК 517.51

К. Н. ЛУНГУ

НАИЛУЧШЕЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИИ $|x|$ РАЦИОНАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ ВИДА $1/P_n(x)$

1. Пусть $\Delta=[a, b]$ — отрезок действительной прямой, $f(x)$, $x\in\Delta$ — функция (действительная), определенная и непрерывная на отрезке Δ. Через $R_{0,n}(f, \Delta)$ обозначим наилучшее приближение функции $f(x)$ на отрезке Δ посредством рациональных функций вида $1/P_n(x)$, где P_n — многочлен (алгебраический) степени не выше n (с действительными коэффициентами). Другими словами,

$$R_{0,n}(f, \Delta)=\inf_{\{P_n\}}\max_{x\in\Delta}|f(x)-1/P_n(x)|.$$

В работе ([1]) доказано, что

$$R_{0,n}(|x|, [-1, 1])<(1+\pi)n^{-1/3}.$$

В этой статье доказывается следующая

Теорема 1. *Существуют абсолютные постоянные c_1 и c_2 такие, что*

$$c_1/n<R_{0,n}(|x|, [-1, 1])<c_2\ln n/n. \tag{1}$$

Соотношение (1) мы выведем из следующего, более сильного утверждения.

Теорема 2. *Для любого α, $0<\alpha<1$, справедливы неравенства*

$$A_1/n^{2\alpha}<R_{0,n}(x^\alpha, [0, 1])<A_2(\ln n/n)^{2\alpha}, \tag{2}$$

где A_1 и A_2 — (абсолютные) постоянные.

2. Докажем сначала правую часть соотношения (2). Для любого δ, $0<\delta<1/4$, имеем

$$(x+2\delta)^\alpha-x^\alpha\leqslant(2\delta)^\alpha,\quad x\in[0, 1]. \tag{3}$$

Положим $h(x)=h(x, \delta)=(x+2\delta)^{-\alpha}$. Функция $h(x)$ аналитична в замкнутом круге $K_\delta=\{x\colon\ |x-1|\leqslant1+\delta\}$ в плоскости переменного x и

$$\max_{x\in K}|h(x)|=M_\delta=h(-\delta)=1/\delta^\alpha. \tag{4}$$

Линейная функция $x=(t+1)/2$ отображает отрезок $[-1,1]$ плоскости (t) в отрезок $[0,1]$ плоскости (x) так, что точка $t=-1-2\delta$ переходит в точку $x=-\delta$. Поэтому функция $h(x)=h((t+1)/2)=\varphi(t)$ как функция переменного t аналитична в замкнутой области E^*, ограниченной эллипсом E с фокусами в точках $t=\pm 1$, проходящим через точку $t=1+2\delta$; при этом

$$\max_{t\in E^*}|\varphi(t)|\leqslant \max_{x\in K}|h(x)|=M_\delta.$$

Сумма полуосей этого эллипса равна

$$\rho=1+2\delta+\sqrt{(1+2\delta)^2-1}>1+2\sqrt{\delta}>e^{\sqrt{\delta}}$$

(здесь мы воспользовались очевидным неравенством $e^{t/2}<1+t$, $0<t<1$). К функции $\varphi(t)$ применим известную теорему о приближении аналитических функций многочленами (см., например, [2], стр. 271). Получаем (здесь Q_n — многочлен степени n, $n>1$) для $t\in[-1,1]$

$$(5)\qquad |\varphi(t)-Q_n(t)|<3M_\delta/\rho^n<3\delta^{-\alpha}e^{-n\sqrt{\delta}}=A_n(\delta).$$

Переходим к переменной x ($t=2x-1$, $Q_n(t)=Q_n(2x-1)=P_n(x)$, $\varphi(t)=h(x)$). Оценка (5) принимает вид

$$(6)\qquad |h(x)-P_n(x)|<A_n(\delta),\quad x\in[0,1].$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$(7)\qquad \min_{x\in[0,1]}|P_n(x)|>\min_{x\in[0,1]}|h(x)|-A_n(\delta)\geqslant(1+2\delta)^{-\alpha}-A_n(\delta)\geqslant\frac{2}{3}-A_n(\delta).$$

Теперь для $x\in[0,1]$ имеем (см. (3), (6), (7))

$$(8)\qquad \begin{aligned}&|x^\alpha-1/P_n(x)|\leqslant|x^\alpha-1/h(x)|+|1/h(x)-1/P_n(x)|\leqslant\\&\leqslant(2\delta)^\alpha+|h(x)-P_n(x)|\min_{x\in[0,1]}|P_n(x)h(x)|<\\&<(2\delta)^\alpha+A_n(\delta)(1+2\delta)^\alpha/\left(\frac{2}{3}-A_n(\delta)\right).\end{aligned}$$

Левая часть этого неравенства от δ не зависит, поэтому в правой части можно перейти к нижней грани по δ, $0<\delta<1/4$. Удобно положить $\delta=\delta_n=(4\ln n/n)^2$, $n\geqslant n_0=50$. Так как

$$A_n(\delta_n)=3\left(\frac{n}{4\ln n}\right)^{2\alpha}\frac{1}{n^4}<\frac{1}{n^2},$$

то из неравенства (8) вытекает, что

$$\left|x^\alpha-\frac{1}{P_n(x)}\right|<2^\alpha\left(\frac{4\ln n}{n}\right)^{2\alpha}+\frac{2/n^2}{2/3-1/n^2}\leqslant A_2(\ln n/n)^{2\alpha},$$

$n\geqslant n_0$

(A — абсолютная постоянная). Тем самым для $n\geqslant n_0$, а тогда и для всех $n>1$ (вместо A нужно брать, например, $A_{2\alpha}=A\left(\frac{n_0}{\ln n_0}\right)^{2\alpha}$), правая часть (2) доказана.

3. Левую часть соотношения (2) мы докажем, используя один прием из работы ([3]). Пусть $n>1$ — любое, $P_n(x)$ — многочлен степени $\leqslant n$ такой, что для всех $x\in[0, 1]$

$$(9)\qquad |x^\alpha-1/P_n(x)|\leqslant R_{0,n}(\alpha)=R_{0,n}(x^\alpha, [0,1]).$$

Возьмем произвольное ε, удовлетворяющее условию $\frac{1}{16n^2}\leqslant\varepsilon\leqslant\frac{1}{16}$. Из (9) вытекает, что (заметим, что $P_n(x)>0$ при $x\in[0, 1]$)

$$(10)\qquad \begin{aligned} &1/P_n(x)\geqslant\varepsilon^\alpha-R_{0,n}(\alpha), \quad x\in[\varepsilon, 1];\\ &1/P_n(0)\leqslant R_{0,n}(\alpha). \end{aligned}$$

Если $\varepsilon^\alpha-R_{0,n}(\alpha)\leqslant 0$, то $R_{0,n}(\alpha)\geqslant\varepsilon^\alpha\geqslant\left(\frac{1}{4n}\right)^{2\alpha}>\frac{A_1}{n^{2\alpha}}$ и нужная оценка установлена. Если $\varepsilon^\alpha-R_{0,n}(\alpha)>0$, то из (10) следует, что

$$(11)\qquad \max_{x\in[\varepsilon,1]}P_n(x)\leqslant\frac{1}{\varepsilon_\alpha-R_{0,n}(\alpha)},\quad P_n(0)\geqslant\frac{1}{R_{0,n}(\alpha)}.$$

Применим к многочлену $P_n(x)$ оценку для роста многочленов (см., например, ([4]), стр. 231). Получаем

$$(12)\qquad P_n(0)\leqslant\frac{1}{\varepsilon^\alpha-R_{0,n}(\alpha)}|T_n(0, [\varepsilon, 1])|,$$

где $T_n(x, [a, b])$ — многочлен Чебышева степени n относительно отрезка $[a, b]$ (с нормировкой $\max\limits_{x\in[a,b]}|T_n(x, [a, b])|=1$). Имеем

$$T_n(x,[\varepsilon, 1])=T_n(y,[-1, 1])=\frac{1}{2}[(y+\sqrt{y^2-1})^n+(y-\sqrt{y^2-1})^n],$$

где $u=\frac{2x-1-\varepsilon}{1-\varepsilon}$, $x\in[\varepsilon, 1]$. Следовательно,

$$|T_n(0,[\varepsilon, 1])|<\left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}+\sqrt{\left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^2-1}\right)^n<$$

$$<(1+4\sqrt{\varepsilon})^n<e^{4n\sqrt{\varepsilon}}.$$

Поэтому из (11) и (12) получаем

$$1/R_{n,0}(\alpha)<e^{4n\sqrt{\varepsilon}}/(\varepsilon^\alpha-R_{0,n}(\alpha)).$$

Отсюда

$$R_{0,n}(\alpha) > \varepsilon^{\alpha}/(1+e^{4n\sqrt{\varepsilon}}).$$

Так как ε — любое из сегмента $\left[\frac{1}{16n^2}, {}^1/_{16}\right]$, то можно положить $\varepsilon=\varepsilon_n=\frac{1}{16n^2}$. Тогда получим

$$(13) \qquad R_{0,n}(\alpha) > \frac{(1/4n)^{2\alpha}}{1+e} \geqslant \frac{A_1}{n^{2\alpha}}.$$

Теорема 2 доказана.

4. Перейдем к доказательству неравенств (1). При $\alpha={}^1/_2$ правая часть (2) дает

$$|x^{1/2}-1/P_n(x)| < A_2 \cdot \ln n/n.$$

Делая замену $x \to x^2$, $x \in [0, 1]$, получаем

$$\max_{x\in[0,1]} |x-1/P_n(x^2)| < c_2 \ln 2n/2n = \mathrm{A}_2 \ln n/n.$$

Остается заметить, что левая часть этого неравенства равна

$$\max_{x\in[-1,1]} ||x|-1/P_n(x^2)| = \max_{x\in[-1,1]} ||x|-1/Q_{2n}(x)|.$$

Тем самым правое неравенство в (1) установлено для четных и, очевидно, для всех $n=2, 3, \ldots$. Чтобы получить левую оценку в (1), предположим, что $P_{2n}(x)$ — такой многочлен степени не больше $2n$, что

$$(14) \qquad \max_{x\in[-1,1]} ||x|-1/P_{2n}(x)| = R_{0,2n} = R_{0,2n}(|x|,[-1,1]).$$

Из теоремы Чебышева (о единственности рациональной функции наилучшего приближения в классе рациональных функций с фиксированными степенями числителя и знаменателя; см., например, ([2]), стр. 66) следует, что $P_{2n}(x)$ — четный многочлен, т. е. $P_{2n}(x)=P_n(x^2)$. Следовательно, из (14) вытекает (замена $x^2 \to x$, $x \in [0, 1]$), что

$$\max_{x\in[0,1]} |x^{1/2}-1/P_n(x)| = R_{0,2n}.$$

Поэтому к $R_{0,\,2n}$ можно применить оценку (13) при $\alpha={}^1/_2$. Получаем

$$R_{0,\,2n} > A_2/n = c_1/(2n).$$

Оценка установлена для четных n; отсюда, очевидно, следует ее справедливость и для нечетных n. Теорема 1 доказана.

Поступила в редакцию
23 июня 1972 г.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Boehm B.*, Convergence of best rationale Tchebycheff approximations, Trans. Amer. Math. Soc., 115, № 3 (1965), 388–399.

[2] *Ахиезер Н. И.*, Лекции по теории аппроксимации, Гостехиздат, М., 1965.

[3] *Гончар А. А.*, Оценки роста рациональных функций и некоторые их приложения, Матем. сб., 72, № 3 (1967), 489–503.

[4] *Гончаров В. Л.*, Теория интерполирования и приближения функций, Гостехиздат, М., 1954.