В. В. Горбацевич, О классификации комплексных односвязных однородных пространств размерностей не более 2,
*Изв. вузов. Матем.*, 2013, номер 3, 16–32

*Известия вузов. Математика* *http://old.kpfu.ru/journals/izv_vuz/*
*2013, №3, с. 16–32* *e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru*

*В.В. ГОРБАЦЕВИЧ*

# О КЛАССИФИКАЦИИ КОМПЛЕКСНЫХ ОДНОСВЯЗНЫХ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВ РАЗМЕРНОСТЕЙ НЕ БОЛЕЕ 2

*Аннотация.* Статья посвящена классификации конечномерных комплексных алгебр Ли аналитических векторных полей на комплексной плоскости и соответствующих действий групп Ли на комплексных двумерных многообразиях. Указанные алгебры Ли были перечислены еще самим Софусом Ли. Были указаны векторные поля — базисы соответствующих алгебр Ли. При этом структура самих алгебр Ли выявлена не была, также не были выделены неизоморфные среди этих алгебр Ли. Тем самым классификация была далека от своего завершения, и положение не изменилось существенно до сих пор. Именно завершению указанной классификации и посвящена данная статья. Здесь рассматривается та часть классификации, которая касается транзитивных действий групп Ли.

*Ключевые слова*: алгебра Ли, группа Ли преобразований, однородное пространство.

*УДК*: 512.812 : 512.816

## Введение

Статья посвящена классической теме — классификации конечномерных комплексных алгебр Ли аналитических векторных полей на комплексной плоскости и соответствующих действий групп Ли на комплексных двумерных многообразиях. Указанные алгебры Ли были перечислены еще самим Софусом Ли [1]. Однако форма этого перечисления оставляет желать лучшего. Были просто указаны векторные поля — базисы соответствующих алгебр Ли. При этом структура самих алгебр Ли (даже их разложение Леви, которое, правда, в то время еще не было известно) выявлена не была, также не были выделены неизоморфные среди этих алгебр Ли. Тем самым классификация была далека от своего завершения, и положение не изменилось существенно до сих пор. Именно завершению указанной классификации и посвящена данная статья. При этом здесь рассматривается та часть классификации, которая касается транзитивных действий групп Ли. Случай интранзитивных действий намного проще и он будет дополнительно рассмотрен в другой работе автора, посвященной подалгебрам Ли алгебр и векторных полей и их деформациям.

В данной работе рассматриваются только комплексные многообразия и группы Ли, а также только комплексные алгебры Ли. Действия групп Ли и векторные поля предполагаются комплексно-аналитическими. Вещественный случай разбирается совершенно аналогично и здесь рассматриваться не будет.

Поступила 23.01.2012

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 11-01-00465а.

Однородное пространство группы Ли $G$ представляется в виде $M = G/H$, где $G$ — некоторая группа Ли (предполагаемая в данной работе связной и, при необходимости, односвязной), а $H$ — стационарная подгруппа, являющаяся подгруппой Ли в $G$. Если многообразие $M$ комплексно, то $G$ и $H$ предполагаются комплексными. При этом если многообразие $M$ односвязно, то подгруппа $H$ обязательно связна, поэтому от изучения пары $(G, H)$ можно перейти к паре $(g, h)$ соответствующих алгебр Ли. Однако не всегда пара $(g, h)$ алгебр Ли глобализуема, т. е. не всегда в группе $G$ (даже односвязной) подгруппа $H$ будет замкнута (и потому будет стационарной подгруппой однородного пространства $G/H$). Например, не глобализуема подалгебра Ли $h$, соответствующая иррациональной обмотке двумерного тора, в качестве которого можно взять, например, максимальный тор в группе Ли $G = SU(2) \times SU(2)$. Однако, как доказано в [2], при $\mathrm{codim}_G H \leq 4$ (коразмерность здесь берется вещественная) любая пара $(g, h)$ глобализуема. А так как в данной работе рассматриваются только однородные пространства комплексной размерности 1 и 2, то проблема глобализации не стоит и поэтому изучение можно вести на уровне алгебр Ли и их пар вида: алгебра Ли, подалгебра Ли.

При описании транзитивных групп Ли естественно ограничиться эффективными (или хотя бы локально эффективными) действиями.

Группа Ли, действующая на гладком многообразии $M$, называется локально транзитивной, если она имеет открытую орбиту. Тогда для соответствующей этому действию алгебре Ли векторных полей на многообразии $M$ в некоторой точке этого многообразия векторы этой алгебры образуют базис касательного пространства к $M$ в этой точке. Такую алгебру Ли векторных полей называют транзитивной. В первую очередь рассмотрим именно транзитивные алгебры Ли. При этом в силу первоначальной локальности можно ограничиться рассмотрением векторных полей на $\mathbf{C}^n$ $(n = 1, 2)$. Далее будет совершена глобализация и выделены соответствующие (глобальные) однородные пространства.

Опишем вкратце историю публикаций о классификации локальных и глобальных групп Ли (и соответствующих алгебр Ли), транзитивных (точнее, поначалу речь шла о локально транзитивных) на комплексных многообразиях размерностей 1 и 2.

Сначала С. Ли была получена классификация алгебр Ли векторных полей на прямой (т. е. для размерности $n = 1$). Она была проведена с точностью до локального подобия. Сейчас существует и более тонкое понятие — локальный изоморфизм действий групп Ли и соответствующих алгебр Ли [3], здесь его использовать не будем. Свою классификацию С. Ли осуществил с помощью довольно громоздких вычислений, анализируя возможный вид аналитических векторных полей на комплексной плоскости, которые образуют конечномерные алгебры Ли (см. [4]).

Оказалось, что существует только три алгебры Ли векторных полей, транзитивных на $\mathbf{C}$: одномерная абелева алгебра Ли $\mathbf{C}$, двумерная разрешимая алгебра Ли $r_2$ (которая в подходящем базисе $X$, $Y$ задается соотношением $[X, Y] = Y$) и простая алгебра Ли $sl_2(\mathbf{C})$. При этом соответствующие стационарные подалгебры указываются без труда (кстати, совершенно аналогично описываются и алгебры Ли, транзитивные на $\mathbf{R}$). Далее в ([1], т. 3, с. 71–73) была опубликована классификация алгебр Ли аналитических векторных полей на $\mathbf{C}^2$ (или групп Ли, например, односвязных, локально транзитивных и локально эффективных на $\mathbf{C}^2$). У С. Ли список алгебр состоит из 31 случая, из них 26 — транзитивных. Этот список состоит из отдельных алгебр Ли или бесконечных серий, в которые входят алгебры Ли сколь угодно высоких размерностей). Нужно отметить, что С. Ли всегда рассматривал только аналитические векторные поля. Для транзитивных действий это ограничение несущественно: любое транзитивное действие группы Ли можно считать аналитическим. Для интранзитивных действий это уже не всегда так.

В [1] также имеется и классификация в вещественном случае (т. 3, с. 378 и приведенные там дополнительные ссылки).

Эта классификация несколько раз передоказывалась. Например, в [4] список практически тот же, что у С. Ли, только транзитивных случаев у него 25 (два случая объединены в один). При этом Г. Ковалевский [4], как и все последующие авторы, отмечает, что при частных значениях параметров некоторые алгебры Ли в списке могут оказаться изоморфными. Это общий недостаток всех опубликованных до сих пор вариантов классификации С. Ли. В данной работе этот недостаток исправлен.

Далее в [5] дан еще один вывод классификации С. Ли, причем очень близкий к тому, который использовал сам С. Ли. Результат фактически тот же, но он записан там в несколько другой форме.

Важный шаг был сделан Дж. Мостовым [2]: для вещественного случая он перечислил все двумерные однородные пространства (глобально, как гладкие многообразия с транзитивно действующими на них группами). При этом оказалось, что двумерных поверхностей всего пять (причем одна их них — бутылка Клейна — была ранее пропущена в работах Э. Картана и К. Шевалле). Но и в этой работе структура транзитивных групп Ли не была выявлена. Для каждого из пяти однородных многообразий транзитивные на них группы Ли задавались неявно через соответствующие алгебры Ли векторных полей, и вопрос о выборе попарно неизоморфных представителей не рассматривался.

Список С. Ли был опубликован также в [6] в комплексном и вещественном случаях. Нужно отметить, что в этом списке имеется одна опечатка (см. случай 19 раздела 2) и одна неточная ссылка на страницы сочинения С. Ли в вещественном случае (должно быть [1], т. 3, с. 378 с дополнительными ссылками).

Еще один вывод классификации С. Ли с дополнительными современными рассуждениями представлен в [7].

Подробно двумерные однородные (вещественные) поверхности были рассмотрены также в [7]. Здесь более подробно, чем у Дж. Мостова, описаны транзитивные группы Ли (а не только алгебры Ли) и соответствующие стационарные подгруппы, но исчерпывающего структурного описания транзитивных групп Ли нет.

Список, полученный С. Ли, был частично опубликован в [3], но только для транзитивного случая (что там явно указано) и только для тех алгебр Ли, для которых открытой будет орбита точки $(0,0)$.

В данной работе в разделе 1 рассматривается классификация С. Ли в одномерном случае. В разделе 2 указано алгебраическое строение алгебр Ли, транзитивных на $\mathbf{C}^2$, а в разделе 3 явно описаны транзитивные действия групп Ли на односвязных двумерных комплексных многообразиях.

Основными результатами работы являются теоремы 1 и 2.

В данной работе координаты (комплексные) в $\mathbf{C}^2$ будем обозначать через $x$, $y$, а соответствующие им частные производные через $p$ и $q$ (и аналогично для $\mathbf{C}^1$). Например, в этих обозначениях алгебры Ли на $\mathbf{C}^1$ записываются (через указания их базисов векторных полей) так:

$\mathbf{C} : p$

$r_2 : p, xp$

$sl_2(\mathbf{C}) : p, xp, x^2p.$

## 1. Комплексные односвязные однородные пространства размерности 1

Алгебры Ли векторных полей на $\mathbf{C}^1$ были перечислены выше. Соответствующими односвязными группами Ли преобразований будут соответственно $\mathbf{C}$, $R_2$, $SL_2(\mathbf{C})$.

Односвязными комплексными однородными кривыми являются, как известно, комплексная плоскость $\mathbf{C}$ и сфера Римана $S^2$. Отметим, что верхняя комплексная полуплоскость, которая вместе с двумя уже указанными выше многообразиями в силу теоремы униформизации исчерпывает все односвязные комплексные многообразия размерности 1, не является однородной (как комплексное многообразие), хотя и имеет комплексную структуру и транзитивную (но не комплексную) группу Ли, изоморфную $PSL_2(\mathbf{R})$.

Переходим к описанию транзитивных действий указанных групп Ли, что в силу сказанного выше, сводится к описанию соответствующих стационарных подалгебр Ли $h$. Итак, пусть $M = G/H$, где $G$ — одна из трех групп Ли, указанных выше, а $M = \mathbf{C}^2$, $S^2$.

Для $G = \mathbf{C}$, очевидно, имеем $h = \{0\}$. Так как рассматриваем только связные стационарные подгруппы (ибо ограничились только односвязными однородными многообразиями), то в данном случае $H = \{e\}$, т. е. группа Ли $\mathbf{C}$ действует на себе просто транзитивно.

Группу Ли $R_2$ можно рассматривать как группу $\mathrm{Aff}(\mathbf{C})$ аффинных преобразований комплексной прямой $\mathbf{C}$. Матрично ее можно описать как подгруппу в $SL_2(\mathbf{C})$ так: она состоит из матриц $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{smallmatrix}\right)$, где $a, b \in \mathbf{C}$, $a \neq 0$. Стационарные подгруппы $H$ все сопряжены между собой, одной из них является подгруппа, образованная всеми матрицами вида $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{smallmatrix}\right)$ (картановская подгруппа в $SL_2(\mathbf{C})$).

Для $G = SL_2(\mathbf{C})$ очевидно, что стационарная подгруппа $H$ — это подгруппа (единственная с точностью до сопряжения) всех верхнетреугольных матриц (борелевская подгруппа $B$, она изоморфна с $\mathrm{Aff}(\mathbf{C})$), при этом $S^2 = SL_2(\mathbf{C})/B$.

Теперь рассмотрим все указанные группы Ли одновременно. Они образуют вложенную цепочку групп Ли и соответствуют трем разным одномерным комплексным геометриям: $\mathbf{C} \subset \mathrm{Aff}(\mathbf{C}) \subset SL_3(\mathbf{C})$.

Группа Ли $SL_2(\mathbf{C})$ (точнее, $PSL_2(\mathbf{C}) = SL_2(\mathbf{C})/\mathbf{Z}_2$) есть группа проективных преобразований одномерной проективной прямой $\mathbf{C}P^1 = S^2$. Группа Ли $\mathrm{Aff}(\mathbf{C})$ может рассматриваться как подгруппа аффинных преобразований аффинной прямой $\mathbf{C}^1 \subset \mathbf{C}P^1$. И, наконец, группу $\mathbf{C}$ можно рассматривать как группу параллельных переносов в этой аффинной прямой (фактически это эквиаффинная геометрия на прямой).

Одномерный случай полностью исчерпывается.

Транзитивное действие группы Ли на некотором многообразии называется примитивным, если не существует нетривиальных инвариантных гладких слоений. В противном случае транзитивное действие называют импримитивным. Указанное слоение, если оно существует, называют системой импримитивности.

Ясно, что для односвязных однородных пространств понятие примитивности легко локализуется. Примитивность (локально) транзитивного действия группы Ли $G$ эквивалентна тому, что стационарная подалгебра $h$ является максимальной подалгеброй в алгебре Ли $g$ группы Ли $G$.

В одномерном случае по тривиальной причине стационарные подалгебры максимальны (ибо они имеют коразмерность 1). Поэтому все транзитивные действия, описанные выше в одномерном случае, будут примитивны. В двумерном случае системы импримитивности (они тут иногда существуют) это некоторые семейства кривых.

## 2. Комплексные однородные пространства размерности 2 (на уровне алгебр Ли)

Дано подробное описание (включающее в себя алгебраическую структуру) транзитивных алгебр Ли векторных полей на $\mathbf{C}^2$. При этом будем придерживаться в точности того списка, который был дан самим С. Ли. Однако он не нумеровал алгебры Ли (хотя естественным образом их упорядочил: сверху вниз и слева направо). Список с нумерацией, который мы будем использовать, приведен, например, в [5]. Введем также обозначение вида $L_2^{(i)}$ для соответствующих алгебр Ли.

С. Ли выделил несколько групп алгебр Ли с соответствии с особенностями выполнения для них свойств примитивности и импримитивности. И хотя такого рода деление не используется в последующих рассуждениях, упоминаем о нем, отдавая дань традиции.

В нашем случае в список С. Ли сначала будут выписываться базисы алгебр Ли в виде векторных полей на $\mathbf{C}^2$, а затем производиться те или иные вычисления и рассуждения, позволяющие установить алгебраическую структуру этих алгебр Ли и соответствующих стационарных подалгебр.

А. Примитивные алгебры Ли.

1. $L_2^{(1)}$ (размерности 8):

$p,\ q,\ xq,\ xp-yq,\ yp,\ xp+yq,\ x^2p+xyq,\ xyp+y^2q.$

Прямым вычислением коммутаторов этих базисных элементов убеждаемся в том, что эта алгебра Ли изоморфна $sl_3(\mathbf{C})$. Двумерная картановская подалгебра натянута на элементы $xp-yq$, $xp+yq$.

Стационарная подалгебра здесь берется для точки $(0,0)$, так как в ней базисные элементы $p$, $q$ алгебры Ли дают базис касательного пространства, т. е. орбита соответствующего локального действия группы Ли будет открыта. Прямое вычисление показывает, что стационарная подалгебра Ли $h$ здесь — параболическая подалгебра, соответствующая одному простому корню (любому, все такие подалгебры Ли в алгебре Ли $sl_3(\mathbf{C})$ переводятся друг в друга автоморфизмами этой алгебры Ли). Матрично она может быть записана как множество матриц вида

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}$$

с произвольными комплексными элементами, обозначенными звездочками, но при этом с нулевым следом.

Разложение Леви для $h$ имеет вид $h = gl_2(\mathbf{C}) +_\tau \mathbf{C}^2$, где $\tau$ — тавтологическое двумерное представление алгебры Ли $sl_2(\mathbf{C})$. Это разложение — не разложение Леви, так как алгебра Ли $gl_2(\mathbf{C})$ не полупроста. Полупростой частью будет $sl_2(\mathbf{C})$, а радикал $r$ имеет вид полупрямой суммы $\mathbf{C} +_\alpha \mathbf{C}^2$, где $\alpha$ — диагональное представление, переводящее $z \in \mathbf{C}$ в скалярную матрицу $\operatorname{diag}(z,z)$.

2. $L_2^{(2)}$ (размерности 6):

$p,\ q,\ xq,\ xp-yq,\ yp,\ xp+yq.$

Сравнение базисных элементов показывает, что эта алгебра Ли — подалгебра в предыдущей алгебре Ли $L_2^{(1)}$ (получаем ее, отбрасывая два последних базисных элемента в $L_2^{(1)}$).

Из прямого вычисления видно, что $L_2^{(2)}$ разлагается в полупрямую сумму $gl_2(\mathbf{C}) +_\tau \mathbf{C}^2$, где $\tau$ — тавтологическое двумерное линейное представление. Это разложение — не разложение Леви (как и в случае 1 для стационарной подалгебры).

Необходимо отметить, что эта транзитивная алгебра Ли сопряжена со стационарной подалгеброй в $L_2^{(1)}$. Геометрически она может рассматриваться как алгебра Ли аффинных преобразований комплексной плоскости.

В качестве стационарной подалгебры $h$ здесь удобнее всего взять саму подалгебру $gl_2(\mathbf{C})$, фигурирующую в вышеприведенном разложении.

3. $L_2^{(3)}$ (размерности 5):

$p$, $q$, $xq$, $xp - yq$, $yp$.

Это — подалгебра коразмерности 1 в $L_2^{(2)}$. Как легко понять, она имеет разложение Леви $sl_2(\mathbf{C}) +_\tau \mathbf{C}^2$, а ее стационарная подалгебра — это $sl_2(\mathbf{C})$.

Геометрически это алгебра Ли группы эквиаффинных преобразований комплексной плоскости. Отметим, что рассмотренные три примитивные алгебры Ли образуют цепочку вложенных друг в друга алгебр Ли и имеют тот же геометрический смысл, что и три алгебры Ли на $\mathbf{C}^1$ (см. выше). Но теперь аналогии с одномерным случаем заканчиваются, переходим к импримитивному случаю.

B. Импримитивные алгебры Ли. Тут выделяются подразделы I, II, III.

I. Существует только одна система импримитивности.

4. $L_2^{(4)}$ (размерности 5):

$q$, $xq$, $p$, $2xp + yq$, $x^2p + xyq$.

Эта алгебра тоже имеет разложение $gl_2(\mathbf{C}) +_\tau \mathbf{C}^2$, т. е. как абстрактная алгебра Ли она изоморфна $L_2^{(3)}$. Но стационарная подалгебра совсем другая. Она тоже соответствует точке $(0, 0)$, но имеет вид $b +_\tau \mathbf{C}^1$. Здесь $b$ — борелевская подалгебра (в данном случае она состоит из верхнетреугольных матриц со следом 0), $\tau$ — тавтологическое представление (точнее, его ограничение на $b$). Алгебра Ли $b$ в своем действии на идеале $\mathbf{C}^2$ имеет единственную инвариантную прямую. Итак, $\mathbf{C}^1$ в указанном выше разложении для $h$ — именно эта самая прямая.

5. $L_2^{(5)}$ (размерности $r + 4$ при натуральном $r > 2$). Здесь имеем серию транзитивных алгебр Ли, причем по одной в каждой размерности, начиная с 7:

$q$, $xq, \ldots, x^rq$, $p$, $2xp + ryq$, $x^2p + rxyq$.

В отличие от предыдущих случаев, здесь алгебра Ли не столь общеизвестна (и не имеет столь же ясного геометрического смысла). Поэтому придется проводить подробное исследование.

Рассмотрим сначала натянутое на три базисных вектора $X = p$, $U = 2xp + ryq$, $V = x^2p + rxyq$ подпространство $f = \langle X, U, V\rangle$, и покажем, что оно — подалгебра Ли, причем изоморфная $sl_2(\mathbf{C})$. Для этого вычислим коммутаторы

$[X, U] = 2p = 2X$,

$[X, V] = U$,

$[U, V] = 2V$.

Отсюда сразу имеем указанный выше изоморфизм, причем картановская подалгебра натянута на элемент $U$, а на корневые подпространства — $X$ и $V$.

Теперь заметим, что подпространство, порожденное векторами $q, xq, \ldots, x^rq$ — это абелева подалгебра (проверяется прямым вычислением коммутаторов). В результате получаем разложение нашей алгебры Ли $L_2^{(5)}$ в прямую сумму двух подпространств, которые при этом являются еще и подалгебрами:

$L_2^{(5)} = f + \langle q, xq, \ldots, x^rq\rangle = f + \mathbf{C}^{r+1}$.

Далее непосредственно проверяется, что второе подпространство-слагаемое в действительности есть абелев идеал и для $L_2^{(5)}$ получаем разложение Леви $L_2^{(5)} = sl_2(\mathbf{C}) +_\phi \mathbf{C}^{r+1}$.

Здесь $\phi$ — некоторое линейное представление трехмерной простой алгебры Ли $sl_2(\mathbf{C})$. Все такие представления хорошо известны, неприводимых представлений указанной трехмерной алгебры Ли ровно по одному в каждой ненулевой размерности. Нетрудно убедиться, что в нашем случае $\phi$ — это неприводимое представление. Это можно проверить, вычислив действие элемента $U$ картановской подалгебры на пространстве представления. Можно также вычислить действие нильпотентного элемента $X$ и убедиться в том, что его действие описывается одной жордановой клеткой (как может быть только у неприводимого представления). Поэтому представление $\phi$ в данном случае можно обозначить $\phi_{r+1}$ — это единственное неприводимое представление алгебры Ли $sl_2(\mathbf{C})$ в пространстве размерности $r+1$. Его можно реализовать как естественное матричное действие на пространстве $P_r(x,y)$ однородных многочленов степени $r$ от двух переменных $x, y$.

Итак, $L_2^{(5)} = sl_2(\mathbf{C}) +_{\phi_{r+1}} \mathbf{C}^{r+1}$.

Стационарная подалгебра здесь берется в точке $(0,0)$. Легко проверяется, что она имеет вид $h = b + \mathbf{C}^r$, где $b$ — борелевская подалгебра Ли в $sl_2(\mathbf{C})$. Через $\mathbf{C}^r$ обозначено единственное подпространство коразмерности 1 в $\mathbf{C}^{r+1}$, инвариантное относительно $b$.

Отметим, что в случае 5 имеем $r > 2$. Но выше показано, что алгебра Ли такого же вида (если положить $r = 1$) фигурирует в п. 4. Ниже окажется, что случай 13 соответствует значению параметра $r = 2$. Более того, при $r = 0$ получим транзитивную алгебру Ли — это будет случай 22. Тем самым четыре пункта из классификации С. Ли и его последователей объединяются в одну естественную серию (см. теорему 1), обозначим ее через $4+5+13+22$: $sl_2(\mathbf{C}) +_{\phi_{r+1}} \mathbf{C}^{r+1}$ при $r \geq 0$, где $\phi_{r+1}$ — неприводимое представление (оно будет тривиальным при $r = 0$ и тавтологическим при $r = 1$, а при $r = 2$ — присоединенное представление алгебры Ли $sl_2(\mathbf{C})$).

6. $L_2^{(6)}$(размерности $r + 5$):

$q$, $xq, \dots, x^r q$, $yq$, $p$, $xp$, $x^2p + rxyq$, $r > 0$.

Видно, что от случая 5 этот случай отличается только одним дополнительным базисным элементов $yq$. Неудивительно, что вычисления здесь совершенно аналогичны приведенным в п. 5.

Положив $f = \langle yq, p, xp, x^2p + rxyq \rangle$, легко убедиться в том, что это подпространство является подалгеброй Ли, причем изоморфной $gl_2(\mathbf{C})$. Поэтому подобно п. 5 получаем представление $L_2^{(6)}$ в виде полупрямой суммы: $L_2^{(6)} = gl_2(\mathbf{C}) +_{\psi_{r+1}} \mathbf{C}^{r+1}$, где $\psi_{r+1}$ — неприводимое представление размерности $r + 1$ алгебры Ли $gl_2(\mathbf{C})$, причем представление $\phi_k$, описанное выше — это просто ограничение $\psi_k$ на подалгебру Ли $sl_2(\mathbf{C})$ (такое $\psi$ при фиксированном $n$ не определено однозначно, они различаются действием центра алгебры Ли $gl_2(\mathbf{C})$, но соответствующие им алгебры Ли $L_2^{(6)}$ все между собой будут изоморфны, а транзитивные действия соответствующих групп Ли подобны). Отметим, что указанное выше разложение — это не разложение Леви, но будем основываться именно на нем. Что касается разложения Леви, оно имеет вид $sl_2(\mathbf{C}) + r$, где радикал $r$ имеет разложение $r = \mathbf{C} + \mathbf{C}^{r+1}$, которое однозначно определяется действием элемента $yq \in \mathbf{C}$ на абелев идеал $\mathbf{C}^{r+1}$ коразмерности 1 в $r$. Это действие задается скалярной матрицей (нормировав базисный элемент, можем даже считать, что она единичная). Такого рода разрешимую алгебру Ли иногда называют гиперболической (хотя более уместно использовать это название в вещественном случае).

Стационарная подалгебра точки $(0,0)$ здесь имеет вид $\widetilde{b} + \mathbf{C}^r$, где $\widetilde{b}$ — борелевская подалгебра Ли в $gl_2(\mathbf{C})$ — это алгебра Ли всех верхнетреугольных матриц второго порядка.

Напомним, что в этом пункте классификации Ли предполагалось, что $r > 0$. Необходимо отметить, что значение $r = 0$ дает нам ту же (с точностью до изоморфизма алгебр Ли) алгебру Ли, что и в случае 2, но стационарная подалгебра там другая.

Далее, алгебра Ли $L_2^{(6)}$ содержит алгебру Ли $L_2^{(5)}$ (с тем же значением параметра $r$) в качестве идеала коразмерности 1. При этом $[L_2^{(6)}, L_2^{(6)}] = L_2^{(5)}$.

7. $L_2^{(7)}$ (размерности 4):

$yq$, $p$, $xp$, $x^2p + xyq$.

Этот случай интересен тем, что в точке $(0,0)$ изучаемая алгебра Ли не транзитивна. Она транзитивна в других точках, например в $(0,1)$.

Прямое вычисление показывает, что коммутант этой алгебры Ли трехмерен, он натянут на векторы $p$, $2xp+yq$, $x^2p+xyq$ и изоморфен $sl_2(\mathbf{C})$ (с картановской подалгеброй, натянутой на $2xp + yq$). Из общей теории алгебр Ли отсюда без всяких вычислений получаем, что $g$ изоморфна $sl_2(\mathbf{C}) \oplus \mathbf{C}$ (или, что то же, алгебре Ли $gl_2(\mathbf{C})$).

Стационарная подалгебра $h$ двумерна. В точке $(0,1)$ она натянута на векторы $xp$, $x^p+xyq$. Прямое вычисление коммутатора показывает, что $h$ — разрешимая неабелева алгебра Ли. Она содержится в $b$ и содержит $[b,b]$ — коммутант борелевской подалгебры $b$ в $gl_2(\mathbf{C})$. Далее, она не содержит прямое слагаемое $\mathbf{C}$ (центр алгебры Ли $g$) и имеет на этот центр эпиморфную проекцию. Другими словами, $h$ — это двумерное подпространство общего положения в $b$, содержащее $[b,b]$. Как нетрудно проверить, все такие подпространства сопряжены в $b$. Поэтому описываемая стационарная подалгебра $h$ единственна (с точностью до сопряжения).

Отметим, что эта алгебра Ли не может быть включена в серию $L_2^{(6)}$, описанную выше.

8. $L_2^{(8)}$ (размерности $r+4$):

$q$, $xq, \ldots, x^rq$, $yq$, $p$, $xp$.

Это подалгебра в $L_2^{(6)}$ (в отличие от $L_2^{(6)}$, тут нет базисного вектора $x^2p+rxyq$). Исходя из алгебры Ли $L_2^{(6)} = gl_2(\mathbf{C}) +_{\psi_{r+1}} \mathbf{C}^{r+1}$, прямым вычислением получаем $L_2^{(8)} = b +_{\psi_{r+1}} \mathbf{C}^{r+1}$, где $b$ — борелевская подалгебра Ли в $gl_2(\mathbf{C})$, т. е. она состоит из множества всех верхнетреугольных матриц порядка 2. Тем самым имеем серию транзитивных на $\mathbf{C}^2$ разрешимых алгебр Ли. Заметим, что до сих пор появлялись только простые алгебры Ли и алгебры Ли общего вида (с нетривиальной полупростой частью).

Стационарная подалгебра Ли здесь имеет вид $c +_{\psi_{r+1}} \mathbf{C}^r$, где $c$ — картановская подалгебра в $b$, она состоит из всех диагональных матриц, а $\mathbf{C}^{r+1}$ — инвариантное относительно $c$ подпространство коразмерности 1 в $\mathbf{C}^{r+1}$ (все такие $h$ сопряжены в $g$).

9. $L_2^{(9)}$ (размерности $r+3$):

$q$, $xq, \ldots, x^rq$, $p$, $xp + cyq$, $r > 0$, $c \neq 1$.

Отметим, что случаю $c = 1$ соответствует алгебра Ли $L_2^{(15)}$, но там имеется два семейства интранзитивности. Поэтому имеем единое семейство $9 + 15$.

Отметим также, что $L_2^{(9)}$ — подалгебра в $L_2^{(8)}$, так как элемент $xp + cyq$ есть линейная комбинация двух базисных элементов алгебры Ли $L_2^{(8)}$, а все остальные базисные векторные поля у них одинаковы. Более того, $L_2^{(9)}$ — идеал (коразмерности 1) в $L_2^{(8)}$. Поэтому $L_2^{(9)}$ можно записать в виде полупрямой суммы $f +_\psi \mathbf{C}^{r+1}$. Здесь $f$ — некоторый идеал (причем неабелев) коразмерности 1 в трехмерной борелевской подалгебре $b$ алгебры Ли $gl_2(\mathbf{C})$. Такой идеал изоморфен $r_2$, поэтому имеем разложение $L_2^{(9)} = r_2 +_\psi \mathbf{C}^{r+1}$. Идеал $f$ такого типа в $b$ единственен с точностью до сопряжения. Описание его было дано выше (см. п. 7): $b = r_2 \oplus \mathbf{C}$, двумерная неабелева подалгебра $f$ содержит $[b,b]$ и может быть любым подпространством в $b$, содержащим $[b,b]$. Поэтому точностью до изоморфизма алгебра Ли $g$ единственна, но ее разные экземпляры (соответствующие различным значениям параметра $c$), дают разные алгебры Ли векторных полей.

Действие подалгебры $f \simeq r_2$ на абелевом идеале $\mathbf{C}^{r+1}$ есть просто ограничение неприводимого представления $\psi_{r+1}$ на эту подалгебру. Так как все такие подалгебры содержат одномерный идеал $[b,b]$, то $L_2^{(9)} = \mathbf{C} + n$, где нильрадикал $n = [b,b] +_\psi \mathbf{C}^{r+1} = \mathbf{C} +_\psi \mathbf{C}^{r+1}$ одинаков при всех значениях параметра $c$ (или, что эквивалентно, при все выборах подалгебры $f$).

Стационарная подалгебра имеет вид $\mathbf{C} + \mathbf{C}^r$, где одномерная подалгебра $\mathbf{C}$ лежит в $b$ (но не в $[b,b]$), а $\mathbf{C}^r$ — инвариантное относительно нее гиперплоскость в $\mathbf{C}^{r+1}$.

10. $L_2^{(10)}$ (размерности $r+2$):

$q,\, xq, \ldots, x^{r-1}q,\, p,\, xp + (ry + x^r)q,\, r > 1.$

Эта алгебра Ли тоже является подалгеброй Ли в $L_2^{(8)}$ (и в $L_2^{(6)}$), так как ее базисные элементы, кроме последнего, входят и в базис $L_2^{(8)}$, а последний элемент — линейная комбинация трех базисных элементов алгебры Ли $L_2^{(8)}$. Коразмерность ее в $L_2^{(8)}$ равна 2. Это одна из самых сложных для явного описания разрешимая алгебра Ли из нашего списка.

Имеем разложение $L_2^{(9)} = \langle xp + (ry + x^r)q \rangle + n = \mathbf{C} + n$ в полупрямую сумму одномерной подалгебры Ли и нильрадикала $n$. Этот нильрадикал имеет вид $\langle p \rangle +_{J_r(0)} \mathbf{C}^r$ (иногда эту алгебру Ли называют стандартной филиформной, т. е. имеющей максимальный возможный класс нильпотентности, алгеброй Ли). Он является полупрямой суммой одномерной подалгебры и $r$-мерного абелева идеала. Действие образующей $p$ одномерной подалгебры на идеале $n$ описывается жордановой матрицей $J_r(0)$.

Остается описать действие элемента $W = xp + (ry + x^r)q$ на этом нильрадикале. Оно в базисе $q,\, xq, \ldots, x^{r-1}q, p$ таково:

$[W, x^i q] = (i - r)x^i q$, т. е. векторы $x^i q$ собственные для этого действия (с собственными значениями $i - r$),

$[W, p] = -p - r x^{r-1} q$ — линейная комбинация двух базисных элементов.

Это действие задается матрицей, у которой в первом столбце (соответствующем базисному элементу $p$) есть только два ненулевых числа: первое (равное $-1$) и последнее (равное $-r$), а по диагонали матрицы стоят числа $i - r$ (остальные элементы матрицы — нулевые). Итак, имеем $g = \langle W \rangle + (\langle p \rangle + \mathbf{C}^r)$, причем $[g,g] = n$.

Стационарная подалгебра имеет вид $\langle xp + (ry + x^r)q \rangle + \mathbf{C}^{r-1}$ (сумма одномерной подалгебры, натянутой на $xp + (ry + x^r)q$, и абелева идеала $\mathbf{C}^{r-1} \subset n$ коразмерности 1 в $\mathbf{C}^r$, инвариантного относительно матрицы $J_r(0)$). Такое подпространство единственно. Матричное описание здесь довольно громоздко.

11. $L_2^{(11)}$ (размерности $N+2$; значение $N$ указано ниже):

$q,\, xq, \ldots, x^m q,\, e^{a_k x} q,\, x e^{a_k x} q, \ldots, x^{m_k} e^{a_k x} q,\, yq,\, p,$

причем $k = 1, 2, \ldots, l$, $l \geq 0$, $l + m + m_1 + \cdots$, $m_l > 0$, $a_1 = 1$. Положим $N = m + 1 + l + m_1 + \cdots + m_l$.

Отметим, что первые $m+1$ элементов базиса можно рассматривать аналогично последующим группам векторов, но соответствующее значение тут должно быть $a_0 = 0$.

Иногда эту алгебру Ли описывают иначе: используя систему фундаментальных решений линейного дифференциального уравнения. Но у С. Ли эта система выписана явно, как и в нашем случае. Это еще одна весьма сложная для явного описания разрешимая алгебра Ли на $\mathbf{C}^2$.

Рассмотрим отдельно два элемента: $X = p$, $Y = yq$ (последние в списке базисных элементов) и подпространство $\langle X, Y \rangle$, натянутое на все остальные (первые в списке) элементы базиса нашей алгебры Ли.

Ясно, что $\langle X, Y\rangle$ — абелева подалгебра Ли. Прямое вычисление показывает, что натянутое на остальные элементы базиса подпространство — тоже абелева алгебра Ли. Более того, она является идеалом. Поэтому $L_2^{(11)}$ представляется в виде полупрямой суммы

$$L_2^{(11)} = \mathbf{C}^2 + \mathbf{C}^N, \quad \text{где} \quad N = m + 1 + l + m_1 + \dots + m_l.$$

Тем самым $L_2^{(11)}$ имеет нильрадикал (причем абелев) коразмерности 2.

Действие подалгебры $\langle X, Y\rangle$ на этом идеале задается парой коммутирующих матриц, соответствующих присоединенным действиям элементов $X$ и $Y$. Действие элемента $X$, как следует из вычислений коммутаторов, задается матрицей $-E$ (заменив $X$ на $-X$, можно было бы считать, что оно задается единичной матрицей $E$). Действие же элемента $Y$ задается матрицей, приведенной к жордановой форме, в которой есть одна нильпотентная жорданова клетка порядка $m+1$ (соответствующая $a_0 = 0$ при $m > 0$) и несколько других жордановых клеток (произвольных). Для нормировки принимается, что одна из клеток на диагонали имеет 1 (это соответствует условию $a_1 = 1$). Так как любая матрица перестановочна с единичной, то других ограничений на эту жорданову матрицу нет. В результате две указанные матрицы задают действие двумерной абелевой подалгебры на абелевом идеале.

Стационарная подалгебра имеет вид полупрямой суммы $h = (\langle X\rangle = \mathbf{C}) +_{-E} \mathbf{C}^{N-1}$, соответствующее действие элемента $X$ задается матрицей $-E$. Подпространство $\mathbf{C}^{N-1}$ в $\mathbf{C}^N$ имеет базисом разности собственных векторов каждой из жордановых клеток с ненулевыми $a_k$ и вектора $q$ (т. е. состоит из векторов $(e^{a_i x} - 1)q$), к которым добавлены все остальные базисные векторы алгебры, кроме $p$, $q$, $yq$.

Это очень обширное семейство алгебр Ли, так как оно параметризуется всевозможными матрицами $J$, приведенными к жордановой форме.

12. $L_2^{(12)}$:

$q$, $xq$, $F_1(x)q, \dots, F_r(x)q$, $yq$, $r \geq 0$.

Как легко понять, ни при каком выборе функций $F_i$ эта алгебра Ли транзитивной не будет.

13. $L_2^{(13)}$ (размерности 6):

$q$, $xq$, $x^2q$, $p$, $xp + yq$, $x^2p + 2xyq$.

Видим, что это в точности базис, соответствующий параметру $r = 2$ в $L_2^{(5)}$. Там это значение параметра было исключено, так как при нем увеличивается до двух число семейств импримитивности. Но число таких семейств не является существенным, поэтому выше случай 13 присоединили к случаю 5.

14. $L_2^{(14)}$ (размерности 3):

$p$, $2xp + yq$, $x^2p + xyq$.

Вычисление коммутаторов показывает, что эта трехмерная алгебра Ли — простая и изоморфна $sl_2(\mathbf{C})$. Картановская подалгебра натянута на вектор $2xp + yq$, а стационарная подалгебра требует определенного внимания.

В точке $(0, 0)$ эта алгебра Ли не транзитивна. Можно перейти к новым координатам и добиться того, чтобы она стала транзитивной в начале координат. Но мы просто укажем в явном виде стационарную подалгебру (с точностью до сопряжения) открытой орбиты (она одномерна). В точке $(1, 1)$ имеем три вектора $p$, $2p + q$, $p + q$. Они линейно зависимы, но образуют базис в $\mathbf{C}^2$. Поэтому орбита точки $(1, 1)$ открыта.

Существуют только три (с точностью до сопряжения) одномерные подалгебры в $sl_2(\mathbf{C})$: картановская (диагональная), нильпотентная и соответствующая жордановой клетке $J_2(1)$ — матрице порядка 2 с 1 на главной диагонали. Из сказанного выше о базисе видно, что в данном случае реализуется именно третий случай. Тем самым $h$ натянута на жорданову матрицу $J_1(1)$.

15. $L_2^{(15)}$ (размерности $r+3$):

$q,\ xq, \dots, x^r q,\ p, xp+yq.$

Это просто алгебра Ли $L_2^{(9)}$ при $c=1$ (число классов импримитивности равно двум). Поэтому получаем единое семейство 9+15.

Отметим, что $L_2^{(15)}$ — идеал в $L_2^{(8)}$.

16. $L_2^{(16)}$ (размерности 3):

$q,\ p,\ xp+(x+y)q.$

Легко проверить, что это нильпотентная трехмерная алгебра Ли $n_3$ (в подходящем базисе $X, Y, Z$ она задается соотношением $[X,Y]=Z$). Ее можно матрично описать как состоящую из нильпотентных матриц третьего порядка. Стационарная подалгебра — произвольная одномерная подалгебра, не лежащая в коммутанте (все такие подалгебры сопряжены). Одна из них состоит из всех матриц такого вида: $\left\{\left(\begin{smallmatrix}0&*&0\\0&0&0\\0&0&0\end{smallmatrix}\right)\right\}$.

17. $L_2^{(17)}$ (размерности $N+1$, где $N=l+m_1+\dots+m_l$):

$e^{a_k x}q,\ xe^{a_k x}q, \dots, x^{m_k}e^{a_k x}q,\ p,$

причем $k=1,2,\dots,l,\ l\geq 0,\ l+m_1+\dots+m_l>0,\ a_1=0$ или 1.

Ясно, что эта алгебра похожа на случай 11 и имеет вид $\langle p\rangle+\mathbf{C}^N$. Действие задается произвольной матрицей, приведенной к жордановой форме. При этом обязательно должна быть одна жорданова клетка с 0 или 1 на диагонали.

Стационарная подалгебра — подпространство коразмерности 1 в абелевом идеале $\mathbf{C}^N$, порожденная векторами $(e^{a_i}-e^{a_1})q$, к которым добавлены все остальные базисные векторы нашей алгебры Ли, кроме входящих в указанные выше разности и еще вектор $p$.

18. $L_2^{(18)}$:

$q,\ xq,\ F_1(x)q, \dots, F_r(x)q.$

Очевидно, эта алгебра Ли не транзитивна.

II. Существуют две системы импримитивности.

Понадобится понятие разложимой транзитивной алгебры Ли.

Алгебра Ли $g$ векторных полей на гладком многообразии $M$ называется разложимой, если существуют такие гладкие многообразия $M_1$, $M_2$ и алгебры Ли $g_1$, $g_2$ векторных полей на них, что $M$ диффеоморфно $M_1\times M_2$ и этот диффеоморфизм порождает изоморфизм алгебр Ли $g$ и $g_1\oplus g_2$. Если алгебра Ли $g$ транзитивна на $M$, а $g_1$, $g_2$ транзитивны на $M_1$, $M_2$ соответственно, то говорят, что $g$ — разложимая транзитивная алгебра Ли. Понятие разложимости удобно при классификациях, так как позволяет свести изучение транзитивной алгебры Ли на некотором многообразии к изучению транзитивных алгебр Ли на многообразиях меньшей размерности. Это возможность свести изучение транзитивных алгебр Ли на комплексных многообразиях размерности 2 к изучению транзитивных алгебр Ли на одномерных комплексных многообразиях.

19. $L_2^{(19)}$ (в [5] имеется опечатка: вместо $y^2q$ стоит $y^2p$):

$q,\ yq,\ y^2q,\ p,\ xp,\ x^2p$ (размерности 6).

Заметим, что алгебра Ли с базисом $q,\ yq,\ y^2q$ изоморфна $sl_2(\mathbf{C})$. Поэтому очевидно, что $L_2^{(19)}$ разложима: $L_2^{(19)}=sl_2\oplus sl_2$.

Далее, для алгебры Ли $\langle q, yq, y^2q\rangle$ стационарная подалгебра Ли точки $(0,0)$ порождена полями $xp$ и $x^2p$ и является борелевской подалгеброй Ли в $sl_2(\mathbf{C})$. Поэтому $h=b\oplus b$.

20. $L_2^{(20)}$ (размерности 3):

$p+q,\ xp+yq,\ x^2p+y^2q.$

Прямое вычисление показывает, что она изоморфна, как и $L_2^{(14)}$, алгебре Ли $sl_2(\mathbf{C})$ (картановская подалгебра Ли порождена элементом $xp+yq$). Но в отличие от случая 14 стационарная подалгебра Ли иная. Транзитивной эта алгебра Ли будет, например, в точке $(1,0)$ (имеем векторы $p+q$, $p$, $p$, порождающие касательное пространство). Стационарная подалгебра — нильпотентная (корневая) подалгебра (она же — нильрадикал борелевской подалгебры Ли) записывается как $h=\{\left(\begin{smallmatrix}0&*\\0&0\end{smallmatrix}\right)\}$.

21. $L_2^{(21)}$ (размерности 4):

$q$, $yq$, $y^2q$, $p$, $xp$.

Как уже отмечалось выше, алгебра Ли с базисом $p$, $xp$ изоморфна $r_2$. Матрично это множество $\left\{\left(\begin{smallmatrix}a&b\\0&-a\end{smallmatrix}\right)\right\}$.

Поэтому ясно, что $L_2^{(21)}=sl_2(\mathbf{C})\oplus r_2$ разложима, для стационарной подалгебры Ли $h=b\oplus a$, где $b$ — борелевская в $sl_2$, а $a$ — одномерная подалгебры в $r_2$. Матрично запишем в виде $\left\{\left(\begin{smallmatrix}a&0\\0&-a\end{smallmatrix}\right)\right\}$.

22. $L_2^{(22)}$ (размерности 4):

$q$, $yq$, $y^2q$, $p$.

Эта алгебра, очевидно, разложима: $sl_2\oplus\mathbf{C}$. Стационарная подалгебра содержится в первом прямом слагаемом — это борелевская подалгебра в нем.

Эта алгебра Ли может быть формально присоединена к случаю 5 при $r=0$.

23. $L_2^{(23)}$:

$q$, $yq$, $y^2q$ не транзитивна.

24. $L_2^{(24)}$ (размерности 4):

Алгебра $q$, $yq$, $p$, $xp$ разложима, она есть прямая сумма двух алгебр Ли $r_2$ (действующих на прямой). Стационарная подалгебра $h$ — прямая сумма соответствующих подалгебр Ли в $r_2$.

25. $L_2^{(25)}$ (размерности 3):

$q$, $p$, $xp+cyq$, $c\neq 0,1$.

В действительности эта разрешимая алгебра Ли тесно связана с $L_2^{(26)}$ и $L_2^{(28)}$.

Имеем $L_2^{(25)}=\mathbf{C}+_\gamma\mathbf{C}^2$ (одномерная подалгебра Ли $\mathbf{C}$ натянута на $xp+cyq$, а двумерный абелев идеал — на $p$, $q$). Полупрямая сумма однозначно задается матрицей $\gamma(1)$, которая в данном случае равна $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&c\end{smallmatrix}\right)$.

Стационарная подалгебра одномерна и натянута на элемент базиса $xp+cyq$.

Отметим, что при $c=0$ получим случай 26 (разложимая алгебра Ли), а при $c=1$ — случай 28. Поэтому получаем семейство 25+26+28.

26. $L_2^{(26)}$ (размерности 3):

Алгебра $q$, $yq$, $p$ разложима: $r_2\oplus\mathbf{C}$, $h\subset r_2$. В действительности это алгебра Ли из п. 25 при $c=0$.

27. $L_2^{(27)}$:

Алгебра $q$, $yq$ не транзитивна (она разложима в прямую сумму транзитивной на $\mathbf{C}$ и тривиальной на $\mathbf{C}$).

III. Существует однопараметрическое множество семейств импримитивности.

28. $L_2^{(28)}$ (размерности 3):

$p$, $q$, $xp+yq$.

Это случай 25 при $c=1$. С. Ли разделил их, так как они имеют разные типы семейств импримитивности. Так как это деление не очень существенно, объединяем их.

29. $L_2^{(29)}$ (размерности 2):
$q,\ xp+yq$.
Эта алгебра Ли изоморфна $r_2$. Действие соответствующей группы Ли $R_2$ просто транзитивно на самой этой группе Ли (комплексно аналитически изоморфной $\mathbf{C}^2$), $h=\{0\}$. Эта алгебра Ли не транзитивна в точке $(0,0)$.
30. $L_2^{(30)}$ (размерности 2):
$p,\ q$ — абелева алгебра Ли, изоморфная $\mathbf{C}^2$. Она тоже разложима, стационарная подалгебра тривиальна.
31. $L_2^{(31)}$:
$p$ — алгебра Ли не транзитивна.
Разбор всех алгебр Ли из классификации С. Ли завершен. Справедлива

**Теорема 1.** *Пусть $L$ — транзитивная неразложимая алгебра Ли аналитических векторных полей на $\mathbf{C}^2$. Тогда она изоморфна (фактически даже сопряжена) одной из следующих алгебр или одному из членов семейства алгебр Ли векторных полей:*
N1. $L_2^{(1)}$ (*размерности* 8):
$p,\ q,\ xq,\ xp-yq,\ yp,\ xp+yq,\ x^2p+xyq,\ xyp+y^2q,$
$g=sl_3(\mathbf{C}),$
$h=gl_2(\mathbf{C})+_\tau \mathbf{C}^2;$
N2. $L_2^{(2)}$ (*размерности* 6):
$p,\ q,\ xq,\ xp-yq,\ yp,\ xp+yq,\ g=gl_2(\mathbf{C})+\mathbf{C}^2,$
$h=gl_2(\mathbf{C});$
N3. $L_2^{(3)}$ (*размерности* 5):
$p,\ q,\ xq,\ xp-yq,\ yp,$
$g=sl_2(\mathbf{C})+_\tau \mathbf{C}^2,$
$h=sl_2(\mathbf{C});$
N4. $L_2^{(4)}$ (*размерности* 5):
$q,\ xq,\ p,\ 2xp+yq,\ x^2p+xyq,$
$g=gl_2(\mathbf{C})+_\tau \mathbf{C}^2,$
$h=b+_\tau \mathbf{C}^1$, *где* $b$ *— борелевская подалгебра Ли в* $sl_2(\mathbf{C});$
N5. $L_2^{(5)}$ $(r>2)$:
$q,\ xq,\dots,x^rq,\ p,\ 2xp+ryq,\ x^2p+rxyq,$
$g=sl_2(\mathbf{C})+\phi_{r+1}\mathbf{C}^{r+1},$
$h=b+\mathbf{C}^r$, *где* $b$ *— борелевская подалгебра в* $sl_2(\mathbf{C});$
N6. $L_2^{(6)}$ (*размерности* $r+5$):
$q,\ xq,\dots,x^rq,\ yq,\ p,\ xp,\ x^2p+rxyq,\ r>0,$
$g=gl_2(\mathbf{C})+_{\psi_{r+1}}\mathbf{C}^{r+1},$
$h=\overline{b}+\mathbf{C}^r$, *где* $\overline{b}$ *— борелевская подалгебра Ли в* $gl_2(\mathbf{C});$
N7. $L_2^{(7)}$ (*размерности* 4):
$yq,\ p,\ xp,\ x^2p+xyq,$
$g=sl_2(\mathbf{C})\oplus\mathbf{C}=gl_2(\mathbf{C}),$
$h$ *— двумерная разрешимая алгебра Ли, изоморфна* $r_2;$
N8. $L_2^{(8)}$ (*размерности* $r+4$):
$q,\ xq,\dots,x^rq,\ yq,\ p,\ xp,$
$g=b+_{\psi_{r+1}}\mathbf{C}^{r+1},$

$h = b_1 +_{\psi_{r+1}} \mathbf{C}^r$, *здесь* $b_1$ — *одномерная подалгебра в двумерной борелевской подалгебре Ли* $b$;

N9. $L_2^{(9)}$ (*размерности* $r+3$):

$q,\ xq, \dots, x^r q,\ p,\ xp + cyq,\ r > 0,\ c \neq 1,$

$g = r_2 +_{\psi} \mathbf{C}^{r+1},$

$h = \mathbf{C} +_{\psi} \mathbf{C}^r;$

N10. $L_2^{(10)}$ (*размерности* $r+2$):

$q,\ xq, \dots, x^{r-1}q,\ p, xp + (ry + x^r)q,\ r > 1,$

$g = \mathbf{C} + n$, *ее нильрадикал* $n$ *имеет вид* $n = \mathbf{C} +_{J_r(0)} \mathbf{C}^r$,

$h = \mathbf{C} + \mathbf{C}^{r-1};$

N11. $L_2^{(11)}$ (*размерности* $N+2$):

$q,\ xq, \dots, x^m q,\ e^{a_k x}q,\ xe^{a_k x}q, \dots, x^{m_k}e^{a_k x}q,\ yq,\ p,$

*причем* $k = 1, 2, \dots, l,\ l \geq 0,\ l + m + m_1 + \cdots,\ m_l > 0,\ a_1 = 1,$

$g = \mathbf{C}^2 + \mathbf{C}^N,$

$h = \mathbf{C} + \mathbf{C}^{N-1};$

N12. $L_2^{(14)}$ (*размерности* 3):

$p,\ 2xp + yq,\ x^2p + xyq,$

$g = sl_2(\mathbf{C}),$

$h$ *одномерна, натянута на жорданову матрицу* $J_2(1)$;

N13. $L_2^{(16)}$ (*размерности* 3):

$q,\ p,\ xp + (x+y)q,$

$g = n_3$ — *трехмерная нильпотентная алгебра Ли*,

$h$ — *одномерная подалгебра, лежащая вне* $[g, g]$ (*все такие подалгебры сопряжены между собой*);

N14. $L_2^{(17)}$ (*размерности* $N+1$, *где* $N = 1 + m_1 + \cdots + m_l$):

$e^{a_k x}q,\ xe^{a_k x}q, \dots x^{m_k}e^{a_k x}q,\ p,$

*причем* $k = 1, 2, \dots, l,\ l \geq 0,\ l + m_1 + \cdots + m_l > 0,\ a_1 = 0$ *или* $1$,

$g = \mathbf{C} + \mathbf{C}^N,$

$h = \mathbf{C}^{N-1};$

N15. $L_2^{(20)}$ (*размерности* 3):

$p + q,\ xp + yq,\ x^2p + y^2q,$

$g = sl_2(\mathbf{C}),$

$h$ — *одномерная подалгебра, натянутая на нильпотентную матрицу* (*все такие подалгебры сопряжены между собой*);

N16. $L_2^{(25+26+28)}$ (*размерности* 3):

$q,\ p,\ xp + cyq,\ c \in \mathbf{C},$

$g = \mathbf{C} + \mathbf{C}^2,$

$h$ — *одномерная подалгебра, не лежащая в* $[g, g]$ (*все такие подалгебры сопряжены между собой*);

N17. $L_2^{(29)}$ (*размерности* 2):

$q,\ xp + yq,$

$g = r_2,$

$h = \{0\}.$

*В этом списке алгебры Ли, отвечающие различным значениям параметров (числовым или матричным), не будут изоморфны.*

*Алгебры* 12, 23, 27, 31, 34 *— нетранзитивные, а* 19, 21, 22, 24, 26, 30 *— разложимые.*

Утверждение о неизоморфности алгебр Ли из списка с очевидностью вытекает из их структурных описаний (разложений в полупрямые суммы).

Более подробно структура указанных выше алгебр Ли и стационарных подалгебр (т. е. детали относительно полупрямых сумм) описана выше при рассмотрении соответствующих случаев классификации С. Ли.

## 3. Комплексные односвязные однородные пространства размерности 2 на уровне групп Ли

Однородные односвязные комплексные многообразия размерности 2 таковы: $\mathbf{C}P^2$, $\mathbf{C}P^1 \times \mathbf{C}P^1 = S^2 \times S^2$, $\mathbf{C}P^1 \times \mathbf{C}$, $\mathbf{C}^2$ и $S^3 \times \mathbf{R}$. Последнее многообразие имеет естественную комплексную структуру, существование которой хорошо известно. Ее можно легко увидеть, если представить $S^3 \times \mathbf{R}$ как пространство расслоения над базой $S^2$ (имеющей естественную комплексную структуру) со слоем — цилиндром $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z} = \mathbf{C}^2/\mathbf{Z}$, имеющем естественную комплексную структуру. Более того, многообразие $S^3 \times \mathbf{R}$ можно рассматривать как универсальное накрытие многообразия Хопфа $S^3 \times S^1$, существование комплексной структуры на котором известно. Необходимо отметить, что на похожем многообразии $S^3 \times \mathbf{R}^3$ установить комплексную структуру намного проще, так как это многообразие диффеоморфно $SL_2(\mathbf{C})$.

Здесь будем рассматривать только односвязные однородные пространства $M = G/H$ комплексной размерности 2. Для них классификация полностью сводится к классификации транзитивных алгебр Ли на $\mathbf{C}^2$.

Отметим, что иногда бывает полезно использовать понятие такого разложимого однородного пространства, которое представляется в виде прямого произведения однородных пространств меньшей размерности. На уровне алгебр Ли это сводится к понятию разложимых транзитивных алгебр Ли, введенному выше.

Здесь будем использовать теорему 1. Данные там подробные описания структуры транзитивных алгебр Ли позволяют без труда строить и соответствующие односвязные транзитивные группы Ли в структурированном виде (в виде удобных для понимания строения групп Ли полупрямых произведений).

**Теорема 2.** *Односвязные двумерные комплексные однородные пространства $G/H$ (в виде пар $(G, H)$) перечислены ниже (в скобках в неразложимых случаях указывается номер соответствующих алгебр Ли в теореме* 1*).*

1. $M = \mathbf{C}P^2$,

$G = SL_3(\mathbf{C})$, $H = GL_2(\mathbf{C}) \cdot \mathbf{C}^2$ (N1);

2. $M = \mathbf{C}P^1 \times \mathbf{C}P^1$ *— разложимое однородное пространство, имеем*

$G = SL_2(\mathbf{C}) \times \mathbf{SL}_2(\mathbf{C})$ *с естественной стационарной подгруппой $H$ — прямым произведением двух унипотентных подгрупп в прямых сомножителях* $SL_2(\mathbf{C})$;

3. $M = \mathbf{C}P^1 \times \mathbf{C}$. *Имеем две серии:*

$G = SL_2(\mathbf{C}) \times_\phi \mathbf{C}^m$, $\phi$ *— неприводимое представление* (N4+5+13+22), $H = B \times_\psi \mathbf{C}^{m-1}$ ($B$ *— борелевская подгруппа в* $SL_2(\mathbf{C})$),

$G = GL_2(\mathbf{C}) \times_\psi \mathbf{C}^m$, $\psi$ *— неприводимое представление* (N6), $H = \overline{B} \times_\psi \mathbf{C}^{m-1}$ ($\overline{B}$ *— борелевская подгруппа в* $SL_2(\mathbf{C})$);

4. $M = \mathbf{C}^2$.

*Здесь группа Ли $G$ всегда будет разрешимой. Имеем*

а) *просто транзитивные группы* $G = \mathbf{C}^2$, $R_2$ (N17), $H = \{e\}$,

б) *имеющие нетривиальную стационарную подгруппу группы*

$G = GL_2(\mathbf{C}) \cdot \mathbf{C}^2$ (N2), $H = GL_2(\mathbf{C})$,

$G = SL_2(\mathbf{C}) \cdot \mathbf{C}^2$ (N3), $H = SL_2(\mathbf{C})$,

$G = B \cdot \mathbf{C}^{r+1}$, (N8), $H = B_1 \cdot \mathbf{C}^r$ (*здесь* $B$ — *борелевская подгруппа в* $SL_2(\mathbf{C})$),

$G = R_2 \cdot \mathbf{C}^{r+1}$ (N9), $H = C \cdot \mathbf{C}^r$,

$G = \mathbf{C} \cdot N$ (N10), $N = \mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^r$, $H = \mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^{r-1}$,

$G = \mathbf{C}^2 \cdot \mathbf{C}^N$ (N11), $H = \mathbf{C} \cdot C^{N-1}$,

$G = N_3(\mathbf{C})$ (N13) — *трехмерная нильпотентная группа Ли,* $H$ — *одномерная подгруппа Ли, порожденная подалгеброй Ли,*

$G = \mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^N$ (N17), $H = \mathbf{C}^{N-1}$,

$G = \mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^2$ (N25 + 26 + 28), $H$ — *одномерная подгруппа Ли, не лежащая в* $\mathbf{C}^2$,

5. $M = S^3 \times \mathbf{R}$,

$G = GL_2(\mathbf{C})$ (N7), $H \simeq R_2$,

$G = SL_2(\mathbf{C})$ (N12), $H$ — *одномерная связная подгруппа Ли (соответствующая подалгебре Ли, натянутой на жорданову клетку* $J_2(1)$),

$G = SL_2(\mathbf{C})$ (N15), $H$ — *одномерная связная подгруппа Ли (соответствующая подалгебре Ли, натянутой на жорданову клетку* $J_2(0)$).

**Замечание.** Диффеоморфность $G/H$ многообразию $S^3 \times \mathbf{R}$ вытекает из того, что топологически группа Ли $SL_2(\mathbf{C})$ диффеоморфна прямому произведению $S^3 \times \mathbf{R}^3$, причем подмногообразие $\mathbf{R}^3$ здесь можно считать содержащим стационарную подгруппу $H$ (диффеоморфную $\mathbf{R}^2$).

## Литература


[1] Lie S., Engel F. *Theorie der Transformationsgruppen*, I, II, III (Teubner, Leipzig, 1888–1893).

[2] Mostow G.D. *The extensibility of local Lie groups of transformations and groups on surfaces*, Ann. Math. **52** (3), 606–637 (1950).

[3] Горбацевич В.В., Онищик А.Л. *Группы Ли преобразований*, Итоги науки и техн. Совр. пробл. матем. Фунд. направл. (ВИНИТИ, М., 1988), с. 103–240.

[4] Kowalewski G. *Einfuhrung in die Theorie der kontinuierlichen Gruppen* (Academische Verlag, Leipzig, 1931).

[5] Чеботарев Н.Г. *Теория групп Ли* (ГИТТЛ, М.–Л., 1940).

[6] Владимиров С.А. *Группы симметрии дифференциальных уравнений и релятивистские поля* (Атомиздат, М., 1979).

[7] Hermann R. *Sophus Lie's* 1880 *transformation group paper* (Math. Sci. Press, Brooklyn, 1975).

[8] Doubrov B., Komrakov B. *Two-dimensional homogeneous spaces* (ISLC Press, Minsk, 2000).



*В.В. Горбацевич*

*профессор, кафедра высшей математики,*
*Российский государственный технологический университет,*
*ул. Оршанская, д. 3, г. Москва, 121552, Россия,*

`e-mail:` vgorvich@yandex.ru

*V.V. Gorbatsevich*

**Classification of complex simply connected homogeneous spaces of dimensions not greater than 2**

*Abstract.* We propose a classification of finite-dimensional complex Lie algebras of analytic vector fields on a complex plane and that of corresponding actions of Lie groups on complex two-dimensional manifolds. The mentioned algebras have been specified by S. Lie. More precisely, he has specified only vector fields, i.e., bases of the corresponding Lie algebras, rather than the structure of the algebras. No isomorphic algebras among the mentioned ones were specified. Therefore the Lie classification is far from complete; in this paper we complete it in one important case. We consider only a part of classification related to transitive actions of Lie groups.

*Keywords*: Lie algebra, Lie group of transformations, homogeneous space.

*V.V. Gorbatsevich*

*Professor, Chair of Higher Mathematics,*
*Russian State Technological University,*
*3 Orshanskaya str., Moscow, 121552 Russia,*

`e-mail:` vgorvich@yandex.ru