Ю. А. Шашкин, Л. Г. Шарабурова, Теорема Хелли для выпуклых конусов,
Изв. вузов. Матем., 1978, номер 11, 104–107

https://www.mathnet.ru/ivm5867

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1978 МАТЕМАТИКА № 11 (198)

УДК 517.98

Ю. А. Шашкин, Л. Г. Шарабурова

ТЕОРЕМА ХЕЛЛИ ДЛЯ ВЫПУКЛЫХ КОНУСОВ

1. Мы рассматриваем конечные семейства $\mathfrak{M}=\{C\}$ выпуклых конусов в евклидовом пространстве $\boldsymbol{R}^n$ с общей вершиной в нуле (в дальнейшем слово „выпуклый" мы иногда опускаем). Различные теоремы типа Хелли о пересечении конусов (или, что то же, о пересечении сферически выпуклых множеств) были доказаны в работах [1] — [6]. В этих теоремах существенно использовался такой алгебраический инвариант конуса C, как его *линейность* (или *линейная размерность*) $\operatorname{lin} C$, т. е. размерность наибольшего содержащегося в C линейного подпространства.

В предлагаемой заметке дается еще один вариант теоремы Хелли для семейства выпуклых конусов, в котором, кроме линейности, учитывается также кратность покрытия этим семейством некоторых подпространств в пространстве $\boldsymbol{R}^n$ (точную формулировку см. ниже, в теореме 2). При этом под *кратностью покрытия* множества A семейством множеств $\{B\}$ мы понимаем наименьшее натуральное число k такое, что каждая точка $x \in A$ содержится по крайней мере в k множествах семейства $\{B\}$.

2. Напомним некоторые нужные нам определения и факты (см. по этому поводу статьи [4], [5] и цитированную там литературу). Говорят, что множество M отличных от нуля векторов пространства $\boldsymbol{R}^n$ имеет *положительное разбиение*, если имеются такие непустые множества A и B, что

$$M=A\cup B,\ A\cap B=\varnothing,\ \operatorname{pos} A\cap \operatorname{pos} B=\{0\}.$$

Здесь $\operatorname{pos} A$ обозначает *положительную оболочку* множества A, т. е. наименьший выпуклый конус с вершиной в нуле, содержащий это множество. Множество $M\subset \boldsymbol{R}^n\setminus\{0\}$ называется *строго положительно независимым* (*с. п. независимым*), если оно не имеет положительного разбиения. С. п. независимое множество M в R^n всегда конечно; более того, его мощность $|M|$ удовлетворяет неравенству $|M|\leqslant 2n$.

Множество $B\subset \boldsymbol{R}^n$ называется *положительным базисом* пространства $\boldsymbol{R}^n$, если $\operatorname{pos} B=R^n$ и B положительно независимо, т. е. $x\notin \operatorname{pos}(B\setminus\{x\})$ для всех $x\in B$. Мощность положительного базиса B удовлетворяет неравенствам $n+1\leqslant|B|\leqslant 2n$. Если при этом $|B|=n+1$, то базис B называется *минимальным*, а если $|B|=2n$, то — *максимальным*. Положительный базис, который является с. п. независимым множеством, называется *строгим положительным* (*с. п.*) *базисом*. В частности, этим свойством обладают минимальный и максимальный базисы. Полезно еще заметить, что всякий минимальный положительный базис в $\boldsymbol{R}^n$ получается из линейного базиса $\{x_1,\ldots,x_n\}$

этого пространства добавлением к нему вектора — $(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n)$, $\alpha_i > 0$, а максимальный базис — из линейного базиса $\{x_1, \ldots, x_n\}$ добавлением системы векторов $\{-\alpha_1 x_1, \ldots, -\alpha_n x_n\}$, $\alpha_i > 0$.

В дальнейшем существенно используется следующая теорема о представлении с. п. независимого множества.

Теорема A [4]. *Множество $M \subset \boldsymbol{R}^n \setminus \{0\}$ тогда и только тогда с. п. независимо, когда пространство R^n можно представить в виде прямой суммы его линейных подпространств*

$$\boldsymbol{R}^n = \boldsymbol{R}^{d_0} \oplus \boldsymbol{R}^{d_1} \oplus \ldots \oplus \boldsymbol{R}^{d_t}$$

так, что $M \subset \bigcup_{i=0}^{t} \boldsymbol{R}^{d_i}$, *множество* $M \cap \boldsymbol{R}^{d_0}$ *линейно независимо, а множество* $M \cap \boldsymbol{R}^{d_i}$ *является минимальным положительным базисом пространства* $\boldsymbol{R}^{d_i}$ $(i = 1, \ldots, t)$.

3. Сформулируем и докажем теперь результаты этой заметки.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{M} = \{C_1, \ldots, C_m\}$ — семейство выпуклых конусов в пространстве $\boldsymbol{R}^n$ с общей вершиной в нуле такое, что*

$$\bigcap_{i=1}^{m} C_i = \{0\}, \tag{1}$$

и минимальное относительно этого свойства, т. е. каждое его собственное подсемейство имеет пересечение, отличное от нуля. Пусть $n + 1 \leqslant m \leqslant 2n$. Тогда существует подпространство $R^d \subset \boldsymbol{R}^n$ такое, что $m - n \leqslant d \leqslant n$ и кратность покрытия подпространства R^d семейством $\mathfrak{M}$ не меньше, чем $m - d$. Кроме того, $\min \{\operatorname{lin} C_i : 1 \leqslant i \leqslant m\} \geqslant m - n - 1$.

Замечания. 1°. Неравенства $n + 1 \leqslant m \leqslant 2n$ в теореме 1 являются точными. Действительно, при $m \leqslant n$ семейство $\mathfrak{M}$ не покрывает никакого подпространства $\boldsymbol{R}^d \subset \boldsymbol{R}^n$, а при $m \geqslant 2n + 1$ семейства $\mathfrak{M}$ не существует в силу теоремы Робинсона [1], согласно которой конечное семейство конусов в R^n имеет общий луч, если этим свойством обладает каждое его подсемейство мощности $2n$.

2°. Теорему 1 интересно сравнить с теоремой Перлеса о покрытии пространства $\boldsymbol{R}^n$ т. н. невырожденными семействами конусов [7].

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим множество $M = \{x_1, \ldots, x_m\}$, где

$$x_i \in \bigcap_{j \neq i} C_j, \ x_i \neq 0, \ 1 \leqslant i \leqslant m, \ 1 \leqslant j \leqslant m. \tag{2}$$

Легко видеть, что M с. п. независимо. По теореме A существует такое разложение пространства $\boldsymbol{R}^n$ в прямую сумму его подпространств

$$\boldsymbol{R}^n = \boldsymbol{R}^{d_0} \oplus \boldsymbol{R}^{d_1} \oplus \ldots \oplus \boldsymbol{R}^{d_t},$$

что $M \subset \bigcup_{i=0}^{t} \boldsymbol{R}^{d_i}$, $M \cap \boldsymbol{R}^{d_0}$ линейно независимо, $M \cap \boldsymbol{R}^{d_i}$ есть минимальный положительный базис в пространстве $\boldsymbol{R}^{d_i}$ $(i = 1, \ldots, t)$. Положим $d = d_1 + \ldots d_t$ и

$$\boldsymbol{R}^d = \boldsymbol{R}^{d_1} \oplus \ldots \oplus \boldsymbol{R}^{d_t}.$$

Очевидно, $m-n \leqslant d \leqslant n$. Покажем, что $\boldsymbol{R}^d$ есть то подпространство, существование которого утверждается в теореме. Множество $M \cap R^d$ является положительным базисом в $\boldsymbol{R}^d$, поэтому $\boldsymbol{R}^d = \operatorname{pos}(M \cap R^d)$. Пусть $x \in \boldsymbol{R}^d$, $x \neq 0$. Согласно конической теореме Каратеодори (см., напр., [8], лемму 2.1), $x \in \operatorname{pos} U$, где $U \subset M \cap \boldsymbol{R}^d$, $|U| \leqslant d$. Иначе говоря,

$$x = \sum_{i \in Q} \alpha_i x_i, \quad \alpha_i > 0, \tag{3}$$

где $Q = \{i : 1 \leqslant i \leqslant m,\ x_i \in U\}$. Ввиду (2), $x_i \in C_j$, $i \neq j$, и поэтому, в силу (3), $x \in \bigcap \{C_j : 1 \leqslant j \leqslant m,\ j \notin Q\}$. Таким образом, точка x содержится в $m - |Q|$ конусах семейства $\mathfrak{M}$. Так как $|Q| \leqslant d$, то первое утверждение теоремы доказано.

Докажем второе ее утверждение. Рассмотрим такой конус $C_i \in \mathfrak{M}$, что $x_i \in M \cap \boldsymbol{R}^{d_0}$. Тогда $M \cap R^d \subset C_i$, и т. к. $M \cap \boldsymbol{R}^d$ есть положительный базис в $\boldsymbol{R}^d$, то $\boldsymbol{R}^d \subset C_i$, и $\operatorname{lin} C_i \geqslant d$.

Пусть теперь конус C_i такой, что $x_i \in M \cap \boldsymbol{R}^d$ и, в частности, $x_i \in M \cap \boldsymbol{R}^{d_j}$. Тогда конус C_i содержит множество

$$M_j = M \cap (\boldsymbol{R}^{d_1} \cup \ldots \cup \boldsymbol{R}^{d_{j-1}} \cup \boldsymbol{R}^{d_{j+1}} \cup \ldots \cup \boldsymbol{R}^{d_t}),$$

и т. к. $\operatorname{pos} M_j = \boldsymbol{R}^{p_j}$, где

$$\boldsymbol{R}^{p_j} = \boldsymbol{R}^{d_1} \oplus \ldots \oplus \boldsymbol{R}^{d_{j-1}} \oplus \boldsymbol{R}^{d_{j+1}} \oplus \ldots \oplus \boldsymbol{R}^{d_t},$$

то $C_i \supset \boldsymbol{R}^{p_j}$. Поэтому $\operatorname{lin} C_i \geqslant p_j = d - d_j$.

Для завершения доказательства теоремы достаточно показать, что $d - d_j \geqslant m - n - 1$. Имеем $d - d_j = d_1 + \ldots + d_{j-1} + d_{j+1} + \ldots + d_t \geqslant t - 1$. С другой стороны, $|M| = m \leqslant d_0 + (d_1 + 1) + \ldots + (d_t + 1) = d_0 + d_1 + \ldots + d_t + t = n + t$. Поэтому $t \geqslant m - n$ и $d - d_j \geqslant t - 1 \geqslant m - n - 1$. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{M}$ — конечное семейство выпуклых конусов в пространстве R^n с общей вершиной в нуле. Пусть l $(0 \leqslant l \leqslant n-1)$ — максимум линейностей конусов семейства $\mathfrak{M}$ и пусть для любого числа d $(l \leqslant d \leqslant n)$ кратность покрытия семейством $\mathfrak{M}$ любого подпространства $\boldsymbol{R}^d \subset \boldsymbol{R}^n$ не превосходит числа $n + l - d - 1$. Если каждые $n + l - 1$ конусов из $\mathfrak{M}$ имеют общий луч, то и все конусы из $\mathfrak{M}$ имеют общий луч. Число $n + l - 1$ является здесь точным в следующем смысле. Для любых чисел n и l $(n \geqslant 2,\ 0 \leqslant l \leqslant n-1)$ в пространстве $\boldsymbol{R}^n$ существует семейство $\mathfrak{N}$ конусов, покрывающее любое подпространство $R^d \subset \boldsymbol{R}^n$ $(l \leqslant d \leqslant n)$ не более чем $(n + l - d - 1)$-кратно, и такое, что каждые $n + l - 2$ членов семейства $\mathfrak{N}$ имеют общий луч, но пересечение всех его членов равно нулю.*

Доказательство. Докажем первое утверждение теоремы от противного: пусть $\mathfrak{M} = \{C_1, \ldots, C_m\}$, $m > n + l - 1$, каждые $n + l - 1$ членов семейства имеют общий луч, но $\bigcap\limits_{i=1}^{m} C_i = \{0\}$. Рассмотрим подсемейство $\mathfrak{M}_1$ семейства $\mathfrak{M}$ такое, что $\bigcap \{C_i : C_i \in \mathfrak{M}_1\} = \{0\}$, и минимальное относительно этого свойства. Пусть, напр.,

$\mathfrak{M}_1 = \{C_1, \ldots, C_p\}$. Тогда $p \geqslant n + l$. Применяя к семейству $\mathfrak{M}_1$ теорему 1, получаем подпространство $R^d \subset R^n$, $l \leqslant d \leqslant n$, покрытое этим семейством не менее чем $(n + l - d)$-кратно, что противоречит условию теоремы 2.

Для доказательства точности числа $n + l - 1$ построим семейство $\mathfrak{N}$, указанное в формулировке теоремы. Возьмем в R^n фиксированное подпространство R^{n-1} и представим его в виде прямой суммы $R^{n-1} = R^l \oplus R^{n-l-1}$. В пространстве R^l выберем максимальный положительный базис $B_1 = \{x_1, \ldots, x_{2l}\}$, а в пространстве R^{n-l-1} — линейный базис $B_2 = \{x_{2l+1}, \ldots, x_{n+l-1}\}$. Положим $B = B_1 \cup B_2$, $C_i = \operatorname{pos}(B \setminus \{x_i\})$, где $x_i \in B$, и $\mathfrak{N} = \{C_1, \ldots, C_{n+l-1}\}$. Ясно, что $\max\{\operatorname{lin} C_i : C_i \in \mathfrak{N}\} = l$. Так как все конусы семейства $\mathfrak{N}$ являются подмножествами конуса $\operatorname{pos} B$ и $\operatorname{lin} \operatorname{pos} B = l$, то кратность покрытия семейством $\mathfrak{N}$ любого подпространства $R^d \subset R^n$, $d > l$, равна нулю. С другой стороны, кратность покрытия семейством $\mathfrak{N}$ подпространства R^l равна $n - 1$. Тот факт, что пересечение всех конусов из $\mathfrak{N}$ равно нулю, а пересечение каждых $n + l - 2$ из них отлично от нуля, доказывается так же, как в теореме 3 работы [5] Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Robinson C. V. Spherical theorems of Helly type and congruence indices of spherical caps. Amer. J. Math., v. 64, № 2, 1942, p. 260—272.

2. Molnár J. Über eine Übertragung des Hellyschen Satzes in sphärische Räume. Acta Math. Acad. Sci. Hungar., t. 8, № 3—4, 1957, p. 315—318.

3. Baker M. J. C. A spherical Helly-type theorem. Pacific J. Math., v. 23, № 1, 1967, p. 1—3.

4. Hansen W., Klee V. Intersection theorems for positive sets. Proc. Amer. Math. Soc., v. 22, № 2, 1969, p. 450—457.

5. Шарабурова Л. Г., Шашкин Ю. А. Пересечения сферически выпуклых множеств. Матем. заметки, т. 18, № 5, 1975, с. 781—791.

6. Katchalski M. A Helly type theorem on the sphere. Proc. Amer. Math. Soc., v. 66, № 1, 1977, p. 119—122.

7. Katchalski M. Some properties of families of convex cones. Trans. Amer. Math. Soc., v. 233, 1977, p. 235—240.

8. Никайдо X. Выпуклые структуры и математическая экономика. М., „Мир“, 1972.

г. Свердловск Поступила
г. Омск 24 V 1978