В. В. Васин, Дискретная аппроксимация и устойчивость в экстремальных задачах,
Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1982, том 22, номер 4, 824–839

ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 22 Июль 1982 Август № 4

УДК 517.988.8

ДИСКРЕТНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ И УСТОЙЧИВОСТЬ В ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ

ВАСИН В. В.

(Свердловск)

Рассматривается задача минимизации вещественного функционала на множестве линейного нормированного пространства с точки зрения ее дискретной аппроксимации последовательностью конечномерных задач.

§ 1. Введение

Пусть Ω — непустое множество линейного (нормированного) пространства X, f — вещественный функционал, определенный на Ω и ограниченный снизу на этом множестве. Рассматривается экстремальная задача

$$(1.1)\qquad \inf\{f(x):\ x\in\Omega\}=F>-\infty.$$

Задаче (1.1) поставим в соответствие последовательность экстремальных задач

$$(1.2)\qquad \inf\{f_n(x):\ x\in\Omega_n\}=F_n>-\infty,\qquad n=1,2,\dots,$$

которую будем трактовать как дискретизацию исходной бесконечномерной («непрерывной») задачи (1.1). Здесь Ω_n — подмножество линейного (конечномерного нормированного) пространства X_n, где X_n образует дискретную аппроксимацию пространства X (см. § 2).

Задача заключается в нахождении условий, гарантирующих сходимость оптимальных значений

$$(1.3)\qquad \lim_{n\to\infty} F_n=F,$$

а при разрешимости задачи — также сходимость (в том или ином смысле) оптимальных (или ε-оптимальных) множеств $M_n\to M$ (или $M_n^\varepsilon\to M$).

В такой форме поставленная задача, с одной стороны, включает в себя проблематику, связанную с разработкой методов дискретизации в задачах оптимального управления, вариационного исчисления, математического программирования, в некорректных задачах (см. [1] — [6] и библиографию в них), с другой — круг вопросов, связанный с исследованием устойчивости оптимальных значений при вариации функционала f и допустимого множества Ω, например в задачах нелинейного программирования [7], [8].

§ 2. Аппарат дискретной аппроксимации

Приведем необходимые определения, касающиеся понятий дискретной аппроксимации, дискретной сходимости и (полу) непрерывности, принимая в качестве исходной общую схему, изложенную в [9], [10].

Определение 1. Последовательность линейных нормированных пространств $\{X_n\}$ образует дискретную аппроксимацию пространства X, если существует семейство операторов p_n: $X\to X_n$, $n=1, 2, \dots$, со следующими свойствами [9]:

1) $\forall x \in X \qquad \|p_n x\|_{X_n} \to \|x\|_X$,

2) $\forall x, x' \in X, \qquad \forall a, a' = \mathrm{const} \qquad \|p_n(ax+a'x') - ap_n - a'p_n x'\|_{X_n} \to 0$

(здесь предельный переход понимается при $n\to\infty$; как правило, этот символ будет опускаться, так же как и знаки при нормах).

Определение 2. $\{p_n\}$, $n=1, 2, \ldots$, со свойствами 1), 2) называется семейством связывающих операторов [9], [11].

Определение 3. Последовательность $\{x_n\}$, $x_n \in X_n$, называется дискретно сходящейся к x (обозначаем $x_n \to x$), если (см. [9]) $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - p_n x\| = 0$.

Пусть также последовательность сопряженных пространств $\{X_n^*\}$ образует дискретную аппроксимацию X^* и выполнено условие согласованности аппроксимаций [10]

$$(2.1) \qquad x_n \to x, \quad v_n \to v \Rightarrow v_n(x_n) \to v(x),$$

где $x_n \in X_n$, $x \in X$, $v_n \in X_n^*$, $v \in X^*$.

Определение 4. Последовательность $\{x_n\}$ дискретно слабо сходится к x (обозначаем $x_n \dashrightarrow x$), если $x_n \in X$, $x \in X$, рассматриваемые как элементы пространств X_n^{**}, X^{**}, удовлетворяют соотношению $v_n(x_n) \to v(x)$ для любой дискретно сходящейся последовательности функционалов $v_n \to v$, $v_n \in X^*$, $v \in X^*$ (см. [10]).

Определение 5. Говорят, что задана последовательность $\{r_n\}$, r_n: $X_n \to X$, операторов восполнения, если выполнено соотношение (см. [9])

$$x_n \to x \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \|r_n x_n - x\| = 0.$$

По аналогии с [9] дадим также следующее

Определение 6. $\{r_n\}$, r_n: $X_n \to X$, образует последовательность слабых операторов восполнения, если выполнено соотношение $x_n \dashrightarrow x \Rightarrow r_n x_n \rightharpoonup x$, где знак $\rightharpoonup$ означает слабую сходимость в пространстве X.

Под парой f, $\{f_0\}$ будем понимать функционал f с областью определения $D(f) \subseteq X$ и последовательность функционалов f_n, $n=1, 2, \ldots$, с $D(f_n) \subseteq X_n$.

Определение 7. Назовем пару f, $\{f_n\}$ дискретно полунепрерывной снизу (или сверху) на D, если выполнено соотношение

$$x_n \to x \in D \Rightarrow f(x) \leqslant \liminf_{n\to\infty} f_n(x_n) \qquad (\text{или } f(x) \geqslant \limsup_{n\to\infty} f_n(x_n)).$$

Если заменить $x_n \to x$ на $x_n \dashrightarrow x$, то пару f, $\{f_n\}$ будем называть дискретно слабо полунепрерывной снизу (или сверху).

§ 3. Общая схема дискретизации задачи

Прежде чем перейти к описанию достаточных условий устойчивой дискретизации, сформулируем одно полезное утверждение [5], которое существенно будет использоваться в дальнейшем. Для этого введем некоторые общие предположения и обозначения. Всюду далее считаем, что f, f_n — ограниченные снизу функционалы на множествах Ω и Ω_n соответственно, т. е. $F > -\infty$, $F_n > -\infty$. Элемент, обозначаемый x^ε (или x_n^ε) и удовлетворяющий условию $f(x^\varepsilon)\leqslant F+\varepsilon$, $x^\varepsilon\in\Omega$ (или $f_n(x_n^\varepsilon)\leqslant F_n+\varepsilon$, $x_n^\varepsilon\in\Omega_n$), будем называть ε-экстремальным элементом задачи (1.1) (или (1.2)). Через M (или M_n) обозначаем оптимальное множество, M^ε (или M_n^ε) — совокупность ε-экстремальных элементов задачи (1.1) (или (1.2)) при фиксированном ε, $\varepsilon_0>0$.

Теорема 1. *Для того чтобы выполнялось* (1.3), *необходимо и достаточно, чтобы были выполнены условия*:

а$_1$) *для любых* $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ *существует* ε-*экстремальный элемент* x^ε *в задаче* (1.1) *такой, что*

$$\inf_{\{x_n\},x_n\in\Omega_n}\ \limsup_{n\to\infty}[f_n(x_n)-f(x^\varepsilon)]\leqslant 0;$$

б$_1$) *для любых* $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ *существует последовательность* ε-*экстремальных элементов* $\{x_n^\varepsilon\}$ *такая, что*

$$\inf_{x\in\Omega}\ \limsup_{n\to\infty}[f(x)-f_n(x_n^\varepsilon)]\leqslant 0.$$

Из теоремы непосредственно вытекает следствие, в котором (достаточные) условия устойчивости в некоторых случаях более удобны при проверке.

Следствие 1. Для выполнения (1.3) достаточно выполнить условия:

в$_1$) для любых $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ существует ε-экстремальный элемент и операторы p_n: $X\to X_n$ такие, что $p_nx_\varepsilon\in\Omega_n$ при $n\geqslant n_0$ и

$$\limsup_{n\to\infty}[f_n(p_nx^\varepsilon)-f(x^\varepsilon)]\leqslant 0;$$

г$_1$) для любых $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ существуют последовательности ε-экстремальных элементов $\{x_n^\varepsilon\}$ и операторов r_n, $r_n:X_n\to X$ таких, что $r_nx_n^\varepsilon\in\Omega$ при $n\geqslant n_0$ и

$$\limsup_{n\to\infty}[f(r_nx_n^\varepsilon)-f_n(x_n^\varepsilon)]\leqslant 0.$$

Замечание 1. Если задача (1.1) разрешима, то x^ε в условии в$_1$) можно заменить на экстремальный элемент $\hat{x}$. В этом случае в$_1$), г$_1$) переходят в условия согласованности дискретизации Даниэля (см. определение 2.2 в [2]). В качестве простого следствия из теоремы 1 можно получить также (достаточные) условия устойчивости Эссера (см. теорему 2.1 в [1]). Но хотя условия Даниэля и Эссера сами по себе являются весьма общими, все же в некоторых постановках задач математического программирования они обременительны или труднопроверяемы. Поэтому для дальнейших приложений нам понадобятся также условия в несколько иной форме.

Теорема 2. *Пусть последовательность* $\{X_n\}$ *образует дискретную аппроксимацию пространства* X, *функционал* f *непрерывен и выполнены следующие условия*:

1) *для любых* $x\in\Omega'$, *где* Ω' *плотно в* Ω, $p_nx\in\Omega_n$ *при* $n\geqslant n_0$;

2) *пара* f, $\{f_n\}$ *дискретно полунепрерывна сверху на* Ω':

3) *для любых* $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ *существует дискретно* (*слабо*) *компактная последовательность* (см. [11]) ε-*экстремальных элементов* $\{x_n^\varepsilon\}$, $n=1$, $2,\ldots$, *для которой дискретно* (*слабо*) *предельные точки принадлежат* Ω;

4) *пара* f, $\{f_n\}$ *дискретно* (*слабо*) *полунепрерывна снизу*.

Тогда: а$_2$) *верно* (1.3); б$_2$) *все дискретно* (*слабо*) *предельные точки* $\hat{x}^\varepsilon$ *последовательности* $\{x_n^\varepsilon\}$ *в условии* 3) *принадлежат* M^ε; в$_2$) *если*

$\{r_n\}$ — *семейство* (*слабых*) *операторов восполнения, то*

(3.1) $$(r_{n_k} x^{\varepsilon}_{n_k} \rightharpoonup \hat{x}^{\varepsilon} \in M^{\varepsilon}) \lim_{n\to\infty} [\inf \{\|r_n x_n{}^{\varepsilon} - x^{\varepsilon}\| : x^{\varepsilon} \in M^{\varepsilon}\}] = 0.$$

Доказательство. Зададим некоторое $\varepsilon > 0$. Так как $\Omega \neq \phi$ и f ограничен снизу, то найдется элемент $\bar{x} \in \Omega$ такой, что $f(\bar{x}) \leqslant F + \varepsilon/2$. Из условия 1) следует существование $x^{\varepsilon} \in \Omega'$, для которого $|f(\bar{x}) - f(x^{\varepsilon})| < \varepsilon/2$. Тогда $x^{\varepsilon} \in M^{\varepsilon} \cap \Omega'$, а поскольку $p_n x^{\varepsilon} \in \Omega_n$, $p_n x^{\varepsilon} \to x^{\varepsilon}$ и выполнено 2), то это влечет справедливость условия a_1) и, следовательно,

$$\limsup_{n\to\infty} (F_n - F) \leqslant 0.$$

Поэтому для доказательства a_2) достаточно убедиться, что

$$\limsup_{n\to\infty} (F - F_n) \leqslant 0.$$

Если предположить противное, то, выделяя согласно условию 3) дискретно (слабо) компактную последовательность $(x^{\varepsilon}_{n_k} \dashrightarrow \hat{x}^{\varepsilon} \in \Omega)\, x^{\varepsilon}_{n_k} \rightharpoonup \hat{x}^{\varepsilon} \in \Omega$, на основании 4) будем иметь

$$\limsup_{k\to\infty} (F - F_{n_k}) \leqslant \limsup_{k\to\infty} [f(\hat{x}^{\varepsilon}) - f_{n_k}(x^{\varepsilon}_{n_k})] + \varepsilon \leqslant \varepsilon$$

для любого ε, что невозможно. Предельный элемент $\hat{x}^{\varepsilon} \in M^{\varepsilon}$, поскольку

(3.2) $$f(\hat{x}^{\varepsilon}) \leqslant \liminf_{k\to\infty} f_{n_k}(x^{\varepsilon}_{n_k}) \leqslant \liminf_{k\to\infty} F_{n_k} + \varepsilon \leqslant F + \varepsilon.$$

Наконец, первая часть (3.1) следует из определения 6, а вторая легко устанавливается от противного.

Следствие 2. Если дискретно (слабо) компактна последовательность $\{x_n^{\varepsilon(n)}\}$ $n = 1, 2, \ldots$, где $\lim_{n\to\infty} \varepsilon(n) = 0$, то ее дискретно (слабо) предельные точки $\hat{x}$ решают задачу (1.1) и вместо (3.1) будет выполнено

$$(r_{n_k} x^{\varepsilon(n_k)}_{n_k} \rightharpoonup \hat{x} \in M) \lim_{n\to\infty} [\inf \{\|r_n x_n^{\varepsilon(n)} - \hat{x}\| : \hat{x} \in M\}] = 0.$$

Замечание 2. Если условия 1), 2) в теореме 2 заменить на $в_1$), то требование непрерывности f излишне. Отметим также, что для задачи (1.1) на безусловный экстремум, когда $\Omega = X$, $\Omega_n = X_n$ — банаховы пространства, соотношение $p_n x \in \Omega_n$ в условии 1) и $\hat{x}^{\varepsilon} \in \Omega$ в условии 3) выполняются автоматически.

Для задачи на безусловный экстремум ($\Omega = X$, $\Omega = X_n$) сформулируем аналог теоремы 2 об устойчивой дискретизации в несколько иной форме.

Теорема 3. *Пусть* $\{X_n\}$ (или $\{X_n{}^*\}$) *образует дискретную аппроксимацию сепарабельного рефлексивного пространства* X (*или* X^*) *со свойством согласованности* (2.1), *выполнены условие* 4) *теоремы* 2 *и условие* $в_1$). *Кроме того, для последовательности* f_n *справедливо соотношение*

(3.3) $$x_n \in \Omega_n, \qquad \limsup_{n\to\infty} f_n(x_n) \infty \Rightarrow \limsup_{n\to\infty} \|x_n\| < \infty.$$

Тогда последовательности $\{x_n{}^{\varepsilon}\}$ (ε *фиксировано*) *и* $\{x_n^{\varepsilon(n)}\}$, $n = 1, 2, \ldots$ $\ldots$, *где* $\varepsilon(n) \to 0$, *дискретно слабо компактны и, следовательно, справедливы заключения теоремы* 2 *и следствия* 2 (*в части слабых свойств*).

Доказательство. Пусть $\{x_n{}^{\varepsilon}\}$ — последовательность ε-экстремальных элементов задач (1.2); тогда, в силу свойства в$_1$), имеем

$$\limsup_{n\to\infty} f(x_n^\varepsilon) \leqslant \limsup_{n\to\infty} F_n + \varepsilon \leqslant F + \varepsilon,$$

откуда ввиду соотношения (3.3) следует ограниченность (равномерная по n). Поскольку X сепарабельно и рефлексивно, то, согласно [10], ограниченное множество дискретно слабо компактно. Ссылка на **замечание 2** и теорему 2 завершает доказательство.

Замечание 3. Свойство функционалов f_n, определяемое соотношением (3.3), эквивалентно условию равномерного роста аппроксимации для f (см. [2, определение 3.2]). Но в принятой нами форме это свойство можно использовать и в задачах на условный экстремум. Например, для рефлексивного сепарабельного пространства и согласованных дискретных аппроксимаций вместо условия 3) в теореме 2 достаточно потребовать выполнения соотношения (3.3).

В приложениях (см. § 5) нам понадобится теорема об устойчивой аппроксимации для функционалов специального вида.

Теорема 3′. *Пусть X_n (или $\{X_n^*\}$) образует дискретную аппроксимацию сепарабельного рефлексивного пространства X (или X^*) со свойством согласованности (2.1), причем пространства X (или X_n) обладают свойством*

$$x_n \dashrightarrow x, \quad \lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\| \Rightarrow x_n \to x. \tag{3.4}$$

Пусть целевые функционалы в задачах (1.1) *и* (1.2) *при* $\Omega = X$, $\Omega_n = X_n$ *имеют вид*

$$f(x) = \varphi(x) + \alpha\|x\|^p, \quad f_n(x_n) = \varphi_n(x_n) + \alpha\|x_n\|^p, \quad \alpha > 0, \quad p \geqslant 1, \tag{3.5}$$

где пара φ, $\{\varphi_n\}$ *ограничена снизу (равномерно по* n) *и удовлетворяет условиям* 2) *и* 4) *теоремы* 2.

Тогда задача (1.1) *разрешима (т. е.* $M \neq \emptyset$), *верно* (1.3) *и*

$$\lim \sup_{x_n^\varepsilon \in M_n^\varepsilon} \inf_{\hat{x} \in M} \| r_n x_n^\varepsilon - \hat{x} \| = 0, \tag{3.6}$$

где $\varepsilon = \varepsilon(n) \to 0$, r_n — *семейство операторов восполнения.*

Доказательство. Так как пара $\psi(x) = \|x\|^p$, $\{\psi(x_n) = \|x_n\|^p\}$ дискретно полунепрерывна сверху и слабо полунепрерывна снизу, то, ввиду определения 4 и [9, с. 57], эти свойства будут выполнены для пары f, $\{f_n\}$. Поскольку $X_n = \Omega_n \ni p_n x \to x$ для любых $x \in X$, то это влечет выполнение условия в$_1$). Так как $\inf_n \varphi_n(x_n) > -\infty$ и $\alpha > 0$, то

$$\limsup_{n\to\infty} [\varphi_n(x_n) + \alpha\|x_n\|^p] \leqslant K < \infty \Rightarrow \|x_n\|^p \leqslant \frac{K - \inf \varphi_n(x_n)}{\alpha},$$

т. е. выполнено соотношение (3.3). Таким образом выполнены предпосылки теоремы 3, поэтому верно (1.3) и последовательность $\{x_n^\varepsilon\}$, где $\varepsilon = \varepsilon(n) \to 0$, $n = 1, 2, \ldots$, дискретно слабо компактна, причем если $x_{n_k}^{\varepsilon_k} \dashrightarrow \hat{x}$, то $\hat{x} \in M$.

Предположим, что (3.6) неверно, тогда для некоторого $\varepsilon > 0$ найдется n_k такое, что $r_{n_k} x_{n_k}^{\varepsilon_k} \notin O_\varepsilon(M)$, где $O_\varepsilon(M)$ есть ε-окрестность множества M, $\varepsilon_k = \varepsilon(n_k)$. В силу доказанного выше, не теряя в общности, можно считать, что

$$x^{\varepsilon_k}_{n_k} \dashrightarrow \hat{x}, \qquad \lim_{n\to\infty} \|x^{\varepsilon_k}_{n_k}\|^p = \lambda, \qquad \lim_{n\to\infty} \varphi_{n_k}(x^{\varepsilon_k}_{n_k}) = \mu,$$

где $\hat{x}\in M$, $\alpha\lambda+\mu=F$. Из дискретной слабой полунепрерывности снизу пар ψ, $\{\psi_n\}$ и φ, $\{\varphi_n\}$ вытекает равенство $\lambda=\|\hat{x}\|^p$. С учетом полученных соотношений и (3.4) имеем $x^{\varepsilon_k}_{n_k} \to x$, а потому

$$\lim_{k\to\infty} \|r_{n_k} x^{\varepsilon_k}_{n_k} - \hat{x}\| = 0, \quad \text{где} \quad \hat{x}\in M,$$

что противоречит предположению.

§ 4. Устойчивая дискретизация задач математического программирования

С помощью результатов § 3 исследуем условия устойчивой дискретной аппроксимации бесконечномерных задач математического программирования общего вида

$$(4.1) \qquad \inf\{f^0(x): x\in S,\ f^i(x)\leqslant\alpha_i,\ i=1, 2, \ldots\} = F,$$

где S — непустое подмножество (бесконечномерного) пространства X, индекс i пробегает не более чем счетное множество ω (не исключается случай пустого ω, т. е. отсутствуют ограничения в виде неравенств).

Сопоставим задаче (4.1) последовательность конечномерных задач

$$(4.2) \qquad \inf\{f_n^0(x): x\in S_n,\ f_n^i(x)\leqslant\alpha_i,\ i=1, 2, \ldots, m\} = F_{mn},$$

где S_n — непустое подмножество конечномерного пространства X_n, т. е. одновременно проводится аппроксимация по пространству и числу ограничений (заменой счетного числа на конечное).

Предположим, что исходные данные дискретизированной задачи (4.2) известны с погрешностью, которая характеризуется параметром ν, т. е. вместо $\{f_n^i\}$, $\{\alpha_i\}$ нам известны $\{f_n^{i\nu}\}$, $\{\alpha_i^\nu\}$, удовлетворяющие условиям аппроксимации

$$(4.3) \qquad \lim_{\nu\to\infty} \sup_{n,\,i} \sup_{\{x_n\}\subset Q} |f_n^{i\nu}(x_n) - f_n^i(x_n)| = 0$$

для любого ограниченного множества $Q\subseteq \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ и

$$(4.4) \qquad \lim_{\nu\to\infty} \sup_i |\alpha_i^\nu - \alpha_i| = 0.$$

Таким образом, в окончательной постановке последовательность аппроксимирующих дискретных задач принимает вид

$$(4.5) \qquad \inf\{f_n^{0\nu}(x): x\in S_n,\ f_n^{i\nu}(x)\leqslant\alpha_i^n,\ i=1, 2, \ldots, m\} = F(m, n, \nu).$$

Поскольку в дальнейшем исследуются условия устойчивой аппроксимации задачи (4.1) задачами (4.5) при независимом стремлении параметров $m, n, \nu\to\infty$, то, выбирая некоторую связь $m(n)$, $\nu(n)$, $n\to\infty$, можно привести задачу (4.5) к форме (1.2) (от одного параметра n). Введем следующие обозначения:

$$R = \{x: x\in X,\ f^i(x)\leqslant\alpha_i,\ i=1, 2, \ldots\},$$

$$R(m, n, \nu) = \{x: x\in X_n,\ f_n^{i\nu}(x)\leqslant\alpha_i^\nu,\ i=1, 2, \ldots, m\},$$

$$R^0=\{x: x\in X,\quad \sup_i\{f^i(x)-\alpha_i\}<0\},\quad i=1,2,\dots.$$

Тогда допустимые множества в задачах (4.1) и (4.5) запишутся в виде $\Omega=R\cap S$, $\Omega(m,n,\nu)=R(m,n,\nu)\cap S_n$.

Определение 7. Семейство пар $\{f^i, \{f_n^i\}, i=1, 2,\dots\}$ назовем равностепенно дискретно полунепрерывным сверху на D, если выполнено соотношение

$$x_n\to x\in D\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sup\sup_i[f_n^i(x_n)-f^i(x)]\leqslant 0.$$

Теорема 4. *Пусть последовательность пространств $\{X_n\}$ (или $\{X_n^*\}$) образует дискретную аппроксимацию сепарабельного рефлексивного пространства X (или X^*) со свойством согласованности* (2.1) *и выполнены условия:*

1) *замыкание по норме $\overline{R^0\cap\operatorname{int}S}\supseteq R\cap S\neq\phi$, S — слабо замкнутое множество;*

2) $p_n(\operatorname{int}S)\subseteq S_n$, $r_nS_n\subseteq S$ *при* $n\geqslant n_0$, *где* $\{r_n\}$ — *последовательность слабых операторов восполнения;*

3) f^0 *непрерывен,* f^0, f_n^0 *для любого* n — *ограниченные снизу функционалы на допустимых множествах* Ω *и* $\Omega(m,n,\nu)$ *соответственно;*

4) *имеют место условия аппроксимации* (4.3), (4.4);

5) *при* $x(m,n,\nu)\in\Omega(m,n,\nu)$ *справедливо соотношение*

$$\lim_{m,n,\nu\to\infty}\sup f_n^0[x(m,n,\nu)]<\infty\Rightarrow\lim_{m,n,\nu\to\infty}\sup\|x(m,n,\nu)\|<\infty;$$

6) *семейство пар* $\{f^i, \{f_n^i\}; i=0, 1,\dots\}$ *равностепенно дискретно полунепрерывно сверху на* $\Omega'=R^0\cap\operatorname{int}S$;

7) *для любого* i *пара* f^i, $\{f_n^i\}$ *дискретно слабо полунепрерывна снизу,* $i=0, 1,\dots$.

Тогда: а$_4$) $\lim_{m,n,\nu\to\infty}F(m,n,\nu)=F$ *при независимом стремлении параметров* m, n, ν *к* ∞; б$_4$) *каждая последовательность* ε-*экстремальных элементов* $\{x^\varepsilon(m,n,\nu)\}$ *задач* (4.5) *содержит подпоследовательность* $x^\varepsilon(m_k,n_k,\nu_k)\rightharpoonup x^\varepsilon\in M^\varepsilon$ *и* $r_{n_k}x^\varepsilon(m_k,n_k,\nu_k)\rightharpoonup x^\varepsilon$; в$_4$) *каждая* $\{x^\varepsilon(m,n,\nu)\}$, *где* $\varepsilon=\varepsilon(m,n,\nu)\to 0$, *содержит подпоследовательность*

$$x^{\varepsilon_k}(m_k,n_k,\nu_k)\rightharpoonup\hat{x}\in M\ \text{и}\ r_{n_k}x^{\varepsilon_k}(m_k,n_k,\nu_k)\rightharpoonup\hat{x}.$$

Доказательство. Покажем, что выполнены предпосылки теоремы 2 и следствия к ней. По условию 1) теоремы 4, множество $\Omega'=R^0\cap\operatorname{int}S$ плотно в $\Omega=R\cap S$, поэтому, чтобы удовлетворить условию 1) теоремы 2, достаточно установить $p_nx\in\Omega(m,n,\nu)$ для любого $x\in\Omega'$ при достаточно больших m, n, ν. Итак, пусть $\bar{x}\in\Omega'$, тогда

$$\sup_i\{f^i(\bar{x})-\alpha_i\}<0,\qquad i=1,2,\dots. \tag{4.6}$$

Принимая во внимание условия 4) и 6) теоремы 4, неравенство (4.6) и тот факт, что $p_n\bar{x}\to\bar{x}$, имеем

$$\sup_i[f_n^{i\nu}(p_n\bar{x})-\alpha_i^\nu]\leqslant\sup_i[f^i(\bar{x})-\alpha_i]+$$

$$+\sup_i[f_n^i(p_n\bar{x})-\alpha_i]-\sup_i[f^i(\bar{x})-\alpha_i]+$$

$$+|\sup_i[f_n^{i\nu}(p_n\bar{x})-\alpha_i^n]-\sup_i[f_i^n(p_n\bar{x})-\alpha_i]|<$$
$$<\sup_i[f_n^i(p_nx)-f^i(\bar{x})]+\sup_{i,n}|f_n^{i\nu}(p_nx)-f_n^i(p_n\bar{x})|+$$
$$+\sup_i|\alpha_i^n-\alpha_i|,$$

откуда $p_n\bar{x}\in R(m, n, \nu)$ при $n\geqslant n_0$, $\nu\geqslant\nu_0$ и произвольном m. Так как $\bar{x}\in\operatorname{int} S$ и, по условию 2) теоремы 4, $p_n(\operatorname{int} S)\subseteq S_n$, то $p_n\bar{x}\in\Omega(m, n, \nu)$ при $n\geqslant n_0$, $\nu\geqslant\nu_0$.

Пусть $x_n\to x\in\Omega'$, $x_n\in\Omega(m, n, \nu)$, тогда, учитывая, что $\{x_n\}$ ограничена, из условий 4) и 6) теоремы 4 получаем

$$\lim_{n,\nu\to\infty}\sup[f_n^{0\nu}(x_n)-f^0(x)]\leqslant\lim_{\nu\to\infty}[\sup_n|f_n^{0\nu}(x_n)-$$
$$-f_n^0(x_n)|]+\lim_{n\to\infty}\sup[f_n^0(x_n)-f^0(x)]\leqslant 0.$$

Таким образом, выполнены условия 1) и 2) теоремы 2 при $f=f^0$, $f_n=f_n^{0\nu}$, $\Omega=\Omega(m, n, \nu)$.

Объединяя теперь доказанные выше факты и условия 4), 6) теоремы 4, для последовательности ε-экстремальных элементов $\{x^\varepsilon(m, n, \nu)\}$ будем иметь

$$\text{(4.7)}\qquad \lim_{m,n,\nu\to\infty}\sup f_n^0(x^\varepsilon(m,n,\nu))\leqslant\lim_{m,n,\nu\to\infty}\sup[F(m,n,\nu)+\varepsilon]\leqslant$$
$$\leqslant\lim_{m,n,\nu\to\infty}\sup f_n^{0\nu}(p_nx^{\varepsilon_1})+\varepsilon\leqslant\lim_{\nu\to\infty}\sup_n[f_n^{0\nu}(p_nx^{\varepsilon_1})-f_n^0(p_nx^{\varepsilon_1})]+$$
$$+\lim_{n\to\infty}\sup[f_n^0(p_nx^{\varepsilon_1})-f^0(x^{\varepsilon_1})]+f^0(x^{\varepsilon_1})+\varepsilon\leqslant F+\varepsilon+\varepsilon_1.$$

В силу условия 5) теоремы 4, отсюда следует ограниченность последовательности

$$\{x^\varepsilon(m,n,\nu)\}\subseteq\prod_{n=1}^{\infty}X_n$$

и, следовательно (см. [10]), дискретная слабая компактность.

Не теряя в общности, можно полагать, что

$$\text{(4.8)}\qquad x^\varepsilon(m, n, \nu)\rightharpoonup\bar{x}.$$

Убедимся, что $\bar{x}\in\Omega$. Сначала покажем, что $\bar{x}\in R$. Предположим противное: $\bar{x}\bar{\in} R$; тогда $f^k(\bar{x})>\alpha_k$ для некоторого $i=k$. На основании условия 7) теоремы 4, имеем неравенства

$$\alpha_k<f^k(\bar{x})\leqslant\lim_{m,n,\nu\to\infty}\inf f_n^k(x^\varepsilon(m,n,\nu))\leqslant$$
$$\leqslant\lim_{m,n,\nu\to\infty}\inf f_n^{k\nu}(x^\varepsilon(m,n,\nu))+\lim_{\nu\to\infty}\sup_{m,n}|f_n^k(x^\varepsilon(m,n,\nu))-$$
$$-f_n^{k\nu}(x^\varepsilon(m,n,\nu))|,$$

из которых, ввиду (4.3), будет следовать неравенство $\alpha_k^\nu<f_n^{k\nu}(x^\varepsilon(m, n, \nu))$. Но, с другой стороны, по определению $x^\varepsilon(m, n, \nu)\in\Omega(m, n, \nu)$, поэтому при $m\geqslant k$ будет выполнено противоположное неравенство. Тем самым доказано, что $\bar{x}\in R$. Согласно условиям 1) и 2) теоремы 4, $r_nx^\varepsilon(m, n, \nu)\in S$ и $r_nx^\varepsilon(m, n, \nu)\rightharpoonup\bar{x}$ при $n\geqslant n_0$, т. е. слабо сходится в X; поскольку S слабо

замкнуто, то $\bar{x}\in S$. Итак, $\bar{x}\in R\cap S=\Omega$ и, следовательно, выполнено условие 3) теоремы 2.

Наконец, согласно условиям 3), 7) теоремы 4 и соотношению (4.8), из неравенств

$$\limsup_{m,n,\nu\to\infty}[f^0(\bar{x})-f_n^{0\nu}(x^\varepsilon(m,n,\nu))]\leqslant\limsup_{m,n,\nu\to\infty}[f^0(\bar{x})-f_n^0(x^\varepsilon(m,n,\nu))]+$$

$$+\limsup_{\nu\to\infty}\sup_{m,n}|f_n^0(x^\varepsilon(m,n,\nu))-f_n^{0\nu}(x^\varepsilon(m,n,\nu))|\leqslant 0$$

следует условие 4) теоремы 2. Тогда из теоремы 2 вытекает справедливость а$_4$), б$_4$). Поскольку в соотношении (4.7) можно перейти к пределу при $\varepsilon=\varepsilon(m, n, \nu)\to 0$, то из следствия 2 получаем в$_4$).

Следствие 3. Пусть наряду с условиями теоремы пространства X, $\{X_n\}$ обладают свойством (3.4), целевые функционалы f^0, f_n^0 имеют вид (3.5), тогда справедливо заключение теоремы 3′.

Замечания. 4. При $S=X$ условие $\overline{R^0\cap\operatorname{int}S}=R\cap S\neq\phi$ эквивалентно $\overline{R^0}\supseteq R\neq\phi$. Оно будет выполнено, если $R^0\neq\phi$ и f_i для любых i — выпуклые функционалы. В случае когда множество R определяется конечным числом ограничений (т. е. отсутствует аппроксимация по параметру m), это верно и для строго квазивыпуклых функционалов. При $R=X$ в условиях 1) и 2) теоремы 4 соотношения $\overline{\operatorname{int}S}\supseteq S$, $p_n(\operatorname{int}S)\subseteq S_n$ можно заменить на $p_nS\subseteq S_n$.

5. Если функционалы f_n^0 не удовлетворяют условию 5) теоремы 4, то в предположении, что

$$\liminf_{m,n,\nu\to\infty}F(m,n,\nu)>-\infty$$

и что выполнены все остальные условия этой теоремы, можно перейти к регуляризованным функционалам (см. [12])

$$f^{0\alpha}(x)=f^0(x)+\alpha\|x\|^p,\qquad f_n^{0\alpha}(x_n)=f_n^{0\alpha}(x_n)+\alpha\|x_n\|^p,\quad p\geqslant 1,$$

для которых условие 5) будет выполнено. Обозначим через F^α и $F^\alpha(m, n, \nu)$ оптимальные значения в задачах (4.1) и (4.5) при $f^0=f^{0\alpha}$ и $f_n^0=f_n^{0\alpha}$ соответственно. Поскольку регуляризацию можно рассматривать как частный случай дискретизации (см. [2]), то $\lim_{\alpha\to 0}F^\alpha=F$. Поэтому в итоге будем иметь соотношение

$$\lim_{\alpha\to 0}\lim_{m,n,\nu\to\infty}F^\alpha(m,n,\nu)=F.$$

6. При $X=X_n$, $p_n=r_n=I$, $S=S_n=X$, $\omega=\{1, 2,\ldots, k\}$, $f^i=f_n^i=f_n^{i\nu}$, $i=1, 2,\ldots, k$, из теоремы 4 следует основной результат работы [7] (теорема 5) об устойчивости оптимального значения по $\{\alpha_i\}_1^k$ (см. также [8]).

Пример. Рассмотрим дискретизацию задачи математического программирования квадратурными методами, взяв в качестве исходных функционалов интегральные:

$$f^i(x)=\int_a^b a_i(t)x(t)\,dt,\qquad f^0(x)=\int_a^b a_0(t)|x(t)|^p\,dt,$$

где $p>1$, $X=L_p[a, b]$, $\{a_i(t),\ i=0, 1,\ldots\}$ — равномерно ограниченное и равностепенно непрерывное семейство функций, заданных на $[a, b]$, причем $a_0(t)>0$.

За пространства X_n примем n-мерные пространства l_p^n с нормой для элемента $x_n=(x_{n1},\dots,x_{nn})$

$$\|x_n\|=\left(\sum_{i=1}^n h_i^n|x_{ni}|^p\right)^{1/p},$$

где $h_i^n=t_i^n-t_{i-1}^n$, $\{t_i^n\}_0^n$ — разбиение отрезка $[a, b]$ такое, что

$$\lim_{n\to\infty}\max_{1\leqslant i\leqslant n} h_i^n=0.$$

Далее для простоты записи будем опускать зависимость от n в t_i^n и h_i^n. Дискретную аппроксимацию пространства $X=L_p[a, b]$ определим с помощью семейства линейных связывающих операторов

$$p_n{:}x(t)\to\left(h_1^{-1}\int_{t_0}^{t_1}x(t)\,dt,\dots,h_n^{-1}\int_{t_{n-1}}^{t_n}x(t)\,dt\right),$$

где $\|p_n\|\leqslant 1$ (см. [13, с. 14]). Аналогично определяется дискретная аппроксимация $X^*=L_q[a, b]$ пространствами $X_n^*=l_q^n$. Операторы r_n зададим как отображения, которые элементу $x_n=(x_{n1},\dots,x_{nn})$ ставят в соответствие кусочно-постоянную функцию, принимающую в точках t_i, $i=1, 2,\dots, n$, значения x_{ni}. Аппроксимирующие операторы определим в виде

$$f_n^i(x_n)=\sum_{i=1}^n h_i a_i(t)x_{ni}.$$

Лемма 1. *Дискретная аппроксимация, определенная выше, удовлетворяет условию согласованности* (2.1).

Доказательство. Пусть сначала $x(t)$, $y(t)$ — непрерывные функции и $x_n\to x$, $y_n\to y$. Покажем, что

$$\lim_{n\to\infty}\left|\sum_{i=1}^n h_i x_{ni}y_{ni}-\int_a^b x(t)y(t)\,dt\right|=0. \tag{4.9}$$

Имеем следующую цепочку неравенств:

$$\left|\sum_{i=1}^n h_i x_{ni}y_{ni}-\int_a^b x(t)y(t)\,dt\right|\leqslant\left|\sum_{i=1}^n h_i y_{ni}[x_{ni}-x(t_i)]\right|+$$

$$+\left|\sum_{i=1}^n h_i x(t_i)[y_{ni}-y(t_i)]\right|+\left|\sum_{i=1}^n h_i x(t_i)y(t_i)-\int_a^b x(t)y(t)\,dt\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left(\sum_{i=1}^n h_i|y_{ni}|^q\right)^{1/q}\left[\sum_{i=1}^n h_i|x_{ni}-x(t_i)|^p\right]^{1/p}+$$

$$+\left[\sum_{i=1}^n h_i|x(t_i)|^p\right]^{1/p}\left[\sum_{i=1}^n h_i|y_{ni}-y(t_i)|^q\right]^{1/q}+R_n.$$

Первые два слагаемых убывают к нулю в силу дискретной сходимости $x_n\to x$, $y_n\to y$ (см. [13, с. 11]), а $\lim_{n\to\infty}R_n=0$, как остаток сходящейся квадратурной формулы (правых прямоугольников) для непрерывной функции $\varphi(t)=x(t)y(t)$.

Таким образом, последовательность линейных равномерно ограниченных (поскольку $\|y_n\|\to\|y\|$) функционалов y_n дискретно сходится к y для любой непрерывной функции $x(t)$, т. е. на всюду плотном множестве $\Phi\subset L_p[a, b]$. Согласно известному признаку (см., например, [11, с. 18—19]), соотношение (4.8) будет выполнено для любой $x(t)\in L_p[a, b]$. Так как $l_p{}^n$, L_p рефлексивны, то x_n можно рассматривать как функционалы, сходящиеся для любой непрерывной функции $y(t)$. Воспользовавшись снова тем же критерием, убеждаемся в справедливости (4.9) для любой функции $y(t)\in L_q[a, b]$.

Лемма 2. *$\{r_n\}$ образует последовательность слабых связывающих операторов.*

Доказательство. Пусть $x_n \dashrightarrow x$, что означает

$$\lim_{n\to\infty}\left|\sum_{i=1}^{n} h_i x_{ni} v_{ni} - \int_a^b x(t)v(t)\,dt\right| = 0 \tag{4.10}$$

для любой последовательности $v_n\to v\in L_q$. Требуется установить, что

$$\lim_{n\to\infty}\left|\int_a^b \hat{x}_n(t)v(t)\,dt - \int_a^b x(t)v(t)\,dt\right| = 0$$

для любой непрерывной функции $v(t)$ (согласно критерию слабой сходимости), где $\hat{x}_n(t)=r_n x_n$ — кусочно-постоянное восполнение. Обозначив через $\hat{v}_n(t)$ кусочно-постоянную функцию с $\hat{v}_n(t_i)=v(t_i)$, получаем

$$\left|\int_a^b \hat{x}_n(t)v(t)\,dt - \int_a^b x(t)v(t)\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int_a^b \hat{x}_n(t)v(t)\,dt - \int_a^b \hat{x}_n(t)\hat{v}_n(t)\,dt\right| + \left|\int_a^b \hat{x}_n(t)\hat{v}_n(t)\,dt - \int_a^b x(t)v(t)\,dt\right|.$$

Вследствие соотношения (4.10) второе слагаемое стремится к нулю при $n\to\infty$. Для первого слагаемого, которое обозначим через Δ, имеем

$$\Delta \leqslant \sum_{i=1}^{n}\left|\int_{t_{i-1}}^{t_i} x_{ni}[v(t)-v(t_i)]\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n}\left(\int_{t_{i-1}}^{t_i}|x_{ni}|^p\right)^{1/p}\left(\int_{t_{i-1}}^{t_i}\varepsilon_n{}^p\,dt\right)^{1/q} = \varepsilon_n{}^q\sum_{i=1}^{n} h_i|x_{ni}|^p,$$

где, ввиду непрерывности $v(t)$,

$$\lim \varepsilon_n = \lim_{n\to\infty}\sup\{|v(t_1)-v(t_2)| : |t_1-t_2| \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} h_i\} = 0,$$

а первый множитель ограничен (равномерно по n) из-за слабой сходимости $\{x_n\}$ (см. [6, с. 57]).

Лемма 3. *Семейство пар $\{f^i, \{f_n{}^i\}, i=1, 2, \ldots\}$ равностепенно дискретно полунепрерывно сверху, и для любого $i=1, 2, \ldots$ пара f^i, $\{f_n{}^i\}$ дискретно полунепрерывна снизу на $L_p[a, b]$.*

Доказательство. Так как

$$\sup\{\|f_n{}^i\|, \|f^i\|\} \leqslant K,$$

то (см. [11]) для доказательства первой части достаточно установить соотношение

$$x_n\to x \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sup_i |f_n^i(x_n)-f^i(x)|=0$$

для любой непрерывной функции $x(t)$. Имеем

$$\sup\left|\sum_{j=1}^{n} h_j a_i(t_j)x_{nj}-\int_a^b a_i(t)x(t)\,dt\right|\leqslant$$

$$\leqslant \sup_i \sum_{j=1}^{n} h_j|a_i(t_j)||x_{nj}-x(t_j)|+\sup_i\left|\sum_{j=1}^{n} h_j a_i(t_j)x(t_j)-\right.$$

$$\left.-\int_a^b a_i(t)x(t)\,dt\right|\leqslant \sup_i\left[\sum_{j=1}^{n} h_j|a_i(t_j)|^p\right]^{1/p}\left[\sum_{j=1}^{n} h_j|x_{nj}-x(t_j)|^p\right]^{1/p}+R_n.$$

Оба слагаемых стремятся к нулю (при $n\to\infty$), первое — в силу ограниченности семейства $\{a_i(t)\}$ и дискретной сходимости $x_n\to x$, второе — как остаток сходящейся квадратурной формулы для относительно компактного (в $C[a, b]$) семейства функций $\{a_i(t)x(t)\}$.

Пусть теперь $x_n \dashrightarrow x$, тогда, по лемме 2, $\hat{x}_n=r_nx_n\rightharpoonup x$ в $L_p[a, b]$. Обозначим $a_i^n(t)=r_np_na_i(t)$. Принимая во внимание слабую непрерывность f^i и равномерную непрерывность $\{a_i(t)\}$, получаем для любых i

$$\lim_{n\to\infty}|f_n^i(x_n)-f^i(x)|=\lim_{n\to\infty}\left|\int_a^b a_i^n(t)\hat{x}_n(t)\,dt-\int_a^b a_i(t)x(t)\,dt\right|\leqslant$$

$$\leqslant\|\hat{x}_n\|\lim_{h\to\infty}\left[\int_a^b|a_i^n(t)-a_i(t)|^q dt\right]^{1/q}+\lim_{n\to\infty}\left|\int_a^b a_i(t)[\hat{x}_n(t)-x(t)]\,dt\right|=0.$$

Без труда проверяется, что функционал f^0 непрерывен, пара f^0, $\{f_n^0\}$ дискретно (слабо) полунепрерывна сверху (или снизу), выполнено соотношение (3.3). Предположив, что $R^0\neq\varnothing$, и для простоты приняв $S=X$, $S_n=X_n$, мы тем самым удовлетворяем всем условиям теоремы 4. Если в задаче (4.1) множество $R=X$, то можно взять $S=\{x\in L_p : \|x\|\leqslant r\}$, а в качестве аппроксимирующего $S_n=\{x_n\in l_p^n : \|x_n\|\leqslant r\}$.

Заметим также, что для пары L_p, $\{l_p^n\}$ (ввиду неравенства Кларксона) будет выполнено соотношение (3.4).

§ 5. Дискретизация регуляризующих алгоритмов

Рассмотрим нелинейное интегральное уравнение Урысона

$$Ax\equiv\int_a^b K(t,S,x(s))\,ds=f(t),\qquad c\leqslant t\leqslant d, \tag{5.1}$$

где $K(t, s, x)$ — непрерывная по совокупности переменных функция в области $\{c\leqslant t\leqslant d,\ a\leqslant s\leqslant b,\ -\infty<x<\infty\}$, оператор A действует из $X=W_2^1[a, b]$ в $Y=L_2[c, d]$. Метод регуляризации А. Н. Тихонова [12] редуцирует неустойчивую задачу (5.1) к экстремальной задаче

$$\inf\{\|Ax-f\|^2+\alpha\|x\|^2 : x\in S\}, \tag{5.2}$$

где S — слабо замкнутое множество, содержащее решение уравнения (5.1). Дискретизацию задачи (5.2) осуществим с помощью квадратурного метода. За связывающие операторы $p_n : X \to X_n$ (или $q_n : Y \to Y_m$) примем операторы сноса на сетку $\{s_j^n\}_0^n$ (или $\{t_i^m\}_1^m$) с обычными условиями, причем $X_n = w_2^{1,n}$ (или $Y_m = l_2^m$) — евклидовы пространства с нормой

$$\|x_n\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \mu_j \left(|x_{nj}|^2 + \left| \frac{x_{nj} - x_{n,j-1}}{h_j} \right|^2 \right)$$

$$\left(\text{или } \|y_m\|^2 = \sum_{i=1}^{m} \mu_i |y_{ni}|^2 \right),$$

где $\{\mu_j\}$ — коэффициенты формулы трапеций. За операторы $r_n : X_n \to X$ примем операторы кусочно-линейного восполнения.

Лемма 4. *$\{r_n\}$ образует семейство слабых операторов восполнения.*

Доказательство. Пусть $x_n \rightharpoonup x \in W_2^1$. Достаточно доказать, что $\lim_{n\to\infty}(r_n x_n, v) = (x, v)$ для любой непрерывно дифференцируемой функции $v(t)$. Обозначив $\bar{x}_n = r_n x_n$, $\bar{v}_n = r_n p_n v$, имеем неравенство $|(x, v) - (\bar{x}_n, v)| \leqslant |(x, v) - (\bar{x}_n, \bar{v}_n)| + |(\bar{x}_n, \bar{v}_n) - (\bar{x}_n, v)|$, где первое слагаемое стремится к нулю ввиду $x_n \rightharpoonup x$. Для оценки второго при заданном $\varepsilon > 0$ выберем $n \geqslant n_0$ такое, чтобы $|\bar{v}_n(t) - \dot{v}(t)| < \varepsilon$, $|[v(t_i^n) - v(t_{i-1}^n)]/h_i - v(t)| < \varepsilon$ при $t_{i-1}^n \leqslant t \leqslant t_i^n$; тогда при $\dot{v}(t) = dv/dt$

$$|(\bar{x}_n, \bar{v}_n) - (\bar{x}_n, v)| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} |\bar{x}_n| \, |\bar{v}_n(t) - v(t)| \, dt +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} |\dot{\bar{x}}_n| \, |\dot{\bar{v}}(t) - v(t)| \, dt \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \left\{ \sum_{i=1}^{n} \mu_i \left(|x_{ni}| + \left| \frac{x_{ni} - x_{n,i-1}}{h_i^n} \right| \right) \right\} \leqslant \sqrt{2} \left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i \right)^{1/2} \| x_n \| \, \varepsilon.$$

Аппроксимирующие операторы $A_{nm} : x_n \to y_m$ и аппроксимацию $f(t)$ определим по формулам

$$y_{mi} = \sum_{j=1}^{n} \mu_j K(t_i^m, s_j^n, x_{nj}), \qquad f_n = p_n f.$$

Лемма 5. *Для операторов $A_{nm} : X_n \to Y_m$, $A : X \to Y$ выполнено свойство $x_n \rightharpoonup x \Rightarrow A_{nm} x_n \to Ax$, $m, n \to \infty$.*

Доказательство. Достаточно установить, что

$$\lim_{m,n\to\infty} \sup_i \left| \sum_{j=1}^{n} \mu_j K(t_i^m, s_j^n, x_{nj}) - \int_a^b K(t_i^m, s, x(s)) \, ds \right| = 0. \tag{5.3}$$

Пусть $x(t) \in W_2^1[a, b]$, тогда $x(t) \in C[a, b]$ и $|x(t)| \leqslant c_1$. Множество функций $M = \{\varphi_t(s) : \varphi_t(s) = K(t, s, x(s)),\ c \leqslant t \leqslant d\}$ относительно компактно в

$C[a, b]$, поскольку оно равномерно ограничено:

$$|\varphi_t(s)| \leqslant \max_{t,s,x} \{|K(t,s,x)| : t,s,x \in \bar{D}_1 = (c \leqslant t \leqslant d, a \leqslant s \leqslant b, -c_1 \leqslant x \leqslant c_1)\},$$

и равностепенно непрерывно, что следует из непрерывности $K(t, s, x)$ на компакте $\bar{D}_1$. Поэтому

$$\lim_{m,n\to\infty} \left| \int_a^b K(t_i^m, s, x(s))\,ds - \sum_{j=1}^n \mu_j K(t_i^m, s_j^n, x(s_j^n)) \right| = 0. \tag{5.4}$$

По лемме 4, $\bar{x}_n = r_n x_n \to x$ в W_2^1, следовательно,

$$\begin{gathered} \lim_{n\to\infty} \max_j |x_{nj} - x(s_j^n)| \leqslant \lim_{n\to\infty} \max_s |\hat{x}_n(s) - x(s)| = 0, \\ \sup_j [|x_{nj}|, |x(s_j^n)|] \leqslant c_2. \end{gathered} \tag{5.5}$$

Тогда, учитывая равномерную непрерывность функции $K(t, s, u)$ на множестве $\{c \leqslant t \leqslant d, a \leqslant s \leqslant b, -c_2 \leqslant u \leqslant c_2\}$ и (5.5), получаем

$$\lim_{m,n\to\infty} \sup_{1\leqslant i\leqslant n} \left| \sum_{j=1} \mu_j K(t_i^m, s_j^n, x(s_j^n)) - \sum_{j=1}^n \mu_j K(t_i^m, s_j^n, x_{nj}) \right| \leqslant \tag{5.6}$$

$$\leqslant \lim_{m,n\to\infty} \left[\sup_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant n} |K(t_i^m, s_j^n, x(s_j^n)) - K(t_i^m, s_j^n, x_{nj})| \sum_{j=1}^n \mu_j \right] = 0.$$

Из (5.4) и (5.6) следует нужное соотношение (5.3).

Теперь, принимая во внимание леммы 4, 5 и свойство гильбертова пространства (см. [11, с. 28]), легко убедиться, что при $S = X$, $S_n = X_n$ выполнены условия теоремы 3′, а при $S = \{x(t) \in W_2^1[a, b] : x(t) \geqslant 0\}$, $S_n = \{x_n \in W^{12,n} : x_n \geqslant 0\}$ — условия теоремы 4 и следствия 3.

§ 6. Дискретизация задач вариационного исчисления

Рассмотрим простейшую задачу вариационного исчисления (см. [2], [3]): минимизировать

$$f(x) = \int_0^1 g(t, x, \dot{x})\,dt \quad \text{при} \quad x(0) = x(1) = 0, \tag{6.1}$$

где $\dot{x} = dt/dt$. Последовательность дискретных задач определим в таком виде (см. [3]): минимизировать

$$f_n(x_n) = \sum_{i=1}^n h_i^n g\left(t_{i-1}^n, x_{n,i-1}, \frac{x_{ni} - x_{n,i-1}}{h_i^n}\right)$$

на всех возможных векторах $x_n = (0, x_{n1}, \ldots, x_{n,n-1}, 0)$, где $h_i^n = t_i^n - t_{i-1}^n \to 0$ при $n \to \infty$. За пространство X примем подпространство из W_2^1 $[0, 1]$:

$$X = \{x(t) : x(0) = x(1) = 0, x(t) \in W_2^1\}, \qquad \|x\|^2 = \int_0^1 |\dot{x}(t)|^2\,dt.$$

Пространства X_n, операторы p_n и r_n определим аналогично § 5. Как и в [2], потребуем от функции $g(t, x, y)$ следующих свойств: 1) $g(t, x, y)$ непрерывна по совокупности переменных $\{0 \leqslant t \leqslant 1, -\infty \leqslant xy \leqslant \infty\}$; 2) существуют постоянные a и b такие, что $g(t, x, y)\geqslant a+b|y|^2$ для всех $t\in[0, 1]$ и конечного y; 3) $g(t,x,y_1)-g(t,x,y_2)\geqslant(y_1-y_2)g_y(t,x,y_2)$ для любых y_1, y_2; 4) существуют постоянные c и d и непрерывная функция $s(t, v)$ такие, что $|g(t_1, v_1, z)-g(t_2, v_2, z)|\leqslant(c+d|z|^2)|s(t_1, v_1)-s(t_2, v_2)|$ для любых t_1, $t_2\in[0, 1]$ и произвольных v_1, v_2.

Предполагается также [2], что существует по крайней мере одна экстремальная функция $\hat{x}(t)\in X$ с непрерывной производной. Кстати, заметим, что если функционал f в (6.1) непрерывен, то требование $\hat{x}\in C^1[0, 1]$ излишне (см. теорему 2).

Лемма 6. *Пара f, $\{f_n\}$ дискретно слабо полунепрерывна снизу.*

Доказательство. Пусть $x_n\dashrightarrow x$; тогда, по лемме 4, $\bar{x}_n=r_nx_n\rightharpoonup x$ в W_2^1. Поскольку функционал f со свойствами 1)–4) слабо полунепрерывен снизу (см. [2]), то

$$
(6.2)\qquad \limsup_{n\to\infty}[f(x)-f_n(x_n)]= = \limsup_{n\to\infty}\left[\int\limits_a^b g(t,x,\dot{x})\,dt-\int\limits_a^b g(t,\bar{x}_n,\dot{\bar{x}}_n)\,dt\right]\leqslant 0.
$$

Ввиду свойства 4) имеем

$$
(6.3)\qquad \limsup_{n\to\infty}[f(\bar{x}_n)-f_n(x_n)]\leqslant\limsup_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n\int\limits_{t_{i-1}^n}^{t_i^n}\left|g\left(t,\bar{x}_n,\frac{x_{ni}-x_{n,i-1}}{h_i^n}\right)-\right.
$$
$$
\left.-g\left(t_{i-1},x_{n,i-1},\frac{x_{ni}-x_{n,i-1}}{h_i^n}\right)\right|dt\leqslant
$$
$$
\leqslant\limsup_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n\int\limits_{t_{i-1}^n}^{t_i^n}\left[c+d\left(\frac{x_{ni}-x_{n,n-1}}{h_i^n}\right)^2\right]|s(t,\bar{x}_n)-
$$
$$
-s(t_{i-1},x_{n,i-1})|=0,
$$

поскольку $s(t, v)$ равномерно непрерывна, а $\{x_n\}$ равномерно ограничена. Из (6.2) и (6.3) следует заключение леммы.

Условие в$_1$) доказано в [2]. Все условия теоремы 3 непосредственно следуют из свойств 1)–3) функции g и свойств гильбертова пространства. Получаемая при этом слабая сходимость $r_nx_n^\varepsilon$ в W_2^1 влечет сильную сходимость в C [0, 1].

Замечание 7. Изложенная общая схема позволяет наряду с квадратурными методами обосновать сходимость проекционных способов дискретизации [4], [6], а также метода коллокаций [14] (для интегральных уравнений типа (5.1)). Например, если в задаче (6.1) принять за X_n подпространство, образованное первыми $2n+1$ элементами тригонометрической системы, в качестве p_n – оператор, ставящий в соответствие функции $x(t)$ сумму Фейера $(S_1+\ldots+S_n)/n$, $f_n(x_n)=f(x_n)$, то в тех же предположениях на функции $g(t, x, y)$, $\hat{x}(t)$ будут выполнены условия теоремы 3.

Литература

1. *Esser H.* Zur Diskretisierung von Extremalproblemen.— Lect. Notes. Math., 1973, B. 333, S. 69–88.
2. *Daniel I. W.* On the approximate minimization of functionals.— Math. Comput., 1969, v. 23, № 107, p. 573–581.

3. *Greenspan D.* On approximating extremals of functionals II.— Internat. J. Engng Sci., 1967, v. 5, p. 571–588.
4. *Васин В. В.* Устойчивая аппроксимация бесконечномерных задач линейного и выпуклого программирования.– Изв. вузов. Математика, 1978, № 11, с. 23–33.
5. *Васин В. В.* Дискретизация и устойчивая аппроксимация экстремальных задач.– В кн.: Тр. Всес. конф. «Динамич. управление». Свердловск: УНЦ АН СССР, 1979, с. 52–53.
6. *Васин В. В.* Дискретная сходимость и конечномерная аппроксимация регуляризующих алгоритмов.– Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1979, т. 19, № 1, с. 11–21.
7. *Evans J. P., Gould F. J.* Stability in nonlinear programming.— Operat. Res., 1970, v. 18, № 1, p. 107–118.
8. *Greenberg H. J., Pierskalla W. P.* Extensions of the Evans-Gould stability theorem for mathematical programs.— Operat. Res., 1972, v. 20, № 1, p. 143–153.
9. *Stummel F.* Diskrete Konvergenz linearer Operatoren I.— Math. Ann., 1970, B. 190, № 1, S. 45–92.
10. *Stummel F.* Discrete convergence of mappings.— In: Topics Numer. Analysis. Proc. Conf. Numer. Analysis (Dublin, 1972). London-New York, 1973, p. 285–310.
11. *Вайникко Г.* Анализ дискретизационных методов. Тарту: Изд-во Тартуского ун-та, 1976.
12. *Тихонов А. Н.* О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации.– Докл. АН СССР, 1963, т. 151, № 3, с. 501–504.
13. *Vainikko G.* Functionalanalysis der Diskretisierungsmethoden. Leipzig: Teubner, 1976.
14. *Васин В. В.* Общая схема дискретизации регуляризующих алгоритмов в банаховых пространствах.– Докл. АН СССР, 1981, т. 258, № 2, с. 271–275.

Поступила в редакцию 21.VII.1980