УДК 517.977.1+514.7

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ И ТЕОРЕТИКО-ГРУППОВЫЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

А. А. Аграчёв, С. А. Вахрамеев, Р. В. Гамкрелидзе

ВВЕДЕНИЕ

Данная работа посвящена некоторым аспектам современной теории управления, которые сравнительно недавно стали объектом внимания специалистов. Здесь излагаются как известные, так и оригинальные результаты. Часть результатов приводится с полными доказательствами. В статье используется аппарат хронологического исчисления, основанный на экспоненциальном представлении потоков [2], [3]. Некоторые элементы этого исчисления мы приводим в приложении к статье.

Мы не будем давать здесь общего обзора содержания данной работы, так как оно достаточно полно отражено в названиях соответствующих параграфов, а коротко остановимся на обозначениях, которые используются ниже.

Как обычно, через $\mathbf{R}^n$ обозначается n-мерное арифметическое пространство, точки которого трактуются как вектор-столбцы и всегда обозначаются латинскими буквами, например,

$$x=\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix},\quad y=\begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}\in\mathbf{R}^n.$$

Вектор-строки обозначаются греческими буквами, например,

$$\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_n),\quad \eta=(\eta_1,\ldots,\eta_n),$$

а скалярное произведение вектор-строки на вектор-столбец одинаковых размерностей записывается в виде матричного умножения

$$\xi\cdot x=(\xi_1,\ldots,\xi_n)\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}=\sum_{\alpha=1}^{n}\xi_\alpha x^\alpha.$$

Модулем $n\times m$ матрицы $A=(a_\beta^\alpha)$, $\alpha=1,\ldots,n$, $\beta=1,\ldots,m$, назовем величину

$$|A|=\sum_{\beta=1}^{m}\max_{1<\alpha<m}|a_\beta^\alpha|.$$

Соответственно,

$$|x| = \max_{1 \leqslant \alpha \leqslant n} |x^\alpha|,$$

$$|\xi| = \sum_{\beta=1}^{m} |\xi_\beta|$$

есть модули n-мерного вектора $x \in R^n$ и m-мерной вектор-строки $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$.

Якобиеву матрицу m-мерной вектор-функции $x \mapsto g(x)$ по координатам вектора $x \in R^n$ обозначим через

$$\frac{\partial g(x)}{\partial x} = \left(\frac{\partial g^i}{\partial x^j}\right), \quad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Термин гладкость всегда будет означать бесконечную дифференцируемость.

Пусть M — гладкое многообразие, гладко вложенное в пространство R^d, E — сужение тождественного отображения R^d на M. Пусть, далее, $\Phi = C^\infty(M)$ — алгебра всех гладких функций на M.

Векторным полем $\vec{f}$ на многообразии M мы будем называть произвольное дифференцирование алгебры Φ, т. е. линейное отображение

$$\vec{f}: \Phi \to \Phi,$$

удовлетворяющее правилу «дифференцирования произведения»:

$$\vec{f}(\varphi \cdot \psi) = (\vec{f}\varphi) \cdot \psi + \varphi(\vec{f}\psi)$$

$$\forall \varphi, \ \psi \in \Phi.$$

Обозначим через $\mathrm{Der}(\Phi)$ множество всех дифференцирований алгебры Φ. Известно, что всякое дифференцирование алгебры Φ является дифференциальным оператором первого порядка и действует по формуле

$$(\vec{f}\varphi)(x) = \langle d\varphi(x), \vec{f}E(x) \rangle$$

$$\forall x \in M, \ \varphi \in \Phi.$$

Отсюда, в частности, получается, что

$$\vec{f}E(x) = f(x) \quad \forall x \in M,$$

где f — некоторая гладкая d-мерная функция на M; всякое гладкое векторное поле, в свою очередь, порождается некоторой гладкой d-мерной функцией на M. Этим и обусловлено выбранное нами обозначение $\vec{f}$ для векторного поля, явно указывающее порождающую его гладкую функцию f.

Множество Der (Φ) векторных полей на M образует алгебру Ли. Как и во всякой алгебре Ли, через $[\vec{f}\vec{g}]$ обозначается коммутатор

$$[\vec{f}\vec{g}]=\vec{f}\circ\vec{g}-\vec{g}\circ\vec{f}$$

векторных полей $\vec{f}$, $\vec{g}\in\mathrm{Der}(\Phi)$, а через $\mathrm{ad}\,\vec{f}$ ($\vec{f}\in\mathrm{Der}(\Phi)$) — линейное отображение Der (Φ), определенное формулой

$$\mathrm{ad}\,\vec{f}(\vec{g})=[\vec{f}\vec{g}]$$

$$\forall\vec{g}\in\mathrm{Der}(\Phi),$$

соответственно, $\mathrm{ad}^k\vec{f}=\mathrm{ad}^{k-1}\vec{f}\circ\mathrm{ad}\,\vec{f}=\mathrm{ad}\,\vec{f}\circ\mathrm{ad}^{k-1}\vec{f}$ — степени (итерации) линейного отображения $\mathrm{ad}\,\vec{f}:\mathrm{Der}(\Phi)\to\mathrm{Der}(\Phi)$. Через T_xM обозначается касательное пространство к M в точке x,

$$T_xM=\{\vec{f}E(x);\ \vec{f}\in\mathrm{Der}(\Phi)\}.$$

Пусть $P:M\to M$ — диффеоморфизм. Тогда ему соответствует линейное отображение $P^*:\Phi\to\Phi$, определенное формулой

$$P^*\varphi=\varphi\circ P$$

$$\forall\varphi\in\Phi,$$

которое мы также будем называть диффеоморфизмом. Множество всех таких диффеоморфизмов образует группу Diff (M) относительно операции «∘» — композиции отображений.

Для любого $P^*\in\mathrm{Diff}(M)$ через $\mathrm{Ad}\,P^*$ мы обозначаем линейное отображение

$$\mathrm{Ad}\,P^*:\mathrm{Der}(\Phi)\to\mathrm{Der}(\Phi),$$

определенное формулой

$$\mathrm{Ad}\,P^*\vec{f}=P^*\vec{f}P^{*-1}\quad\forall\vec{f}\in\mathrm{Der}(\Phi).$$

Ниже нам встретятся некоторые специальные матричные алгебры и группы Ли. Их мы будем обозначать в соответствие с общепринятыми обозначениями. Например, Gl (n; R) — группа Ли всех невырожденных вещественных $n\times n$ матриц, gl (n; R) — ее алгебра Ли (состоящая из всех вещественных $n\times n$ матриц), SL (n; R) — группа Ли всех вещественных $n\times n$ матриц с определителем 1, sl (n; R) — ее алгебра Ли (все вещественные матрицы $A\in\mathrm{gl}(n;\mathrm{R})$, след которых $\mathrm{tr}\,A=0$). Через I обозначается единичная матрица, а через Id_X, или просто через Id тождественное отображение множества X. Если $\mathscr{L}$ — векторное пространство, $\mathscr{D}\subset\mathscr{L}$, то через span ($\mathscr{D}$) обозначается линейная оболочка множества $\mathscr{D}$, т. е. наименьшее подпространство, содержащее множество $\mathscr{D}$.

§ 1. МОТИВИРОВКА

Задачи оптимального управления относятся к неклассическим задачам вариационного исчисления и начали изучаться в 50-тых годах. К этому времени относится и открытие группой советских ученых, возглавляемой академиком Л. С. Понтрягиным, фундаментального результата теории — принципа максимума, который дает необходимые условия оптимальности первого порядка для широкого класса задач оптимального управления. Итог первого этапа развития теории подвела получившая всемирную известность монография [15].

В дальнейшем теория пополнилась многими интересными и содержательными результатами. При этом исследования велись в основном по двум направлениям.

С одной стороны, интенсивно применялся аппарат выпуклого и функционального анализа и на этом пути удалось создать общую теорию экстремальных задач, представляющую собой естественное обобщение конечномерной теории математического программирования. Большая заслуга в создании этой общей теории принадлежит советским ученым, из работ которых следует особо отметить следующие [8], [9], [11], [12]. Не имея возможности сколь-нибудь подробно говорить об результатах, полученных в этом направлении, мы отсылаем читателя к монографиям [5], [13], [14] и обзорам [6], [7].

Если говорить о втором направлении развития теории оптимального управления, то следует, во-первых, отметить, что оно очень молодо и сделано в этом направлении не так много. Большой вклад в его развитие внесли Броккет [24], [25], [26], [27], [28], Германн [35], [36], Германн и Кренер [37], Хермс [38], [39], [40], [41], [42], Джорджевич [48], [49], [50], [51], [52], Джорджевич и Суссман [55], [56], Кренер [58], [59], [60], [61], [62], Лобри [68], [70], [71], [72], [73], [74], [75], [76] и Суссман [83], [84], [85], [86], [87], [88], [89], [90], [91], [92], [93], [94], [95], [96], [97], [98], [99], [100], [101].

Характерной чертой работ этого направления является систематическое применение дифференциально-геометрических и теоретико-групповых методов. Возможность применения этих методов возникает здесь из-за того, что рассматриваются исключительно гладкие динамические системы (и даже аналитические) и изучаются их качественные свойства, а именно, свойства соответствующих множеств достижимости — словом, вопросы, которые больше связаны с управляемостью систем, чем с получением условий оптимальности.

О некоторых наиболее важных результатах, полученных в этом направлении, и пойдет речь в этой статье.

Мы обсудим сначала две задачи, даже самый поверхностный анализ которых показывает естественность применения дифференциально-геометрических методов, в случае, когда динамика соответствующей управляемой системы описывается достаточно регулярно.

Начнем с рассмотрения систем, линейных по фазовым переменным, т. е. систем вида

$$\dot{x}=A(u)x, \quad x\in\mathbb{R}^n, \quad u\in\mathbb{R}^m, \tag{1.1}$$

где $A(u)$, $u\in U\subset\mathbb{R}^m$ — семейство $n\times n$ матриц, непрерывно зависящее от параметра $u\in U$.

Системе (1.1) соответствует матричная управляемая система

$$\dot{X}=A(u)X, \quad X\in\mathrm{Gl}(n;\mathbb{R}), \quad u\in U. \tag{1.2}$$

Если $u:\mathbb{R}\to U$ — произвольное измеримое и ограниченное управление, то существует единственное решение X_t, $t\in\mathbb{R}$, уравнения

$$\dot{X}_t=A(u(t))X_t, \quad X_0=I, \tag{1.3}$$

представляющее собой абсолютно непрерывную кривую X_t, $t\in\mathbb{R}$, в группе $\mathrm{Gl}(n;\mathbb{R})$. Мы будем обозначать это решение через

$$X_t=\overleftarrow{\exp}\int_0^t A(u(\tau))\,d\tau, \quad t\in\mathbb{R}.$$

Очевидно, что функция

$$x(t)=\overleftarrow{\exp}\int_0^t A(u(\tau))\,d\tau x_0, \quad t\in\mathbb{R},$$

является решением уравнения

$$\dot{x}=A(u(t))x,$$

удовлетворяющим произвольному начальному условию

$$x(0)=x_0.$$

Матричная управляемая система (1.2) является уравнением на (групповом) многообразии: ее фазовым пространством является группа Ли $\mathrm{Gl}(n;\mathbb{R})$, при этом $A(u)$ $\forall u\in U$ являются элементами соответствующей алгебры Ли $\mathrm{gl}(n;\mathbb{R})$ и, следовательно, система (1.2) является уравнением на группе Ли с правоинвариантными векторными полями

$$\overrightarrow{A(u)X}.$$

Более того, предположим, что при всех $u\in U$ матрицы $A(u)$ принадлежат подалгебре Ли g алгебры Ли $\mathrm{gl}(n;\mathbb{R})$. Оказывается, что в этом случае при любом (измеримом и ограниченном) управлении $u: \mathbf{R} \to U$ соответствующее решение

$$\overleftarrow{\exp} \int_0^t A(u(\tau))\, d\tau, \quad t \in \mathbf{R},$$

уравнения (1.3) при всех $t \in \mathbf{R}$ лежит в подгруппе Ли G группы $\mathrm{Gl}(n;\ \mathbf{R})$, алгебра Ли которой есть g.

Приведем простое доказательство этого утверждения.

В самом деле, при почти всех $t \in \mathbf{R}$ векторное поле

$$\overrightarrow{A(u(t))X},$$

в силу правоинвариантности, касается подгруппы G, а значит, по теореме существования и единственности решения дифференциального уравнения на гладком многообразии, при всех $t \in \mathbf{R}$

$$\overleftarrow{\exp} \int_0^t A(u(\tau))\, d\tau \in G.$$

Таким образом, в случае линейных по фазовым переменным управляемых систем, алгебры и группы Ли появляются самым естественным образом: если

$$g = [A(u);\ u \in U]$$

— алгебра Ли, порожденная множеством

$$\{A(u);\ u \in U\},$$

то всякое решение

$$\overleftarrow{\exp} \int_0^t A(u(\tau))\, d\tau, \quad t \in \mathbf{R},$$

будет абсолютно непрерывной кривой в группе Ли $G \subset \mathrm{Gl}(n;\ \mathbf{R})$, алгебра Ли которой есть g. Это дает уже определенную информацию о структуре множества достижимости соответствующей управляемой системы. К этому вопросу мы еще вернемся, а сейчас рассмотрим конкретную задачу управления, фазовое пространство которой не имеет «обычной» структуры векторного пространства.

Речь идет о задаче управления вращением твердого тела. Как известно, (см. [4]) вращение твердого тела можно описать с помощью абсолютно непрерывных кривых в группе SO (3; R) ортогональных матриц с определителем 1. Если $Q(t)$, $t \in \mathbf{R}$, — такая кривая, то

$$\dot{Q} = \Omega(t) Q,$$

где

$$\Omega(t) = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3(t) & -\omega_2(t) \\ -\omega_3(t) & 0 & \omega_1(t) \\ \omega_2(t) & -\omega_1(t) & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{so}(3;\ \mathbf{R}),$$

а $\omega(t)=(\omega_1(t), \omega_2(t), \omega_3(t))$ — угловая скорость тела в связанной с ним системе координат. Мы управляем угловой скоростью, выбирая управляющий момент $u(t)$ в соответствии с уравнением Эйлера

$$\frac{d}{dt}\omega(t)=A^{-1}[A\omega(t), \omega(t)]+A^{-1}u(t), \qquad (1.4)$$

где A — ортогональная матрица, $[\cdot, \cdot]$ — векторное произведение в $\mathbb{R}^3$.

Ниже мы покажем, что уравнения с коммутаторами вида (1.4) являются типичными уравнениями на алгебре Ли. Там же мы дадим и независимый (вариационный) вывод уравнения Эйлера (1.4).

§ 2. УПРАВЛЯЕМОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

1. Управляемые системы на гладких многообразиях. Множество достижимости. Понятие управляемости. Пусть M—n-мерное гладкое многообразие, гладко вложенное в $\mathbb{R}^d$.

Управляемой системой на многообразии M

$$\Sigma_U(M, \mathcal{D})$$

мы будем называть пару

$$\Sigma_U(M, \mathcal{D})=\langle \mathcal{F}_U(M), \mathcal{D}\rangle,$$

где $\mathcal{D}$ — класс допустимых управлений, который состоит из ограниченных и измеримых функций времени, принимающих значения в множестве $U\subset\mathbb{R}^m$, а

$$\mathcal{F}_U(M)=\{\vec{f}(u);\ u\in U\}\subset \mathrm{Der}(\Phi)$$

— семейство гладких векторных полей на M.

Относительно семейства $\mathcal{F}_U(M)$ мы будем предполагать, во-первых, что оно состоит из полных векторных полей. Это означает, что для любого $\vec{f}\in\mathcal{F}_U(M)$ определена однопараметрическая подгруппа

$$e^{t\vec{f}}=\overrightarrow{\exp}\int_0^t \vec{f}\,d\tau, \quad t\in\mathbb{R},$$

группы диффеоморфизмов $\mathrm{Diff}(M)$ многообразия M. Далее, мы будем считать, что семейство полей $\mathcal{F}_U(M)$ равномерно ограниченно в смысле определения, приведенного в приложении. Наконец, мы будем считать, что семейство полей $\mathcal{F}_U(M)=\{\vec{f}(u);\ u\in U\}$ непрерывно зависит от параметра $u\in U$ (определение топологии пространства $\mathrm{Der}(\Phi)$ см. также в приложении).

Если выполнены все сформулированные выше условия на семейство $\mathcal{F}_U(M)$ векторных полей, то при любом допустимом управлении $u(\cdot)\in\mathcal{D}$ определено решение $x(t)$, $t\in\mathbf{R}$, дифференциального уравнения

$$\dot{x}=\vec{f}(u(t))E(x)=f(x, u(t)), \quad x\in M,$$

удовлетворяющее произвольному начальному условию

$$x(0)=x_0\in M.$$

Это решение

$$x(t)=\overrightarrow{\exp}\int_0^t \vec{f}(u(\tau))\,d\tau E(x_0)$$

определено при всех $t\in\mathrm{R}$ и называется траекторией управляемой системы $\Sigma_U(M, \mathcal{D})$, исходящей из точки x_0, и соответствующей допустимому управлению $u(\cdot)\in\mathcal{D}$.

Множеством достижимости $\mathfrak{A}_{x_0}(T)$ управляемой системы $\Sigma_U(M, \mathcal{D})$ из точки $x_0\in M$ за время $T>0$ называется множество

$$\mathfrak{A}_{x_0}(T)=\left\{\overrightarrow{\exp}\int_0^T \vec{f}(u(\tau))\,d\tau E(x_0);\ u(\cdot)\in\mathcal{D}\right\},$$

а множеством достижимости из x_0 — множество

$$\mathfrak{A}_{x_0}=\bigcup_{T>0}\mathfrak{A}_{x_0}(T).$$

Управляемая система $\Sigma_U(M, \mathcal{D})$ называется управляемой из точки x_0 за время T, если

$$\mathfrak{A}_{x_0}(T)=M,$$

и управляемой из x_0, если

$$\mathfrak{A}_{x_0}=M.$$

Если $\mathfrak{A}_{x_0}(T)=M$ или $\mathfrak{A}_{x_0}=M\ \forall x_0\in M$, то говорят, соответственно, об управляемости системы $\Sigma_U(M, \mathcal{D})$ за время T и управляемости.

Пусть $\tilde{u}(\cdot)\in\mathcal{D}$ — произвольное допустимое управление, а

$$\tilde{x}(t)=\overrightarrow{\exp}\int_0^t \vec{f}(\tilde{u}(\tau))\,d\tau E(x_0), \quad t\in\mathrm{R},$$

— соответствующая ему траектория управляемой системы $\Sigma_U(M, \mathcal{D})$, исходящая из точки $x_0\in M$.

Система $\Sigma_U(M, \mathcal{D})$ называется локально управляемой вдоль траектории $\tilde{x}(t)$, $t\in\mathrm{R}$, если

$$\tilde{x}(t)\in\operatorname{Int}\mathfrak{A}_{x_0}(t) \quad \forall t>0.$$

В дальнейшем мы не будем различать управляемую систему $\Sigma_U(M, \mathcal{D})$ и дифференциальное уравнение

$$\dot{x}=\vec{f}(u)E(x)=f(x,\ u),\quad x\in M,$$

которое описывает ее динамику.

Изучение вопросов управляемости нелинейных систем мы начнем с изучения этих вопросов для систем, линейных по фазовым переменным, с которыми мы уже встречались в § 1.

2. **Управляемость матричных систем.** В этом пункте многообразие M будет подгруппой Ли G полной линейной группы $\mathrm{Gl}(n;\ \mathbf{R})$, возможно совпадающей с ней. Мы будем рассматривать управляемые системы $\Sigma_U(G, \mathscr{D})$, семейство полей

$$\mathscr{F}_U(G)=\{\overrightarrow{A(u)X};\ u\in U\subset\mathbf{R}^m\}$$

которых является правоинвариантным, следовательно, множество

$$\{A(u);\ u\in U\}$$

будет подмножеством алгебры Ли $g\subset\mathrm{gl}(n;\ \mathbf{R})$ группы $G\subset\mathrm{Gl}(n;\ \mathbf{R})$.

Прямым следствием правоинвариантности матричной управляемой системы

$$\dot{X}=A(u)X,\quad X\in G,\quad u\in U$$

является то обстоятельство, что множество достижимости $\mathfrak{A}$ этой системы

$$\mathfrak{A}_I=\bigcup_{t>0}\left\{\overleftarrow{\exp}\int_0^t A(u(\tau))\,d\tau;\ u(\cdot)\in\mathscr{D}\right\}$$

из единичной матрицы $I\in\mathrm{Gl}(n;\ \mathbf{R})$ полностью определяет множество достижимости из произвольной матрицы $X\in G$: $\mathfrak{A}_I X=\mathfrak{A}_X$. В § 1 мы отметили, что множество достижимости

$$\mathfrak{A}_I=\bigcup_{T>0}\mathfrak{A}_I(T)$$

матричной управляемой системы

$$\dot{X}=A(u)X,\quad u\in U,\quad X\in G$$

содержится в подгруппе Ли, алгебра Ли которой совпадает и алгеброй Ли $[A(u);\ u\in U]$, порожденной множеством

$$\{A(u);\ u\in U\}.$$

Однако, вообще говоря, множество достижимости $\mathfrak{A}_I$ не является подгруппой Ли группы $\mathrm{Gl}(n;\ \mathbf{R})$, ни ее (абстрактной) подгруппой. Можно доказать, что $\mathfrak{A}_I$ имеет структуру полугруппы. В самом деле, пусть

$$X'=\overleftarrow{\exp}\int_0^{T'} A(u'(\tau))\,d\tau,\quad X''=\overleftarrow{\exp}\int_0^{T''} A(u''(\tau))\,d\tau\in\mathfrak{A}_I.$$

Докажем, что $X'X''\in\mathfrak{A}_I$. Для этого определим управление

$v(\cdot)\in\mathcal{D}$ по формуле

$$v(t)=\begin{cases}u'(t), & 0\leqslant t\leqslant T',\\ u''(-T'+t), & t>T'.\end{cases}$$

Тогда

$$X'X''=\overleftarrow{\exp}\int_0^{T'} A(u'(\tau))\,d\tau\,\overleftarrow{\exp}\int_0^{T''} A(u''(\tau))\,d\tau=$$

$$=\overleftarrow{\exp}\int_0^{T'} A(u'(\tau))\,d\tau\,\overleftarrow{\exp}\int_{T'}^{T'+T''} A(u''(\tau-T'))\,d\tau=$$

$$=\overleftarrow{\exp}\int_0^{T'} A(v(\tau))\,d\tau\,\overleftarrow{\exp}\int_{T'}^{T''+T'} A(v(\tau))\,d\tau=\overleftarrow{\exp}\int_0^{T'+T''} A(v(\tau))\,d\tau\in\mathfrak{A}_I,$$

т. е. множество достижимости $\mathfrak{A}_I$ — полугруппа.

Заметим, что множество достижимости линейно связно, а следовательно, если множество достижимости окажется абстрактной подгруппой группы $\mathrm{Gl}(n;\mathbf{R})$, то оно непременно будет и подгруппой Ли группы $\mathrm{Gl}(n;\mathbf{R})$. Этим обстоятельством мы воспользуемся ниже.

Матричная управляемая система

$$\dot{X}=A(u)X,\quad X\in G,\quad u\in U,$$

называется симметричной, если для любого $u\in U$ существует элемент $v\in U$ такой, что

$$A(u)=-A(v).$$

Предложение 2. 1. Множество достижимости $\mathfrak{A}_I$ симметричной управляемой системы

$$\dot{X}=A(u)X,\ u\in U,\ X\in\mathrm{Gl}(n;\mathbf{R}),\tag{2.1}$$

является группой Ли, алгебра Ли которой совпадает с алгеброй Ли $[A(u);\ u\in U]$, порожденной множеством $\{A(u);\ u\in U\}$.

Доказательство. Рассмотрим подгруппу $\mathfrak{L}$ полной линейной группы, порожденную элементами вида

$$e^{t^iA_i},\ t^i\geqslant 0,\ A_i\in\{A(u);\ u\in U\}.$$

Так как рассматриваемая матричная управляемая система симметрична, то эта подгруппа $\mathfrak{L}$ состоит из элементов вида

$$e^{t^1A_1}\ldots e^{t^kA_k},\ t^i\gtrless 0,\ A_i\in\{A(u);\ u\in U\}.$$

Далее, подгруппа $\mathfrak{L}$, очевидно, является линейно связной, а потому, на основании вышесказанного, она является подгруппой Ли группы $\mathrm{Gl}(n;\mathbf{R})$. Отметим, что эта группа $\mathfrak{L}$ содержится в множестве достижимости $\mathfrak{A}_I$ нашей управляемой системы. Каждый элемент

$$e^{t^1A_1}\ldots e^{t^kA_k}$$

этой подгруппы представляет собой точку траектории управляемой системы (2.1), соответствующей некоторому кусочно-постоянному управлению. Докажем, что

$$\mathfrak{A}_I = \mathfrak{L}.$$

В самом деле, пусть $u(\cdot)\in\mathcal{D}$ — произвольное допустимое управление. Поле

$$\overrightarrow{A(u(t))X}$$

касается подгруппы $\mathfrak{L}$ при почти всех $t\in\mathbf{R}$. Следовательно, по теореме существования и единственности решения дифференциального уравнения на многообразии, при всех $t\in\mathbf{R}$

$$\overleftarrow{\exp}\int_0^t A(u(\tau))\,d\tau\in\mathfrak{L}.$$

Но это означает, что множество достижимости $\mathfrak{A}_I$ совпадает с подгруппой Ли $\mathfrak{L}$. Далее, алгебра Ли $\mathfrak{l}$ подгруппы $\mathfrak{L}$ содержится в алгебре Ли $[A(u);\ u\in U]$, порожденной множеством $\{A(u);\ u\in U\}$, ибо множество достижимости $\mathfrak{A}_I=\mathfrak{L}$ содержится в соответствующей группе Ли. С другой стороны, подгруппы $\mathfrak{L}$ касается всякое поле $\overrightarrow{AX}\in\{\overrightarrow{A(u)X};\ u\in U\}$, а значит касается и коммутатор $[\overrightarrow{AX}\ \overrightarrow{BX}]$ полей $\overrightarrow{AX}$ и $\overrightarrow{BX}$. Это означает, что алгебра Ли $[A(u);\ u\in U]$, порожденная множеством $\{A(u);\ u\in U\}$, содержится в алгебре Ли $\mathfrak{l}$ группы $\mathfrak{A}_I=\mathfrak{L}$. Этим доказано, что алгебра Ли $\mathfrak{l}$ совпадает с алгеброй Ли $[A(u);\ u\in U]$.

Предложение доказано.

Из доказательства предложения 2.1 видно, что множество достижимости $\mathfrak{A}_I$ симметричной управляемой системы не зависит от класса допустимых управлений. В частности, всякий элемент множества достижимости может быть достигнут и с помощью кусочно-постоянного управления, но, возможно, за несколько большее время.

Частным и весьма важным подклассом симметричных управляемых систем являются так называемые однородные управляемые системы, т. е. системы вида

$$\dot{X}=\sum_{i=1}^{m} u^i B_i X,\quad X\in\mathrm{Gl}(n;\ \mathrm{R}),$$

$$u=\begin{pmatrix} u^1\\ \vdots\\ u^m\end{pmatrix}\in\mathrm{R}^m. \tag{2.2}$$

Предложение 2.2. *Множество достижимости за время T $\mathfrak{A}_I(T)$ однородной матричной управляемой системы* (2.2) *не за-*

висит от времени T и является подгруппой Ли группы G, алгебра Ли которой порождена множеством $\{B_1, \ldots, B_m\}$. Множество достижимости $\mathfrak{A}_I$ не зависит от класса допустимых управлений. Всякий элемент множества достижимости может быть достигнут за сколь угодно малое время с помощью кусочно-постоянных управлений.

Доказательство. Линейная замена времени дает, что $\forall T > 0$.

$$\mathfrak{A}_I(1) = \mathfrak{A}_I(T).$$

Далее,

$$\mathfrak{A}_I = \bigcup_{T>0} \mathfrak{A}_I(T) = \mathfrak{A}_I(1).$$

Поэтому, в силу предложения 2.1, множество достижимости $\mathfrak{A}_I(T)$ является группой Ли, алгебра Ли которой совпадает с алгеброй Ли, порожденной множеством $\{B_1, \ldots, B_m\}$. Остальное доказывается очевидным образом.

Пусть теперь $g = [A(u);\ u \in U]$ — алгебра Ли, порожденная множеством $\{A(u);\ u \in U\}$, а G — соответствующая ей группа Ли. Справедливо следующее замечательное утверждение (см. [55]):

Предложение 2.3. Множество достижимости $\mathfrak{A}_I$ произвольной матричной управляемой системы

$$\dot{X} = A(u)X,\ u \in U,\ X \in G,$$

имеет внутренние точки в G и является замыканием своей внутренности.

Доказательство. Существует конечное множество $\{A_1, \ldots, A_l\}$ элементов множества $\{A(u);\ u \in U\}$ такое, что алгебра Ли $[A_i;\ i = 1, \ldots, l]$, порожденная этим множеством, совпадает с алгеброй Ли, порожденной множеством $\{A(u);\ u \in U\}$. Отсюда следует, что группа G, в силу предложения 2.1, порождается элементами вида

$$e^{t^1 A_{i_1}} \ldots e^{t^k A_{i_k}},\quad t^i \in \mathbb{R},\quad 1 \leqslant i_j \leqslant l.$$

Пусть $\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_k)$. Обозначим через $F_\mathbf{i}$ отображение

$$F_\mathbf{i} : (t^1, \ldots, t^k) \mapsto e^{t^1 A_{i_1}} \ldots e^{t^k A_{i_k}} : \mathbb{R}^k \to G.$$

Пусть $S_\mathbf{i}(N)$ — образ множества $\{t \in \mathbb{R}^k \mid |t| \leqslant N\}$ при этом отображении. Тогда

$$G = \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcup_{\mathbf{i}} S_\mathbf{i}(N).$$

Каждое множество $S_\mathbf{i}(N)$ замкнуто как образ компакта при непрерывном отображении

$$(t^1, \ldots, t^k) \mapsto F_\mathbf{i}(t^1, \ldots, t^k).$$

Следовательно (G — полное метрическое пространство), по теореме Бэра о категории, существует множество $S_l(N)$, внутренность которого не пуста. Следовательно, существует отображение

$$F_l:(t^1, \ldots, t^k)' \mapsto e^{t^1 A_{l_1}} \ldots e^{t^k A_{l_k}}: \mathrm{R}^k \to G,$$

образ которого имеет внутренние точки. Отсюда, по теореме Сарда, следует, что существует точка

$$s_0 = \begin{pmatrix} s_0^1 \\ \vdots \\ s_0^k \end{pmatrix} \in \mathrm{R}^k,$$

в которой ранг отображения F_l равен $\dim G$. Поскольку отображение F_l аналитично, то точки, в которых ранг отображения F_l равен $\dim G$, образуют открытое всюду плотное подмножество $\hat{\Omega} \subset \mathrm{R}^k$. Следовательно, множество

$$\Omega = \hat{\Omega} \cap \{s \in \mathrm{R}^k \mid s^i > 0\}$$

открыто и всюду плотно в множестве $\mathrm{R}_+^k = \{s \in \mathrm{R}^k \mid s^i > 0\}$. Отсюда следует, что множество

$$F_l(\Omega) = \{F_l(t);\ t \in \Omega\} \subset \mathfrak{A}_l$$

открыто и, значит, множество достижимости имеет внутренние точки.

Докажем, что множество достижимости $\mathfrak{A}_l$ является замыканием своей внутренности. В самом деле, пусть

$$X = \overleftarrow{\exp} \int_0^T A(u(\tau))\, d\tau$$

— произвольная точка множества достижимости $\mathfrak{A}_l$. Множество

$$\left\{ \overleftarrow{\exp} \int_0^T A(u(\tau))\, d\tau\, e^{t^1 A_{l_1}} \ldots e^{t^k A_{l_k}};\ t = \begin{pmatrix} t^1 \\ \vdots \\ t^k \end{pmatrix} \in \Omega \right\} \subset \mathfrak{A}_l$$

открыто, ибо оно является образом открытого множества

$$F_l(\Omega) = \left\{ e^{t^1 A_{l_1}} \ldots e^{t^k A_{l_k}};\ t = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t^k \end{pmatrix} \in \Omega \right\}$$

при диффеоморфизме

$$X \mapsto \overleftarrow{\exp} \int_0^T A(u(\tau))\, d\tau X : G \to G.$$

Так как $0\in\bar{\Omega}$, то существуют точки

$$t_n = \begin{pmatrix} t_n^1 \\ \vdots \\ t_n^k \end{pmatrix} \in \Omega$$

такие, что $t_n \to 0$ при $n \to \infty$. Поэтому

$$\overleftarrow{\exp}\int_0^T A(u(\tau))\,d\tau = \lim_{n\to\infty} \overleftarrow{\exp}\int_0^T A(u(\tau))\,d\tau e^{t_n^1 A_{l1}} \ldots e^{t_n^k A_{lk}}.$$

Таким образом, точка

$$X = \overleftarrow{\exp}\int_0^T A(u(\tau))\,d\tau$$

является пределом внутренних точек

$$\overleftarrow{\exp}_0\int_0^T A(u(\tau))\,d\tau e^{t_n^1 A_{l1}} \ldots e^{t_n^k A_{lk}}$$

множества достижимости $\mathfrak{A}_I$.

Предложение доказано.

Пусть снова $g=[A(u);\, u\in U]$ — алгебра Ли, порожденная множеством $\{A(u);\, u\in U\}$, а G — соответствующая группа Ли В работе [56] доказано

Предложение. 2.4. Предположим, что группа Ли G, содержащая множество достижимости управляемой системы

$$\dot{X} = A(u)X, \quad u\in U, \tag{2.3}$$

компактна. Тогда

а) $\mathfrak{A}_I = G$;

в) существует $T>0$ такое, что $\mathfrak{A}_I(T) = \mathfrak{A}_I$.

Остановимся коротко на идее доказательства этого утверждения. Пусть $\mathscr{H}\subset G$ — замыкание (относительно G) множества достижимости $\mathfrak{A}_I$ управляемой системы (2.3). Докажем, что $\mathscr{H}\subset G$ — абстрактная подгруппа. Отсюда и из предложения 3.3 тогда и будут следовать а)—в). Мы знаем, что $\mathscr{H}$ — полугруппа. Поэтому достаточно доказать, что если $H\in\mathscr{H}$, то и $H^{-1}\in\mathscr{H}$. Итак, пусть $H\in\mathscr{H}$. Тогда для любого натурального n $H^n\in\mathscr{H}$. В силу компактности группы G, множество $\mathscr{H}$ компактно, а потому из последовательности $\{H^n\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{H^{n_k}\}$. Пусть $\{H^{n_k}\}\to\hat{H}\in\mathscr{H}$, $k\to\infty$, и $n_{k+1}-n_k\geqslant 1$. Тогда

$$H^{-1} = \lim_{k\to\infty} H^{n_{k+1}-n_k-1} = \lim H^{n_{k+1}} H^{-n_k}\cdot H^{-1} = \hat{H}\cdot\hat{H}^{-1}\cdot H^{-1}.$$

Более подробное доказательство этого утверждения см. в [56]. Отметим, что многие из приведенных в этом пункте утверждений верны и в общем случае. Соответствующие формулировки будут приведены ниже вместе со ссылками на литературу, где можно найти доказательства.

3. Нелинейные управляемые системы. Теорема Суссмана. В этом пункте мы будем рассматривать нелинейные управляемые системы

$$\Sigma_U(M, \mathscr{D}) = \langle \mathscr{F}_U(M), \mathscr{D} \rangle$$

общего вида на гладком n-мерном многообразии M. Как и выше, класс $\mathscr{D}$ допустимых управлений состоит из ограниченных и измеримых функций $u(t)$, $t \in \mathrm{R}$ со значениями в множестве $U \subset \mathrm{R}^m$.

Предположим, что $u(\cdot) \in \mathscr{D}$ — некоторое кусочно-постоянное управление. Тогда всякий отрезок соответствующей этому управлению траектории

$$x(t) = \overrightarrow{\exp} \int_0^t \vec{f}(u(\tau)\, d\tau E(x_0), \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

управляемой системы $\Sigma_U(M, \mathscr{D})$ может быть представлен в виде

$$x(T) = e^{t^m \vec{f}_m} \ldots e^{t^1 \vec{f}_1} E(x_0),$$

где $\vec{f}_l \in \mathscr{F}_U(M)$, $t^l \geqslant 0$ — подходящим образом подобранные поля и моменты времени. Следовательно, по крайней мере, в случае, когда используются кусочно-постоянные управления, имеет смысл рассматривать элементы

$$P^* = e^{t^k \vec{f}_k} \ldots e^{t^1 \vec{f}_1}, \quad t_j \geqslant 0, \quad \vec{f}_l \in \mathscr{F}_U(M)$$

группы диффеоморфизмов $\mathrm{Diff}(M)$ многообразия M. Подгруппа $\mathscr{P}_U$ группы $\mathrm{Diff}(M)$, порожденная элементами такого вида, очевидно есть

$$\mathscr{P}_U = \{e^{t^1 \vec{f}_1} \ldots e^{t^k \vec{f}_k};\ t^l \in \mathrm{R},\ l = 1, \ldots, k,\ \vec{f}_l \in \mathscr{F}_U(M)\}.$$

Эта подгруппа действует на многообразии M и мы можем рассмотреть орбиты

$$M(x_0) = \{P^* E(x_0);\ P^* \in \mathscr{P}_U\}$$

этого действия.

Справедлива следующая фундаментальная теорема, принадлежащая Суссману [89].

Т е о р е м а 2.1. Для любого $x_0 \in M$ орбита $M(x_0)$ является гладким подмногообразием многообразия M.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим множество векторных полей

$$\mathscr{C}_U = \{\mathrm{Ad}\, P^* \vec{f};\ P^* \in \mathscr{P}_U,\ \vec{f} \in \mathscr{F}_U(M)\}$$

и обозначим через $\Pi(x)$ плоскость, натянутую на множество векторов

$$\mathscr{C}_U E(x)=\{\mathrm{Ad}\, P^*\vec{f}E(x);\ P^*\in\mathscr{P}_U,\ \vec{f}\in\mathscr{F}_U(M)\}\subset T_xM,$$

т. е. положим

$$\Pi(x)=\mathrm{span}\,\{\mathrm{Ad}\, P^*\vec{f}E(x);\ P^*\in\mathscr{P}_U,\ \vec{f}\in\mathscr{F}_U(M)\}.$$

Справедлива следующая лемма, которая имеет и самостоятельное значение.

Лемма 2.1. Размерность плоскости

$$\Pi(x)=\mathrm{span}\,\{\mathrm{Ad}\, P^*\vec{f}E(x);\ P^*\in\mathscr{P}_U,\ \vec{f}\in\mathscr{F}_U(M)\}$$

постоянна на любой орбите $M(x_0)$:

$$\dim\Pi(x)=\dim\Pi(x_0)\quad \forall x\in M(x_0).$$

Доказательство. Пусть x_1 — произвольная точка орбиты $M(x_0)$. Тогда существует элемент $\tilde{P}^*\in\mathscr{P}_U$ такой, что

$$\tilde{P}(x_0)=\tilde{P}^*E(x_0)=x_1.$$

Дифференциал $\tilde{P}_*$ отображения $\tilde{P}^*E=\tilde{P}:M\to M$ переводит плоскость $\Pi(x_0)$ в $\Pi(x_1)$. В самом деле, так как

$$\tilde{P}_*=\mathrm{Ad}\,\tilde{P}^{*-1},$$

то для любых $\vec{f}\in\mathscr{F}_U(M)$, $P^*\in\mathscr{P}_U$

$$(\tilde{P}_*\,\mathrm{Ad}\,P^*\vec{f})\,E(x_1)=(\mathrm{Ad}\,\tilde{P}^{*-1}\,\mathrm{Ad}\,P^*\vec{f})\,E(x_1)=(\mathrm{Ad}\,Q^*\vec{f})\,E(x_1),$$

где $Q^*=\tilde{P}^{*-1}P^*\in\mathscr{P}_U$. Аналогично, дифференциал $\tilde{P}_*^{-1}$ отображения $\tilde{P}^{-1}=\tilde{P}^{-1*}E:M\to M$ переводит плоскость $\Pi(x_1)$ в $\Pi(x_0)$. Поскольку $\tilde{P}_*$ и $\tilde{P}_*^{-1}$ — изоморфизмы соответствующих касательных пространств, то

$$\dim\Pi(x_0)=\dim\Pi(x)\quad \forall x\in M(x_0).$$

Лемма доказана.

Лемма 2.1 дает основания для следующего определения.

Размерностью управляемой системы $\Sigma_U(M,\mathscr{D})$ в точке $x_0\in M$ называется размерность плоскости

$$\Pi(x_0)=\mathrm{span}\,\{\mathrm{Ad}\,P^*\vec{f}E(x_0);\ P^*\in\mathscr{P}_U,\ \vec{f}\in\mathscr{F}_U(M)\}\subset T_{x_0}M.$$

Пусть теперь x — произвольная точка орбиты $M(x_0)$. Выберем k полей

$$\mathrm{Ad}\,P_1^*\vec{f}_1,\ldots,\mathrm{Ad}\,P_k^*\vec{f}_k$$

так, чтобы векторы

$$\mathrm{Ad}\,P_1^*\vec{f}_1E(x),\ldots,\mathrm{Ad}\,P_k^*\vec{f}_kE(x)$$

образовывали бы базис плоскости

$$\Pi(x)=\operatorname{span}\{\operatorname{Ad}P^*\vec{f}E(x);\ P^*\in\mathcal{P}_U,\ \vec{f}\in\mathcal{F}_U(M)\},$$

и определим отображение $\mathcal{E}_x:\mathbf{R}^k\to M$ по формуле

$$\mathcal{E}_x(s^1,\ldots,s^k)=\operatorname{Ad}P_1^*e^{s^1\vec{f}_1}\ldots\operatorname{Ad}P_k^*e^{s^k\vec{f}_k}E(x).$$

Так как

$$\frac{\partial}{\partial s^j}\mathcal{E}_x(s^1,\ldots,s^k)\big|_{s^1=\ldots=s^k=0}=\operatorname{Ad}P_j^*\vec{f}_jE(x),$$

то существует окрестность V_x нуля в $\mathbf{R}^k$ такая, что отображение $\mathcal{E}_x$ диффеоморфно отображает ее на $\mathcal{E}_x(V_x)$. Пусть $S_x=\mathcal{E}_x(V_x)$. Тогда S_x — гладкое k-мерное подмногообразие многообразия M.

Докажем, что поля

$$\operatorname{Ad}P_1^*\vec{f}_1,\ldots,\operatorname{Ad}P_k^*\vec{f}_k$$

порождают касательное пространство к S_x в каждой его точке. Отсюда будет следовать, в частности, что всякое поле

$$\operatorname{Ad}P^*\vec{f}\in\mathcal{P}_U$$

касается многообразия S_x в любой точке $y\in S_x$.

Действительно, пусть $y=\mathcal{E}_x(t^1,\ldots,t^k)\in S_x$. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial t_j}\mathcal{E}_x(t^1,\ldots,t^k)=\frac{\partial}{\partial t^j}\operatorname{Ad}P_1^*e^{t^1\vec{f}_1}\ldots\operatorname{Ad}P_k^*e^{t^k\vec{f}_k}E(x)=$$

$$=\operatorname{Ad}P_1^*e^{t^1\vec{f}_1}\ldots\operatorname{Ad}P_{j-1}^*e^{t^{j-1}\vec{f}_{j-1}}\operatorname{Ad}P_j^*e^{t^j\vec{f}_j}\vec{f}_j\cdot$$

$$\operatorname{Ad}P_{j+1}^*e^{t^{j+1}\vec{f}_{j+1}}\ldots\operatorname{Ad}P_k^*e^{t^k\vec{f}_k}E(x)=$$

$$=\operatorname{Ad}P_1^*e^{t^1\vec{f}_1}\ldots\operatorname{Ad}P_k^*e^{t^k\vec{f}_k}\cdot\operatorname{Ad}P_k^*e^{-t^k\vec{f}_k}\ldots$$

$$\ldots\operatorname{Ad}P_{j+1}^*e^{-t^{j+1}\vec{f}_{j+1}}\vec{f}e^{t^{j+1}\vec{f}_{j+1}}\ldots\operatorname{Ad}P_k^*e^{t^k\vec{f}_k}E(x)=$$

$$=\mathcal{E}_x(t^1,\ldots,t^k)\operatorname{Ad}P_k^*e^{-t^k\vec{f}_k}\ldots\operatorname{Ad}P_{j+1}^*e^{-t^{j+1}\vec{f}_{j+1}}\vec{f}_j$$

$$\operatorname{Ad}P_{j+1}^*e^{t^{j+1}\vec{f}_{j+1}}\ldots\operatorname{Ad}P_k^*e^{t^k\vec{f}_k}E(x)=\mathcal{E}_x(t^1,\ldots,t^k)\operatorname{Ad}Q_j^*\vec{f}_jE(x),$$

где

$$Q_j^*=\operatorname{Ad}P_k^*e^{-t^k\vec{f}_k}\ldots\operatorname{Ad}P_{j+1}^*e^{-t^{j+1}\vec{f}_{j+1}}\in\mathcal{P}_U.$$

Так как векторы

$$\operatorname{Ad}P_1^*\vec{f}_1E(x),\ldots,\operatorname{Ad}P_k^*\vec{f}_kE(x)$$

образуют базис плоскости $\Pi(x)$, то

$$Q_j{}^*\vec{f}_j E(x)=\sum_{i=1}^{k} a_{ij}(x)\,\mathrm{Ad}\,P_i{}^*\vec{f}_i E(x).$$

Следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial t^j}\mathscr{E}_x(t^1,\ldots,t^k)=\mathscr{E}_x(t^1,\ldots,t^k)\sum_{i=1}^{k} a_{ij}(x)\,\mathrm{Ad}\,P_i{}^*\vec{f}_i E(x).$$

Это и означает, что поля

$$\mathrm{Ad}\,P_1{}^*\vec{f}_1,\ldots,\mathrm{Ad}\,P_k{}^*\vec{f}_k$$

порождают касательное пространство к подмногообразию $S_x\subset M$ в каждой его точке y. Иными словами,

$$T_yS_x=\Pi(y)\quad \forall y\in S_x.$$

По построению

$$S_x\subset M(x_0)\quad \forall x\in M(x_0).$$

Далее, $x\in S_x$, а потому

$$M(x_0)=\bigcup_{x\in M(x_0)} S_x.$$

Таким образом, построен атлас

$$\{S_x;\ x\in M(x_0)\},$$

задающий на орбите $M(x_0)$ структуру гладкого подмногообразия многообразия M.

Теорема доказана.

Отметим, что $M(x_0)$ не является, вообще говоря, регулярно вложенным подмногообразием многообразия M. Соответствующие примеры см., например, в [74].

Далее отметим, что множество достижимости $\mathfrak{A}_{x_0}$ рассматриваемой управляемой системы $\Sigma_U(M,\mathscr{D})$ лежит в $M(x_0)$ при произвольном классе $\mathscr{D}$ допустимых управлений. В самом деле, пусть $u(t)$, $t\in\mathbb{R}$ — произвольное измеримое и ограниченное управление. Тогда, из изложенного выше следует, что поле

$$\vec{f}(u(t))\in\mathscr{F}_U(M)$$

касается многообразия $M(x_0)$ при почти всех $t\in\mathbb{R}$. Но тогда, по теореме существования и единственности решения обыкновенного дифференциального уравнения на гладком многообразии, при всех $t\in\mathbb{R}$

$$\overrightarrow{\exp}\int_0^t \vec{f}(u(\tau))\,d\tau\, E(x_0)\in M(x_0).$$

В литературе (см., например, [74], [77]) действие группы $\mathscr{P}^U$ обычно связывают с понятием динамической полисистемы; орбита

$M(x_0)$ называется там орбитой динамической полисистемы, а подмножество

$$M^+(x_0)=\{e^{t^1\vec{f}_1}\ldots e^{t^k\vec{f}_k};\ t^i\geqslant 0,\ \vec{f}_i\in\mathcal{F}_U(M)\}\,E(x_0)$$

— положительной орбитой. Мы, однако, предпочитаем не пользоваться этой терминологией.

4. Следствия из теоремы Суссмана. Теорема Фробениуса. Ранговые критерии управляемости нелинейных систем. Пусть M — n-мерное дифференцируемое многообразие. Покажем, сначала, как из теоремы Суссмана получается обобщение классической теоремы Фробениуса из дифференциальной геометрии.

Распределением $\mathfrak{X}=\mathfrak{X}(\mathcal{F})$ на многообразии M мы будем называть Ф-линейную оболочку множества $\mathcal{F}\subset\mathrm{Der}(\Phi)$ векторных полей на M — образующих распределения $\mathfrak{X}(\mathcal{F})$. Распределение $\mathfrak{X}=\mathfrak{X}(\mathcal{F})$ называется инволютивным, если

$$[\vec{X}\vec{Y}]\in\mathfrak{X}\quad\forall\vec{X},\ \vec{Y}\in\mathfrak{X}.$$

Всякое распределение $\mathfrak{X}=\mathfrak{X}(\mathcal{F})$ определяет в касательном пространстве T_xM линейное подпространство

$$L_x(\mathfrak{X})=\{\vec{X}E(x);\ \vec{X}\in\mathfrak{X}\}.$$

Интегральным многообразием $N=N(\mathfrak{X})$ распределения $\mathfrak{X}$ называется подмногообразие $N\subset M$ такое, что

$$T_xN=L_x(\mathfrak{X})\quad\forall x\in N.$$

Наибольшее такое подмногообразие называется максимальным интегральным многообразием распределения $\mathfrak{X}=\mathfrak{X}(\mathcal{F})$.

Классическая теорема Фробениуса утверждает, что если на многообразии M имеется инволютивное распределение $\mathfrak{X}=\mathfrak{X}(\mathcal{F})$, то через каждую точку M проходит единственное максимальное интегральное многообразие этого распределения, в случае, если

$$\dim L_x(\mathfrak{X})=\mathrm{const}\quad\forall x\in M.$$

Все остальные интегральные многообразия являются открытыми подмногообразиями многообразия $N=N(\mathfrak{X})$.

Мы докажем, что заключение теоремы Фробениуса остается справедливыми в случае, когда

$$\dim L_x(\mathfrak{X})\neq\mathrm{const}.$$

Теорема 2.2. Пусть $\mathfrak{X}=\mathfrak{X}(\mathcal{F})$ — инволютивное распределение на многообразии M с множеством образующих $\mathcal{F}=\{\vec{f}\}\subset\subset\mathrm{Der}(\Phi)$. Тогда через каждую точку многообразия M проходит единственное максимальное интегральное многообразие $N=N(\mathfrak{X})$ этого распределения. Все остальные интегральные многообразия являются открытыми подмногообразиями многообразия $N = N(\mathfrak{X})$.

Доказательство. Пусть x_0 — произвольная точка многообразия M. Рассмотрим орбиту $M(x_0)$, порожденную множеством $\mathcal{F} = \{\vec{f}\}$ векторных полей, т. е. рассмотрим множество

$$M(x_0) = \{P^* E(x_0);\ P^* \in \mathcal{P}\},$$

где $\mathcal{P}$ — подгруппа группы диффеоморфизмов $\mathrm{Diff}(M)$ многообразия M, порожденная множеством $\{e^{t^1\vec{f}_1} \dots e^{t^k\vec{f}_k};\ t_i \in \mathrm{R},\ f_i \in \mathcal{F}\}$:

$$\mathcal{P} = \{e^{t^1\vec{f}_1} \dots e^{t^k\vec{f}_k};\ t^i \in \mathrm{R},\ \vec{f}_i \in \mathcal{F}\}.$$

По теореме Суссмана $M(x_0)$ есть гладкое подмногообразие многообразия M. Докажем, что оно и является искомым максимальным интегральным многообразием распределения $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}(\mathcal{F})$. Так как касательное пространство к орбите $M(x_0)$ есть

$$T_x M(x_0) = \Pi(x) = \mathrm{span}\{\mathrm{Ad}\, P^* \vec{f} E(x);\ P^* \in \mathcal{P},\ \vec{f} \in \mathcal{F}\},$$

то достаточно доказать, что $\forall x \in M(x_0)$

$$\Pi(x) = L_x(\mathfrak{X}) = \{\vec{X} E(x);\ \vec{X} \in \mathfrak{X}\}.$$

Поскольку при любом $x \in M(x_0)$

$$L_x(\mathfrak{X}) \subset \Pi(x),$$

то достаточно доказать, что $\forall x \in M(x_0)$

$$L_x(\mathfrak{X}) \supset \Pi(x).$$

Для этого, очевидно, достаточно проверить, что $\forall t \in \mathrm{R}$, $\forall \vec{X}, \vec{Y} \in \mathcal{F}$

$$e^{t\,\mathrm{ad}\vec{X}} \vec{Y} E(x) = \mathrm{Ad}\, e^{t\vec{X}} \vec{Y} E(x) \in L_x(\mathfrak{X}).$$

Пусть векторные поля $\vec{X}_1, \dots, \vec{X}_k$ образуют базис плоскости $L_x(\mathfrak{X})$. Тогда существуют $a^{\alpha}_{\beta}, b_{\alpha}$, $\alpha = 1, \dots, k$, $\beta = 1, \dots, k$ такие, что

$$[\vec{X}\vec{X}_j] E(x) = \sum_{\alpha=1}^{k} a^j_{\alpha} \vec{X}_{\alpha} E(x), \quad \vec{Y} E(x) = \sum_{\alpha=1}^{k} b_{\alpha} \vec{X}_{\alpha} E(x).$$

Покажем, что найдутся гладкие функции времени $c^{\beta}_{\alpha}(t)$, $\alpha, \beta = 1, \dots, k$, такие, что

$$e^{t\,\mathrm{ad}\vec{X}} \vec{X}_{\beta} E(x) = \sum_{\alpha=1}^{k} c^{\beta}_{\alpha}(t) \vec{X}_{\alpha} E(x).$$

В самом деле, дифференцируя последнее равенство, имеем:

$$\frac{d}{dt} e^{t\,\mathrm{ad}\vec{X}} \vec{X}_{\beta} E(x) = e^{t\,\mathrm{ad}\vec{X}} [\vec{X}\vec{X}_{\beta}]_{E(x)} = e^{t\,\mathrm{ad}\vec{X}} \sum_{\alpha=1}^{k} a^{\beta}_{\alpha} \vec{X}_{\alpha} E(x) =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{k} a_\alpha^\beta e^{t\,\mathrm{ad}\vec{X}} \vec{X}_\alpha E(x) = \sum_{\alpha=1}^{k} a_\alpha^\beta e^{t\,\mathrm{ad}\vec{X}} \vec{X}_\alpha E(x) =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{k} a_\alpha^\beta \sum_{\gamma=1}^{k} c_\gamma^\alpha(t) \vec{X}_\gamma E(x) = \sum_{\gamma=1}^{k} \dot{c}_\gamma^\beta(t) \vec{X}_\gamma E(x).$$

Отсюда получаем линейную систему дифференциальных уравнений для определения коэффициентов $c_\beta^\alpha(t)$:

$$\dot{c}_\gamma^\beta(t) = \sum_{\alpha=1}^{k} a_\alpha^\beta c_\gamma^\alpha(t), \quad \gamma, \beta = 1, \ldots, k,$$

с начальными условиями

$$c_\beta^\alpha(0) = \delta_\beta^\alpha = \begin{cases} 1, & \alpha = \beta, \\ 0, & \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

Следовательно, функции $c_\beta^\alpha(t)$, $t \in \mathrm{R}$, $\alpha, \beta = 1, \ldots, k$ существуют. Далее,

$$e^{t\,\mathrm{ad}\vec{X}} \vec{Y} E(x) = \sum_{\alpha=1}^{k} b_\alpha e^{t\,\mathrm{ad}\vec{X}} \vec{X}_\alpha E(x) = \sum_{\alpha=1}^{k} \sum_{\beta=1}^{k} c_\beta^\alpha(t) b_\alpha \vec{X}_\beta E(x).$$

Это доказывает, что $\forall \vec{X}, \vec{Y} \in \mathcal{F}$, $t \in \mathrm{R}$,

$$e^{t\,\mathrm{ad}\vec{X}} \vec{Y} E(x) \in L_x(\mathfrak{X}),$$

а значит, $\Pi(x) \subset L_x(\mathfrak{X})$.

Следовательно, орбита $M(x_0)$ является интегральным многообразием распределения $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}(\mathcal{F})$. Она является и максимальным интегральным многообразием этого распределения, ибо всякое поле $\vec{X} \in \mathfrak{X}(\mathcal{F})$ касается плоскости $\Pi(x)$ в любой точке $x \in M(x_0)$.

Теорема доказана.

Вернемся к рассмотрению управляемой системы $\Sigma_U(M, \mathcal{D})$ на многообразии M. Обозначим через $[\mathcal{F}_U(M)]$ алгебру Ли векторных полей на M, порожденную семейством

$$\mathcal{F}_U(M) = \{\vec{f}(u);\ u \in U\} \subset \mathrm{Der}(\Phi).$$

Рангом управляемой системы

$$\Sigma_U(M, \mathcal{D}) = \langle \mathcal{F}_U(M), \ \mathcal{D} \rangle$$

в точке x мы будем называть размерность линейного подпространства

$$[\mathcal{F}_U(M)]\, E(x) = \{\vec{X} E(x);\ \vec{X} \in [\mathcal{F}_U(M)]\} \subset T_x M.$$

Напомним, что размерностью управляемой системы $\Sigma_U(M, \mathcal{D})$ в точке x мы называли размерность плоскости

$$\Pi(x)=\operatorname{span}\{\operatorname{Ad}P^*\vec{f};\ \vec{f}\in\mathcal{F}_U(M),\ P^*\in\mathcal{P}_U\}E(x).$$

Предложение 2.5. Ранг управляемой системы $\Sigma_U(M, \mathcal{D})$ в точке x_0 не превосходит ее размерности в этой же точке.

Доказательство. В процессе доказательства теоремы 2.1 было установлено, что всякое поле $\vec{f}\in\mathcal{F}_U(M)$ касается многообразия $M(x_0)$ — орбиты управляемой системы $\Sigma_U(M, \mathcal{D})$. Следовательно, многообразия $M(x_0)$ касаются и поля, полученные коммутированием элементов семейства $\mathcal{F}_U(M)$ векторных полей на M. Но это означает, что $\forall x_0\in M$

$$[\mathcal{F}_U(M)]E(x_0)\subset\Pi(x_0),$$

а значит,

$$\dim[\mathcal{F}_U(M)]E(x_0)\leqslant\dim\Pi(x_0).$$

Из этого предложения сразу следует результат, обобщающий теорему Чжоу [29] (см., [62]):

Теорема 2.3. Предположим, что ранг управляемой системы $\Sigma_U(M, \mathcal{D})$ равен размерности многообразия M в каждой его точке. Тогда для всякого $x_0\in M$ орбита $M(x_0)$ управляемой системы является открытым подмногообразием многообразия M.

Ранг управляемой системы является более просто вычисляемой ее характеристикой. Поэтому естественный интерес вызывают случаи, когда ранг управляемой системы оказывается равным ее размерности, будучи меньшим размерности многообразия M. Мы отметим здесь два таких случая.

Предложение 2.6. Пусть M — аналитическое многообразие, а $\mathcal{F}_U(M)$ — семейство аналитических векторных полей на M. Тогда в каждой точке многообразия M ранг управляемой системы $\Sigma_U(M, \mathcal{D})$ равен ее размерности.

Доказательство. Пусть x_0 — произвольная точка многообразия M, $P^*=e^{t^1\vec{f}_1}\ldots e^{t^k\vec{f}_k}$ — произвольный элемент подгруппы $\mathcal{P}_U$. Так как

$$\operatorname{Ad}e^{t^i\vec{f}_i}=e^{t^i\operatorname{ad}\vec{f}_i},$$

то $\operatorname{Ad}P^*=(\operatorname{Ad}e^{t^1\vec{f}_1})\ldots(\operatorname{Ad}e^{t^k\vec{f}})=e^{t^1\operatorname{ad}\vec{f}_1}\ldots e^{t^k\operatorname{ad}\vec{f}_k}$. Поскольку $\vec{f}_i$ — аналитические векторные поля, то (см. приложение) ряд

$$e^{t^i\operatorname{ad}\vec{f}_i}\vec{f}E(x_0)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(t^i)^k}{k!}\operatorname{ad}^k\vec{f}_i\vec{f}E(x_0)$$

сходится в достаточно малой окрестности точки x_0 $\forall\vec{f}\in\mathcal{F}_U(M)$. Но это означает, что для любого $P^*=e^{t^1\vec{f}_1}\ldots e^{t^k\vec{f}_k}\in\mathcal{P}_U$ и поля $\vec{f}\in\mathcal{F}_U(M)$

$$\operatorname{Ad} P^* \vec{f} E(x_0) = \sum_{i_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{i_k=0}^{\infty} \frac{(t^1)^{i_1}}{(i_1)!} \ldots \frac{(t^x)^{i_k}}{(i_k)!} \operatorname{ad}^{i_1} \vec{f}_1 \circ \ldots$$

$$\ldots \circ \operatorname{ad}^{i_k} \vec{f}_k \vec{f} E(x_0) \in [\mathscr{F}_U(M)](x_0).$$

То есть

$$\Pi(x_0) \subset [\mathscr{F}_U(M)](x_0).$$

Предложение доказано.

Более общо, указанное совпадение ранга и размерности управляемой системы $\Sigma_U(M, \mathscr{D})$ в данной точке x_0 имеет место в случае, если семейство $\mathscr{F}_U(M)$ является локально конечно порожденным в этой точке. Напомним, что семейство

$$\mathscr{F} = \{\vec{f}\}$$

векторных полей на многообразии N называется локально конечно порожденным в точке x_0, если существует окрестность $V(x_0)$ этой точки, гладкие функции a_j, $j = 1, \ldots, p$ и поля $\vec{X}_j$, $j = 1, \ldots, p$, такие, что

$$\vec{X} E(x) = \sum_{j=1}^{p} a_j(x) \vec{X}_j E(x) \quad \forall \vec{X} \in \mathscr{F}.$$

Предложение 2.7. Пусть семейство $\mathscr{F}_U(M)$ является локально конечно порожденным в точке x_0. Тогда размерность управляемой системы $\Sigma_U(M, \mathscr{D})$ равна в этой точке размерности линейного подпространства

$$\operatorname{span} \mathscr{F}_U(M) E(x_0)$$

и, в частности, рангу управляемой системы $\Sigma_U(M, \mathscr{D})$ в этой точке.

Доказательство этого утверждения в общих чертах аналогично приведенному выше доказательству теоремы Фробениуса. На нем мы не будем останавливаться; полное доказательство можно найти в работе [76].

На самом деле, у «почти всех» управляемых систем размерность совпадает с рангом во всех точках. Именно, имеет место

Теорема 2.4. Множество управляемых систем, у которых ранг равен размерности соответствующего многообразия во всех его точках, образует открытое и плотное множество в C^k-топологии Уитни ($k \geqslant \dim M$). Доказательство см. в [76].

Про системы, ранг которых равен размерности соответствующего многообразия в каждой его точке, говорят, что они находятся в общем положении.

Орбиты этих управляемых систем являются открытыми подмногообразиями соответствующих многообразий. В случае, когда соответствующее многообразие связно, всякая орбита совпадает с ним. Теорема 2.4 утверждает, таким образом, что «почти все» управляемые системы являются тривиальными. Итак, пусть M связно.

Теорема 2.5. Орбита $M(x_0)$ совпадает с M тогда (и только тогда в аналитическом случае), когда ранг управляемой системы равен $\dim M$ в каждой точке M, т. е. когда управляемая система находится в общем положении.

Доказательство. Необходимость следует из предложения 2.6. Достаточность следует из связности многообразия M и теоремы 2.3.

Теорема 2.6. Внутренность множества достижимости $\mathfrak{A}_{x_0}$ управляемой системы плотна в $\mathfrak{A}_{x_0}$ тогда (и только тогда — в аналитическом случае), когда эта система имеет ранг равный размерности M в точке x_0.

Доказательство. Необходимость. Так как $\mathfrak{A}_{x_0}$ принадлежит орбите $M(x_0)$, то необходимость следует из теоремы 2.5.

Достаточность см. в [62].

Рассмотрим теперь несколько случаев, когда множество достижимости $\mathfrak{A}_{x_0}$ из точки x_0 управляемой системы $\Sigma_U(M, \mathscr{D})$ совпадает с орбитой $M(x_0)$ и выведем отсюда условия, при которых она окажется управляемой из этой точки в смысле данных выше определений.

Управляемая система называется симметричной, если $\forall \vec{f}(u) \in \mathscr{F}_U(M)$ существует $\vec{f}(v) \in \mathscr{F}_U(M)$ такое, что $\vec{f}(u) = -\vec{f}(v)$.

Предложение 2.8. Симметричная управляемая система $\Sigma_U(M, \mathscr{D})$ управляема тогда (и только тогда — в аналитическом случае), когда она находится в общем положении.

Доказательство. Так как M связно, а система находится в общем положении, то $M = M(x_0)$. В силу ее симметричности, $\mathfrak{A}_{x_0} = M(x_0)$.

Пусть теперь M — компактное риманово многообразие, а векторные поля $\vec{f} \in \mathscr{F}_U(M)$ консервативны, т. е. порожденные ими однопараметрические подгруппы сохраняют естественную меру на этом многообразии. Такая управляемая система называется консервативной. В работе [75] доказана

Теорема 2.7. Консервативная управляемая система управляема тогда (и только тогда в аналитическом случае), когда она находится в общем положении.

По поводу дальнейших результатов, полученных в этом направлении, см. последние работы Джорджевича и Купки [53], [54].

§ 3. ХРОНОЛОГИЧЕСКАЯ СВЯЗНОСТЬ. ВАРИАЦИИ ОТОБРАЖЕНИЯ exp

В предыдущем параграфе были установлены условия управляемости систем общего вида. Из изложенного ясно, что изучение вопросов управляемости связано с исследованием свойств отображения

$$u(\cdot)\mapsto \overrightarrow{\exp}\int_0^t \vec{f}(u(\tau))\,d\tau.$$

Условия управляемости, о которых шла речь в § 2, получались, в основном, из анализа глобальных свойств этого отображения. В этом параграфе мы будем изучать инфинитизимальные его свойства и соответствующим образом интерпретировать их в терминах управляемых систем. Как обычно, мы начнем с конечномерного, матричного случая.

1. Левоинвариантные связности на матричной группе Ли и их геодезические. Пусть G — подгруппа Ли полной линейной группы $\mathrm{Gl}(n;\ \mathbb{R})$. Рассмотрим группу Ли ΩG, элементами которой являются абсолютно непрерывные кривые

$$X=\{X_t,\quad t\in\mathbb{R}\},$$

в группе G, такие, что $X_0=I$. Умножение элементов $X=\{X_t,\ t\in\mathbb{R}\}$, $Y=\{Y_t,\ t\in\mathbb{R}\}$ этой группы определяется поточечно

$$(XY)_t=X_tY_t\quad \forall t\in\mathbb{R}.$$

Докажем, что алгеброй Ли этой группы ΩG является множество Ωg абсолютно непрерывных кривых

$$\mathcal{A}=\{\mathcal{A}_t,\ t\in\mathbb{R}\}$$

в алгебре Ли g группы G таких, что $\mathcal{A}_0=0$; при этом, умножение в алгебре Ли Ωg задается поточечно: если $\mathcal{A}=\{\mathcal{A}_t,\ t\in\mathbb{R}\}$, $\mathcal{B}=\{\mathcal{B}_t,\ t\in\mathbb{R}\}\in\Omega g$, то

$$[\mathcal{A}\mathcal{B}]_t=[\mathcal{A}_t\mathcal{B}_t]\quad \forall t\in\mathbb{R}.$$

В самом деле, пусть $X(s)=\{X_t(s),\ t\in\mathbb{R}\}$ — гладкая кривая в группе ΩG, проходящая через единицу $I=\{I;\ t\in\mathbb{R}\}$ этой группы при $s=0$. Тогда касательный вектор

$$\mathcal{A}_t=\frac{\partial}{\partial s}X_t(s)\,|_{s=0},\quad t\in\mathbb{R},$$

в единице группы ΩG к этой кривой является, очевидно, абсолютно непрерывным семейством элементов алгебры Ли g. Далее, так как $X_0(s)\equiv I$, то $\frac{\partial}{\partial s}X_0(0)=0=\mathcal{A}_0$.

Обратно, пусть $\mathcal{A}_t$, $t\in\mathbb{R}$, — произвольное абсолютно непрерывное семейство элементов алгебры Ли g такое, что $\mathcal{A}_0=0$. Докажем, что оно является касательным вектором к некоторой гладкой кривой $X(\varepsilon)$ в группе ΩG в I.

В самом деле, всякое такое семейство $\mathcal{A}_t$, $t \in \mathbf{R}$, допускает представление

$$\mathcal{A}_t = \int_0^t A_\tau d\tau, \quad t \in \mathbf{R},$$

где A_t, $t \in \mathbf{R}$ — локально интегрируемое семейство элементов $g \subset \mathrm{gl}(n; \mathbf{R})$. Рассмотрим кривую

$$X(\varepsilon) = \{X_t(\varepsilon);\ t \in \mathbf{R}\}$$

в группе ΩG такую, что

$$\frac{d}{dt} X_t(\varepsilon) = \varepsilon A_t X_t(\varepsilon), \quad X_0(\varepsilon) = I,$$

т. е. рассмотрим кривую

$$X(\varepsilon) = \left\{ X_t(\varepsilon) = \overleftarrow{\exp} \int_0^t \varepsilon A_\tau d\tau,\ t \in \mathbf{R} \right\}.$$

Используя формулу вариаций, вычислим касательный вектор к этой кривой в точке I, т. е. при $\varepsilon = 0$. Имеем:

$$\frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \overleftarrow{\exp} \int_0^t \varepsilon A_\tau d\tau =$$

$$= \overleftarrow{\exp} \int_0^t \varepsilon A_\tau d\tau \int_0^t \overrightarrow{\exp} \int_0^\tau - \varepsilon \quad \mathrm{ad}\, A_\theta d\theta A_\tau d\tau \Big|_{\varepsilon=0} = \int_0^t A_\tau d\tau = \mathcal{A}_t.$$

Следовательно, установлено взаимно однозначное соответствие между всеми абсолютно непрерывными кривыми $\mathcal{A}_t$, $t \in \mathbf{R}$, в ε, обращающимися в нуль при $t = 0$ и касательными векторами в единице группы ΩG.

При этом отображение $\overleftarrow{\exp}$, сопоставляющее интегралу по t $\int_0^t A_\tau d\tau$, $t \in \mathrm{R}$, правой части A_t, $t \in \mathrm{R}$, дифференциального уравнения

$$\dot{X} = A_t X, \quad X_0 = I, \tag{3.1}$$

его решение

$$X_t = \overleftarrow{\exp} \int_0^t A_\tau d\tau, \quad t \in \mathrm{R},$$

отображает Ωg на ΩG взаимно однозначно: это следует из теоремы существования и единственности решения дифференциального уравнения (3.1).

Инфинитизимальные свойства этого отображения

$$\overleftarrow{\exp}:\Omega g \to \Omega G$$

мы будем изучать, возмущая правую часть уравнения (3.1), добавляя к A_t элементы вида εB_t, где ε — малый параметр, а $B_t \in \mathfrak{B}$ — фиксированному подмножеству $\mathfrak{gl}(n; \mathbf{R})$. Иными словами, мы будем рассматривать возмущенное уравнение

$$\dot{Q} = A_t Q + \varepsilon B Q, \quad Q_0 = I,$$

решение которого

$$Q_t(\varepsilon) = \overleftarrow{\exp} \int_0^t (A_\tau + \varepsilon B_\tau)\, d\tau, \quad t \in \mathbf{R},$$

является возмущением решения исходного уравнения (3.1), т. е. кривой

$$X_t = \overleftarrow{\exp} \int_0^t A_\tau d\tau, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Оказывается, что на группе ΩG существует такая левоинвариантная линейная связность, что любая кривая в ΩG вида

$$Q_t(\varepsilon) = \overleftarrow{\exp} \int_0^t (A_\tau + \varepsilon B_\tau)\, d\tau$$

является геодезической этой связности. Эта связность будет введена в следующем пункте, а пока мы напомним некоторые дифференциально-геометрические понятия.

Пусть $\mathfrak{L}$ — некоторая группа Ли, а $\mathfrak{l}$ — ее алгебра Ли.

Левоинвариантной линейной связностью на группе Ли $\mathfrak{L}$ называется билинейное отображение

$$\nabla: \mathfrak{l} \times \mathfrak{l} \to \mathfrak{l}.$$

Левоинвариантная связность однозначно определяется действием на левоинвариантные векторные поля. Именно, если $\overrightarrow{xa}$ и $\overrightarrow{xb}$ — левоинвариантные векторные поля на группе Ли $\mathfrak{L}$ ($x \in \mathfrak{L}$, $a, b \in \mathfrak{l}$), то

$$\nabla_{\overrightarrow{xa}} \overrightarrow{xb} = \overrightarrow{x \nabla_a b}.$$

Результат применения $\nabla_a b$ линейной связности ∇ к паре $a, b \in \mathfrak{l}$ называется ковариантной производной b вдоль a (или в направлении a).

Пусть $x(s)$, $s \in \mathbf{R}$, — гладкая кривая в группе Ли $\mathfrak{L}$,

$$\frac{d}{ds} x(s) = x(s)\, a(s), \quad a(s) \in \mathfrak{l}.$$

Говорят, что семейство $b(t)$, $t \in \mathbf{R}$, элементов $\mathfrak{l}$ параллельно вдоль кривой $x(t)$, $t \in \mathbf{R}$, если

$$\frac{d}{dt} b(t) + \nabla_{a(t)} b(t) = 0.$$

Гладкая кривая $x(t)$, $t \in \mathbf{R}$ в группе $\mathfrak{L}$ называется геодезической связности ∇, если ее «угловая» скорость $a(t)$, $t \in \mathbf{R}$, параллельна вдоль $x(t)$:

$$\frac{d}{dt} x(t) = x(t)\, a(t), \quad \frac{d}{dt} a(t) + \nabla_{a(t)} a(t) = 0. \qquad (3.2)$$

Общее решение уравнений (3.2) принято называть геодезическим потоком линейной связности ∇.

Пусть ∇ — линейная связность на группе Ли $\mathfrak{L}$, $\mathrm{Hom}(\mathfrak{l})$ — множество линейных отображений $\mathfrak{l}$ в себя.

Отображение R: $\mathfrak{l} \times \mathfrak{l} \to \mathrm{Hom}(\mathfrak{l})$, определенное формулой

$$R(a, b)\, c = \nabla_a \nabla_b c - \nabla_b \nabla_a c - \nabla_{[a,b]} c \quad \forall a, b, c \in \mathfrak{l},$$

называется кривизной линейной связности ∇, а отображение T: $\mathfrak{l} \times \mathfrak{l} \to \mathfrak{l}$, определенное формулой

$$T(a, b) = \nabla_a b - \nabla_b a - [a, b] \quad \forall a, b \in \mathfrak{l},$$

— ее кручением.

Легко видеть, что $\forall a, b, c \in \mathfrak{L}$

$$T(a, b) = -T(b, a), \; R(a, b)\, c = -R(b, a)\, c.$$

Кривизна и кручение являются мерой некоммутативности и несимметричности линейной связности ∇.

Разные линейные связности могут порождать один и тот же геодезический поток. Однако если задано кручение линейной связности, то она однозначно восстанавливается по геодезическому потоку.

Если задан геодезический поток, то обычно соответствующую связность выбирают таким образом, чтобы ее кручение было равно нулю.

Каноническим примером уравнений вида (3.2) являются уравнения Эйлера движения твердого тела.

Движение твердого тела в $\mathbf{R}^3$ можно описать с помощью гладких кривых в группе $\mathrm{SO}(3; \mathbf{R})$. Пусть $Q(t)$, $t \in \mathbf{R}$, — такая кривая, тогда

$$\frac{d}{dt} Q(t) = Q(t)\, \Omega(t),$$

где

$$\Omega(t) = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_3(t) & \Omega_2(t) \\ \Omega_3(t) & 0 & -\Omega_1(t) \\ -\Omega_2(t) & \Omega_1(t) & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{so}(3; \mathbf{R}).$$

Вектор $\omega(t)=\begin{pmatrix}\Omega_1(t)\\ \Omega_2(t)\\ \Omega_3(t)\end{pmatrix}$ является угловой скоростью кривой $Q(t)$, $t\in\mathbf{R}$, в системе координат, связанной с телом.

Пусть $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — инвариантное скалярное произведение в алгебре Ли so (3; R):

$$\langle\Omega, \Lambda\rangle=\frac{1}{2}\operatorname{tr}\Omega\Lambda^* \quad \forall\Omega, \Lambda\in\mathrm{so}(3;\mathbf{R}).$$

Если A — симметричная матрица, то соответствие

$$\Omega\mapsto A\circ\Omega=A\Omega+\Omega A: \mathrm{so}(3;\mathbf{R})\to\mathrm{so}(3;\mathbf{R})$$

является самосопряженным преобразованием so (3; R).

Кинетической энергией твердого тела является квадратичная форма на so (3; R). Всякая такая форма имеет вид $\frac{1}{2}\langle A\circ\Omega, \Omega\rangle$, где A — некоторая симметричная 3×3 матрица.

Движение твердого тела, в силу принципа наименьшего действия, происходит по экстремалям функционала действия

$$\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\langle A\circ\Omega, \Omega\rangle\,dt. \tag{3.3}$$

Найдем первую вариацию функционала действия вдоль данной кривой $Q(t)$, $t\in\mathbf{R}$. Пусть $B(t)\in\mathrm{so}(3;\mathbf{R})$, $t\in\mathbf{R}$, и $B(t_0)=B(t_1)=0$. С кривой $B(t)$, $t\in\mathbf{R}$, в алгебре Ли связано семейство возмущений

$$Q_\varepsilon(t)=Q(t)\,e^{\varepsilon B(t)}$$

данной кривой в группе so (3; R). Пусть $\Omega_\varepsilon(t)$ — соответствующее возмущение угловой скорости,

$$\frac{d}{dt}Q_\varepsilon(t)=Q_\varepsilon(t)\,\Omega_\varepsilon(t).$$

Непосредственное вычисление дает

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\Omega_\varepsilon(t)|_{\varepsilon=0}=[\Omega(t)\ \ B(t)]+\dot{B}(t).$$

Следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\langle A\circ\Omega_\varepsilon(t), \Omega_\varepsilon(t)\rangle\,dt|_{\varepsilon=0}=$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\langle A\circ\Omega(t), [\Omega(t), B(t)]+\dot{B}(t)\rangle\,dt=$$

$$=-\int_{t_0}^{t_1}\langle[\Omega(t), A\circ\Omega(t)]+A\circ\dot{\Omega}(t), B(t)\rangle\,dt.$$

Из последней формулы следует, что кривая $Q(t)$, $t \in \mathrm{R}$ в том и только том случае является экстремалью действия, когда

$$A \circ \dot{\Omega}(t) + [\Omega(t)\ A \circ \Omega(t)] = 0. \qquad (3.4)$$

Полученное уравнение (3.4) называется уравнением Эйлера движения твердого тела.

Пусть $\mathfrak{A}$ — оператор, сопоставляющий $B \in \mathrm{so}(3; \mathbf{R})$ матрицу $A \circ B$. Тогда уравнение (3.5) может быть переписано в виде

$$\dot{\Omega} + \mathfrak{A}^{-1}[\Omega\ \mathfrak{A}\Omega] = 0. \qquad (3.5)$$

Рассмотрим связность $\tilde{\nabla}$ на группе $\mathrm{so}(3; \mathbf{R})$, определенную формулой

$$\tilde{\nabla}_\Lambda \Omega = \frac{1}{2}([\Lambda, \Omega] + \mathfrak{A}^{-1}[\Lambda\ \mathfrak{A}\Omega] + \mathfrak{A}^{-1}[\Omega, \mathfrak{A}\Lambda]).$$

Движения твердого тела, очевидно, являются геодезическими этой связности. Выбор связности именно такого типа связан с тем, что ее кручение равно нулю:

$$T(\Lambda, \Omega) = \tilde{\nabla}_\Lambda \Omega - \tilde{\nabla}_\Omega \Lambda - [\Lambda\Omega] = \frac{1}{2}([\Lambda\Omega] + \mathfrak{A}^{-1}[\Lambda \mathfrak{A}\Omega] +$$

$$+ \mathfrak{A}^{-1}[\Omega \mathfrak{A}\Lambda]) - \frac{1}{2}([\Omega\Lambda] + \mathfrak{A}^{-1}[\Omega\ \mathfrak{A}\Lambda] + \mathfrak{A}^{-1}[\Lambda \mathfrak{A}\Omega]) - [\Lambda\Omega] = 0.$$

Однако, по крайней мере, для рассматриваемого случая более естественно рассмотреть связность ∇,

$$\nabla_\Lambda \Omega = \mathfrak{A}^{-1}[\Lambda \mathfrak{A}\Omega], \qquad (3.6)$$

вид которой сразу усматривается из уравнения (3.5), тогда как то, что движения твердого тела являются геодезическими рассмотренной связности $\tilde{\nabla}$, требует дополнительной проверки.

Кривизна этой связности ∇ равна нулю, а кручение

$$T(\Lambda, \Omega) = \mathfrak{A}^{-1}([\mathfrak{A}\Lambda\Omega] + [\Lambda \mathfrak{A}\Omega]) - [\Lambda\Omega]$$

обращается в нуль в том и только том случае, когда оператор $\mathfrak{A}$ является дифференцированием алгебры Ли. Связности такого типа и будут рассмотрены ниже.

2. **Хронологическая связность. Вариации отображения.** Рассмотрим снова группу ΩG и ее алгебру Ли Ωg. Пусть

$$\mathcal{A} = \{\mathcal{A}_\tau, \tau \in \mathrm{R}\}, \quad \mathcal{B} = \{\mathcal{B}_\tau, \tau \in \mathrm{R}\} \in \Omega g.$$

Линейная связность ∇ на ΩG, определенная по формуле

$$(\nabla_{\mathcal{A}} \mathcal{B})_t = \int_0^t \left[\mathcal{A}_\tau \frac{d}{d\tau} \mathcal{B}_\tau\right] d\tau \quad \forall t \in R, \qquad (3.7)$$

называется хронологической.

Отметим, что эта связность того же типа, что и связность (3.6), рассмотренная выше, только здесь вместо оператора $\mathfrak{A}$

стоит оператор $\frac{d}{dt}$. Так как $\frac{d}{dt}$ — дифференцирование, то кручение этой связности равно нулю:

$$T(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \int_0^t \left(\left[\frac{d}{d\tau} \mathcal{A}_\tau \mathcal{B}_\tau \right] + \left[\mathcal{A}_\tau \frac{d}{d\tau} \mathcal{B}_\tau \right] \right) d\tau - [\mathcal{A}_t \mathcal{B}_t] = 0.$$

Кривизна этой связности также равна нулю.

Докажем, что кривая

$$Q_t(\varepsilon) = \overleftarrow{\exp} \int_0^t (A_\tau + \varepsilon B_\tau)\, d\tau, \quad \varepsilon \in \mathrm{R},$$

в группе ΩG является геодезической этой связности. В самом деле, используя формулу вариаций, имеем:

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} Q_t(\varepsilon) = \overleftarrow{\exp} \int_0^t (A_\tau + \varepsilon B_\tau)\, d\tau \int_0^t \overrightarrow{\exp} \int_0^\tau - \operatorname{ad}(A_\theta + \varepsilon B_\theta)\, B_\tau d\theta d\tau.$$

Пусть

$$Z_t(\varepsilon) = \int_0^t \overrightarrow{\exp} \int_0^\tau - \operatorname{ad}(A_\theta + \varepsilon B_\theta)\, d\theta B_\tau d\tau. \tag{3.8}$$

Непосредственные вычисления, с использованием формулы вариаций, дают, что

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} Z_t(\varepsilon) + \nabla_{Z_t(\varepsilon)} Z_t(\varepsilon) = 0.$$

Таким образом,

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} Q_t(\varepsilon) &= Q_t(\varepsilon) Z_t(\varepsilon), \\ \frac{\partial}{\partial \varepsilon} Z_t(\varepsilon) + \nabla_{Z_t(\varepsilon)} Z_t(\varepsilon) &= 0, \end{aligned}\right\}$$

т. е. кривая

$$Q_t(\varepsilon) = \int_0^t (A_\tau + \varepsilon B_\tau)\, d\tau$$

является геодезической связности

$$\nabla_{\mathcal{A}_t} \mathcal{B}_t = \int_0^t \left[\mathcal{A}_\tau \frac{\partial}{\partial \tau} \mathcal{B}_\tau \right] d\tau,$$

кривизна и кручение которой равны нулю:

$$R(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = 0, \quad T(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = 0$$

$$\forall\ \mathcal{A}=\{\mathcal{A}_t,\ t\in\mathrm{R}\},\quad \mathcal{B}=\{B_t,\ t\in\mathrm{R})\}\in\Omega g.$$

Еще одно важное свойство этой связности заключается в следующем. Предположим, что алгебра Ли g полупроста. В этом случае обозначим через $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ форму Киллинга на g

$$\langle A,\ B\rangle=\mathrm{tr}\,(\mathrm{ad}\,A\circ\mathrm{ad}\,B)\quad \forall A,\ B\in g.$$

Отображение

$$(\mathcal{A},\ \mathcal{B})\mapsto\int_0^T\langle \frac{d}{d\tau}\mathcal{A}_\tau,\ \frac{d}{d\tau}\mathcal{B}_\tau\rangle\,d\tau,\quad T>0,$$

$$\mathcal{A}=\{\mathcal{A}_\tau,\ \tau\in\mathrm{R}\},\quad \mathcal{B}=\{\mathcal{B}_\tau,\ \tau\in\mathrm{R}\}\in\Omega g$$

является билинейной формой на Ωg. Эта форма задает некоторую левоинвариантную псевдометрику на группе ΩG. Оказывается, что хронологическая связность ∇ (3.7) согласована с этой метрикой: $\forall\mathcal{A}=\{\mathcal{A}_\tau,\ \tau\in\mathrm{R}\}$, $\mathcal{B}=\{\mathcal{B}_\tau,\ \tau\in\mathrm{R}\}$, $\mathcal{C}=\{\mathcal{C}_\tau,\ \tau\in\mathrm{R}\}\in\Omega g$

$$\int_0^T\langle\frac{d}{d\tau}(\nabla_{\mathcal{C}_\theta}\mathcal{A}_\tau),\ \frac{d}{d\tau}\mathcal{B}_\tau\rangle\,d\tau+\int_0^T\langle\frac{d}{d\tau}\mathcal{A}_\tau,\ \frac{d}{d\tau}\nabla_{\mathcal{C}_\theta}\mathcal{B}_\tau\rangle\,d\tau=0.$$

Вернемся к рассмотрению уравнения

$$\dot{Z}_t(\varepsilon)+\nabla_{Z_t(\varepsilon)}Z_t(\varepsilon)=0,\quad Z_t(0)=\int_0^t\overrightarrow{\exp}\int_0^\tau-\mathrm{ad}\,A_\theta d\theta B_\tau d\tau.$$

Его решение $Z_t(\varepsilon)$ по аналогии со случаем твердого тела, мы будем называть угловой скоростью кривой

$$Q_t(\varepsilon)=\overleftarrow{\exp}\int_0^t(A_\tau+\varepsilon B_\tau)\,d\tau.$$

Пусть

$$D_t=\int_0^t\overrightarrow{\exp}\int_0^\tau-\mathrm{ad}\,A_\theta d\theta B_\tau d\tau.$$

Можно доказать, что уравнение

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}Z_t(\varepsilon)+\nabla_{Z_t(\varepsilon)}Z_t(\varepsilon)=0,\quad Z_t(0)=D_t \tag{3.9}$$

имеет единственное решение, а именно $Z_t(\varepsilon)$, $t\in\mathrm{R}$ (3.7.1), которое можно представить сходящимся при достаточно малых ε рядом

$$Z_t(\varepsilon)=\sum_{k=1}^\infty Z_t^{(k)}\varepsilon^{k-1}. \tag{3.10}$$

Коэффициенты этого ряда последовательно находятся из уравнения (3.9)

$$Z_t^{(1)}=D_t,$$
$$Z_t^{(2)}=-\nabla_{D_t}D_t,$$
$$Z_t^{(3)}=-\frac{1}{2}(\nabla_{D_t}\nabla_{D_t}D_t+\nabla_{\nabla_{D_t}D_t}D_t),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

и выражаются через единственную билинейную операцию ∇.

Эти коэффициенты называются вариациями отображения $\overleftarrow{\exp}$ в точке

$$\overleftarrow{\exp}\int_0^t A_\tau d\tau.$$

k-тая вариация представляет собой k-линейное отображение алгебры Ли Ωg в себя:

$$Z_t^{(k)}:(B_{\tau_1},\ldots,\ B_{\tau_k})\mapsto Z_t^{(k)}(B_{\tau_1},\ldots,\ B_{\tau_k}).$$

Значение этих вариаций состоит, например, в том, что если при данных B_τ и t первые $k-1$ вариаций обращаются в нуль: $Z_t^{(i)}=0$, $i=1,\ldots,k-1$, то

$$Q_t(\varepsilon)=\mathrm{Id}+Z_t^{(k)}\frac{\varepsilon^k}{k}+O(\varepsilon^{k+1}) \qquad \textbf{(3.11)}$$

С этой точки зрения, разложение (3.10) можно **рассматривать** как разложение в ряд Тейлора кривой $Q_t(\varepsilon)$, $t\in\mathbf{R}$, **в точке**

$$\overleftarrow{\exp}\int_0^t A_\tau d\tau.$$

Особо важное значение имеют первая и вторая вариации

$$Z_t^{(1)}=\int_0^t \overrightarrow{\exp}\int_0^\tau -\mathrm{ad}A_\theta\, d\theta\, B_\tau d\tau,$$

$$Z_t^{(2)}=\int_0^t\left[\frac{d}{d\tau}Z_\tau^{(1)},\ Z_\tau^{(1)},\right]d\tau$$

отображения $\overleftarrow{\exp}$ в точке $\overleftarrow{\exp}\int_0^t A_\tau d\tau$.

Следует отметить далее, что принципиально важное значение для исследования инфинитизимальных свойств отображения $\overrightarrow{\exp}$ имеет именно уравнение (3.9) для угловых скоростей. Действительно, во-первых, это уравнение на алгебре Ли, во-вторых, фигурирующая в нем связность не произвольна, а имеет нулевые кручение и кривизну. Так как в этом уравнении с точностью до бесконечно малых более высокого порядка сосредоточена вся информация о кривой $Q_t(\varepsilon)$, $t \in \mathbf{R}$, то естественно ожидать, что оно может дать и некоторую дополнительную информацию, представляющую интерес для теории управления.

Именно, оказывается, что если множество $\mathfrak{B}$ допустимых возмущений имеет структуру линейного пространства, то множество соответствующих угловых скоростей может быть представлено при помощи орбиты некоторого нелинейного действия абелевой группы этого пространства. Не вдаваясь в подробности, мы опишем результаты, которые можно получить, анализируя уравнение для угловой скорости (3.9), для случая управляемых систем

$$\dot{X} = (A_t + uB_t)X, \quad X_0 = I,$$

где A_t, B_t принадлежат одной из простых алгебр Ли $\mathrm{so}(3; \mathbf{R})$ или $\mathrm{so}(2; \mathbf{R})$. Именно, мы сформулируем условия, при которых точка $\overleftarrow{\exp}\int_0^T A_\tau d\tau$ принадлежит границе множества достижимости

$$\mathfrak{A}_I[0,T] = \left\{\overleftarrow{\exp}\int_0^t (A_\tau + uB_\tau)d\tau;\ |u(t)| \leqslant \delta,\ 0 \leqslant t \leqslant T\right\}.$$

Эти условия являются также необходимыми и достаточными для того, чтобы траектория $\overleftarrow{\exp}\int_0^t A_\tau d\tau$, $t \in [0, T]$ была оптимальной по быстродействию.

Пусть $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — инвариантная симметричная билинейная форма на соответствующей алгебре Ли:

$$\langle A, A \rangle = \begin{cases} \mathrm{tr}(AA^*) & \text{для случая } \mathrm{so}(3; \mathbf{R}), \\ \det A & \text{для случая } \mathrm{so}(2; \mathbf{R}). \end{cases}$$

Пусть, далее, $|A| = \sqrt{|\langle A, A \rangle|}$. Будем предполагать, что

$$\langle B_t, B_t \rangle \neq 0 \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Пусть

$$C_t = \frac{\overrightarrow{\exp}\int_0^t -\mathrm{ad}\, A_\tau\, d\tau B_t}{\left|\overrightarrow{\exp}\int_0^t -\mathrm{ad}\, A_\tau\, d\tau B_t\right|}.$$

А. Случай $\mathrm{so}(3; \mathbf{R})$. В этом случае $\langle C_t, C_t \rangle = 1$. Точка $\overleftarrow{\exp}\int_0^T A_\tau d\tau$ принадлежит границе множества достижимости $\mathfrak{A}_I[0,T]$

в том и только том случае, если кривая C_t, $0\leqslant t\leqslant T$ лежит на дуге большого круга длины $\leqslant\pi$ на сфере $\{\langle C, C\rangle=1\}$ в $\mathbf{R}^3$ и направление движения по этой дуге неизменно при $0\leqslant t\leqslant T$, т. е. если дуга ориентирована от C_0 к C_T, то $\dot C\geqslant 0$, $0\leqslant t\leqslant T$.

B. Случай $\mathrm{sl}(2;\mathbf{R})$. Здесь имеют место два подслучая.

B1. $\langle C_t, C_t\rangle=1$. Поверхность $\{\langle C, C\rangle=1\}$ есть двухполостный гиперболоид в $\mathbf{R}^3$. Точка $\overleftarrow{\exp}\int\limits_0^T A_\tau d\tau$ принадлежит границе множества достижимости в том и только том случае, если кривая C_t, $0\leqslant t\leqslant T$, целиком лежит на гиперболе, которая получается в сечении этого гиперболоида некоторой плоскостью, проходящей через начало координат в $\mathbf{R}^3$, причем направление движения C_t вдоль этой гиперболы неизменно при $0\leqslant t\leqslant T$.

B2. $\langle C_t, C_t\rangle=-1$. Здесь поверхность $\{\langle C, C\rangle=-1\}$ является однополостным гиперболоидом в $\mathbf{R}^3$. На таком гиперболоиде имеется два однопараметрических семейства прямолинейных образующих. Точка $\overleftarrow{\exp}\int\limits_0^T A_\tau d\tau$ лежит на границе множества достижимости $\mathfrak{A}_I[0, T]$ в том и только том случае, если кривая C_t, $0\leqslant t\leqslant T$, целиком лежит на одной из прямолинейных образующих; направление движения произвольно.

Пусть теперь M — гладкое n-мерное многообразие, $\mathrm{Diff}(M)$, как и раньше, — группа диффеоморфизмов многообразия M, $\mathrm{Der}(\Phi)$ — алгебра Ли векторных полей на M. Обозначим через $\Omega\mathrm{Diff}(M)$ группу потоков на многообразии M, т. е. множество всех абсолютно непрерывных семейств $P^*=\{P_t^*, t\in\mathbf{R}\}$ элементов $\mathrm{Diff}(M)$, таких что $P_0^*=\mathrm{Id}$. Операция умножения в группе потоков $\Omega\mathrm{Diff}(M)$ задается поточечно, формулой

$$(P^*Q^*)_t=P_t^*\circ Q_t^* \quad \forall t\in\mathbf{R}.$$

Роль алгебры Ли для группы потоков $\Omega\mathrm{Diff}(M)$ играет алгебра Ли всех нестационарных векторных полей на M, абсолютно непрерывно зависящих от $t\in\mathbf{R}$ и обращающихся в нуль при $t=0$. Обозначим эту алгебру через $\Omega\mathrm{Der}(\Phi)$. Умножение в этой алгебре также задается поточечно формулой

$$[\vec{\mathcal{A}}\ \vec{\mathcal{B}}]_t=[\vec{\mathcal{A}}_t\ \vec{\mathcal{B}}_t] \quad \forall t\in\mathbf{R}.$$

Как и в матричном случае, оказывается, что кривые вида

$$\varepsilon\mapsto\overrightarrow{\exp}\int\limits_0^t(\vec{A}+\varepsilon\vec{B})\,d\tau=Q_t^*(\varepsilon)$$

в группе потоков $\Omega\mathrm{Diff}(M)$ являются геодезическими связности

$\nabla:\Omega\mathrm{Der}(\Phi)\times\Omega\mathrm{Der}(\Phi)\to\Omega\mathrm{Der}(\Phi)$, определенной формулой

$$\nabla_{\vec{\mathcal{A}}_t}\vec{\mathcal{B}}_t=\int\limits_0^t\left[\vec{\mathcal{A}}_\tau\,\frac{d}{d\tau}\,\vec{\mathcal{B}}_\tau\right]d\tau.$$

Таким образом, эти кривые удовлетворяют уравнениям

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial\varepsilon}Q_t^*(\varepsilon)=\vec{Z}_t(\varepsilon)\,Q_t^*,\\&\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\vec{Z}_t(\varepsilon)+\nabla_{\vec{Z}_t(\varepsilon)}\vec{Z}_t(\varepsilon)=0,\\&\vec{Z}_t(0)=\int\limits_0^t\overrightarrow{\exp}\int\limits_0^\tau\mathrm{ad}\,\vec{A}_\theta d\theta\vec{B}_\tau d\tau.\end{aligned}\right\}\tag{3.12}$$

Уравнения (3.12) представляют собой довольно сложные интегро-дифференциальные уравнения с частными производными на многообразии M. Тем не менее, как и в матричном случае, можно доказать, что они имеют единственное решение.

Коэффициенты в соответствующем асимптотическом представлении

$$\vec{Z}_t(\varepsilon)=\sum_{k=1}^{\infty}\vec{Z}_t^{(k)}\varepsilon^{k-1}\tag{3.13}$$

угловой скорости $\vec{Z}_t(\varepsilon)$, $t\in\mathbb{R}$, называются вариациями отображения $\overrightarrow{\exp}$ в точке

$$\overrightarrow{\exp}\int\limits_0^t\vec{A}_\tau d\tau.$$

k-тая вариация $\vec{Z}_t^{(k)}$ является k-линейным отображением

$$\vec{Z}_t:(\vec{B}_{\tau_1},\ldots,\vec{B}_{\tau_k})\mapsto\vec{Z}_\tau^{(k)}\left(\vec{B}_{\tau_1},\ldots,\vec{B}_{\tau_k}\right)$$

алгебры Ли $\Omega\mathrm{Der}(\Phi)$, а значит, действует также и в TM:

$$\vec{Z}_tE(x)\in T_xM\quad\forall x\in M.$$

Выражения для этих вариаций те же, что и в матричном случае, только вместо коммутатора матриц стоит коммутатор векторных полей, например,

$$\vec{Z}_t^{(1)}=\int\limits_0^t\overrightarrow{\exp}\int\limits_0^\tau\mathrm{ad}\,\vec{A}_\theta d\theta\vec{B}_\tau d\tau,$$

$$\vec{Z}_t^{(2)}=\int\limits_0^t\left[\frac{d}{d\tau}\vec{Z}_\tau\vec{Z}_\tau\right]d\tau$$

и т. д. На самом деле, легко доказать, что формулы, полученные для матричного случая, следуют из только что приведенных. Для этого нужно сопоставить нестационарному семейству A_t, $t \in \mathbf{R}$, элементов матричной алгебры Ли g векторное поле в $\mathbf{R}^n$, соответствующее функции $x \mapsto A_t x : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ и заметить, что при таком соответствии коммутатору $[\overrightarrow{Ax}\ \overrightarrow{Bx}]$ векторных полей $\overrightarrow{Ax}$, $\overrightarrow{Bx} \in \mathrm{Der}(\Phi)$, будет соответствовать коммутатор $[AB] = BA - AB$ элементов A, $B \in g$. В отличие от матричного случая, асимптотическое разложение (3.13) расходится. Тем не менее, вариации $\overrightarrow{Z}_t^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots$, имеют значение для исследования свойств нелинейных управляемых систем, точно так же, как и уравнение для угловой скорости.

3. Системы, линейные по управлению. Квазикоммутативный случай. В этом пункте мы покажем, как введенные выше вариации отображения $\overrightarrow{\exp}$ могут быть использованы в теории управления. При этом мы ограничимся рассмотрением наиболее простейших случаев; менее тривиальные ситуации, особенно в связи с условиями оптимальности высокого порядка мы намерены рассмотреть у последующих публикациях.

Системы линейные по управлению—это управляемые системы вида

$$\dot{x} = \left(\overrightarrow{f} + \sum_{j=1}^{m} \overrightarrow{g}_j u^j\right) E(x) = f(x) + \sum_{j=1}^{m} g_j(x) u^j,$$
$$x \in M, \quad x(0) = x_0, \tag{3.14}$$

где $\overrightarrow{f}$, $\overrightarrow{g}_j$, $j = 1, \ldots, m$—гладкие векторные поля на n-мерном дифференцируемом многообразии M.

Мы начнем с одного результата, относящегося к локальной управляемости системы с одним управлением u:

$$\dot{x} = (\overrightarrow{f} + u\overrightarrow{g}) E(x) = f(x) + ug(x), \quad x \in M, \quad x(0) = x_0, \quad u \in \mathbf{R} \tag{3.15}$$

(по поводу этого результата см., например, [42]).

Предложение 3.1. Пусть векторы

$$\overrightarrow{g}E(x_0),\ \mathrm{ad}\,\overrightarrow{f}gE(x_0), \ldots, \mathrm{ad}^{n-1}\,\overrightarrow{f}\,\overrightarrow{g}E(x_0) \in T_{x_0}M$$

линейно независимы. Тогда управляемая система (3.15) локально управляема вдоль траектории, соответствующей управлению $u \equiv 0$, т. е. $\forall t > 0$

$$e^{t\overrightarrow{f}}E(x_0) \in \mathrm{int}\,\mathfrak{A}_{x_0}(t) =$$
$$= \mathrm{int}\left\{\overrightarrow{\exp}\int_0^t (\overrightarrow{f} + u(\tau)\overrightarrow{g})\, d\tau E(x_0);\ u(\cdot) \in \mathcal{D} = L^\infty[0, t]\right\}.$$

Доказательство. Докажем, что для любого $\forall t > 0$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что

$$e^{t\vec{f}}E(x_0)\in\operatorname{int}\left\{\overrightarrow{\exp}\int_0^t(\vec{f}+u(\tau)\vec{g})\,E(x_0)\,d\tau\;\big|\;|u(\tau)|\leqslant\varepsilon\right\}.$$

Так как $\forall u(\cdot)\in L^\infty[0, t]$

$$\overrightarrow{\exp}\int_0^t(\vec{f}+u(\tau)\vec{g})\,d\tau=e^{t\vec{f}}\,\overrightarrow{\exp}\int_0^t e^{(\tau-t)\operatorname{ad}\vec{f}}\vec{g}\,u(\tau)\,d\tau,$$

то для этого достаточно доказать, что

$$x_0=E(x_0)\in\operatorname{int}\left\{\overrightarrow{\exp}\int_0^t e^{(\tau-t\ \operatorname{ad}\vec{f}}\vec{g}\,u(\tau)\,d\tau E(x_0)\;\big|\;|u(\tau)|\leqslant\varepsilon\right\}.$$

Пусть $v_0(\tau), \ldots, v_{n-1}(\tau)$ — пока произвольные функции времени, определенные на отрезке $[0, t[$. Рассмотрим отображение

$$F:(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_{n-1})\mapsto\overrightarrow{\exp}\int_0^t e^{(\tau-t)\operatorname{ad}\vec{f}}\vec{g}\sum_{j=1}^m\varepsilon_j v_j(\tau)\,E(x_0)\,d\tau.$$

Используя формулу вариаций, находим, что

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon_j}F(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_{n-1})\big|_{\varepsilon_0=\ldots=\varepsilon_{n-1}=0}=\int_0^t e^{(\tau-t)\operatorname{ad}\vec{f}}\vec{g}v_j(\tau)\,d\tau E(x_0).$$

Покажем, что функции $v_0(\tau), \ldots, v_{n-1}(\tau)$ можно выбрать так, что

$$\int_0^t e^{(\tau-t)\operatorname{ad}\vec{f}}\vec{g}v_j(\tau)\,E(x_0)\,d\tau=\operatorname{ad}^j\vec{f}\vec{g}E(x_0),\quad j=0, \ldots, n-1.$$

Отсюда, в силу линейно независимости векторов

$$\vec{g}E(x_0), \ldots, \operatorname{ad}^{n-1}\vec{f}\vec{g}E(x_0)\in T_{x_0}M, \tag{3.16}$$

получаем, что отображение $F(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_{n-1})$ при $\varepsilon_i=0$ имеет максимальный ранг, а значит, по теореме о неявной функции, существует такое $\varepsilon>0$, что

$$x_0=E(x_0)\in\operatorname{int}\left\{\overrightarrow{\exp}\int_0^t e^{(\tau-t)\operatorname{ad}\vec{f}}u(\tau)\vec{g}\,d\tau E(x_0)\;\big|\;|u(\tau)|\leqslant\varepsilon\right\}.$$

Итак, докажем существование таких функций $v_0(\tau), \ldots$ $\ldots, v_{n-1}(\tau)$. Для этого разложим $e^{(\tau-t)\operatorname{ad}\vec{f}}\vec{g}E(x_0)$ по базису (3.16):

$$e^{(\tau-t)\operatorname{ad}\vec{f}}\vec{g}E(x_0)=\sum_{j=0}^{n-1}c^j(\tau)\operatorname{ad}^j\vec{f}\vec{g}E(x_0), \tag{3.17}$$

Пусть, кроме того,

$$\operatorname{ad}^n \vec{f}\vec{g} E(x_0) = \sum_{j=0}^{n-1} a^j \operatorname{ad}^j \vec{f}\vec{g} E(x_0).$$

Тогда, коэффициенты разложения (3.17) определяются из системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\left.\begin{array}{l} \dot{c}^0 = a^0 c^{n-1}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \dot{c}^{n-1} = c^{n-2} + a^{n-1} c^{n-1}, \\ c^0(0) = 1, \quad c^k(0) = 0, \quad 1 \leqslant k \leqslant n-1. \end{array}\right\} \tag{3.18}$$

В самом деле, дифференцируя равенство (3.17), мы получаем, что

$$\operatorname{ad} \vec{f} e^{(\tau - t)\operatorname{ad}\vec{f}} \vec{g} E(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} c^k(\tau) \operatorname{ad}^{k+1} \vec{f}\vec{g} d\tau E(x_0) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-2} c^k(\tau) \operatorname{ad}^{k+1} \vec{f}\vec{g} E(x_0) + \sum_{k=0}^{n-1} c^{n-1}(\tau) a^k \operatorname{ad}^k \vec{f}\vec{g} E(x_0),$$

откуда и следует (3.18).

Функции $c^0(\tau), \ldots, c^{n-1}(\tau)$ аналитичны и линейно независимы, а потому матрица Грамма

$$C(t) = \left(\int_0^t (c^k(\tau) c^j(\tau))\, d\tau \right), \quad k, j = 0, \ldots, n-1$$

невырождена.

Будем искать искомые функции $v_j(\tau)$, $0 \leqslant \tau \leqslant t$, $j = 0, \ldots$ $\ldots, n-1$, в виде

$$v_j(\tau) = \sum_{k=0}^{n-1} \xi_\alpha^j c^\alpha(\tau), \quad 0 \leqslant \tau \leqslant t, \quad j = 0, \ldots, n-1.$$

Тогда

$$\sum_{\alpha=0}^{n-1} \sum_{\beta=0}^{n-1} \xi_\alpha^j \int_0^t c^\alpha(\tau) c^\beta(\tau)\, d\tau \operatorname{ad}^\beta \vec{f}\vec{g} E(x_0) = \operatorname{ad}^j \vec{f}\vec{g} E(x_0),$$

откуда получается система линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов ξ_α^j, $j, \alpha = 0, \ldots, n-1$:

$$\sum_{\alpha=0}^{n-1} \xi_\alpha^j \int_0^t c^\alpha(\tau) c^\beta(\tau)\, d\tau = \delta_\beta^j = \begin{cases} 0, & j \neq \beta, \\ 1, & j = \beta. \end{cases}$$

Определитель этой системы — определитель матрицы Грамма, а потому эта система однозначно разрешима. Искомые функции $v_j(\tau)$, $0 \leqslant \tau \leqslant t$ построены.

Предложение доказано.

Отметим, что хотя доказательство предложения 3.1 не самое короткое, оно обладает одним неоспоримым преимуществом: явно строятся управления, с помощью которых траекториями управляемой системы (3.15) покрывается окрестность точки $e^{t\vec{f}}E(x_0)$.

Заметим, далее, что условие линейной независимости векторов $\vec{g}E(x_0), \ldots, \mathrm{ad}^{n-1}\vec{f}\vec{g}E(x_0)$ эквивалентно тому, что первая вариация управляемой системы (3.15) накрывает касательное пространство $T_{x_0}M$, т. е. образ отображения

$$u(\cdot)\mapsto\vec{Z}_t^{(1)}(\vec{g}u(\tau))E(x_0)=\int_0^t e^{\tau\,\mathrm{ad}\,\vec{f}}\,\vec{g}u(\tau)\,d\tau E(x_0):L^\infty[0,\,t[\to T_{x_0}M$$

совпадает с $T_{x_0}M$.

Рассмотрим теперь управляемую систему

$$\dot{x}=f(x)+\sum_{i=1}^m u_i g_i(x),\quad x\in\mathbf{R}^n,\quad u^i\in\mathscr{D}=L^\infty(\mathbf{R}) \tag{3.19}$$

в $\mathbf{R}^n$. Эта система называется квазикоммутативной, если ее вторая вариация равна нулю, т. е. для любого $t>0$ и для любых $u^i\in L^\infty(\mathbf{R})$, $i=1, \ldots, m$, $x_0\in\mathbf{R}^n$

$$\vec{Z}_t^{(2)}\left(\sum_{i=1}^m u^i(\tau)\vec{g}^i\right)=\int_0^t\left[\dot{\vec{Z}}_\tau^{(1)}\left(\sum_{i=1}^m u^i(\tau)\vec{g}_i\right),\right.$$
$$\left.\vec{Z}_\tau^{(2)}\left(\sum_{i=1}^m u^i(\tau)\vec{g}_i\right)\right]d\tau E(x_0)=0,$$
$$\vec{Z}_t^{(1)}\left(\sum_{i=1}^m u^i(\tau)\vec{g}_i\right)=\int_0^t e^{\tau\,\mathrm{ad}\,\vec{f}}\sum_{j=1}^m u^j(\tau)\vec{g}_j d\tau.$$

Нетрудно видеть, что условие квазикоммутативности системы (3.19) эквивалентно условию

$$[e^{s\,\mathrm{ad}\,\vec{f}}\vec{g}_i e^{t\,\mathrm{ad}\,\vec{f}}\vec{g}_j]=0\quad \forall t,\, s\in\mathbf{R},\quad i,\, j=1,\, \ldots,\, m.$$

В этом случае отображение

$$(u^1(\cdot),\, \ldots,\, u^m(\cdot))\mapsto\overrightarrow{\exp}\int_0^t\left(\vec{f}+\sum_{j=1}^m u^j(\tau)\vec{g}_j d\tau\right)E(x_0)$$

«сводится» к первой вариации. Именно, имеет место

Предложение 3.2. Для любого $x_0\in\mathbf{R}$ множество

$$D_{x_0}^{(t)}=\left\{\overrightarrow{\exp}\int_0^t e^{\tau\,\mathrm{ad}\,\vec{f}}\sum_{j=1}^m u^j(\tau)\vec{g}_j d\tau E(x_0);\ u^j(\cdot)\in L^\infty[0,\,t]\right\}$$

имеет естественную структуру коммутативной группы Ли, причем векторные поля $e^{\tau \operatorname{ad} \overrightarrow{f}} \overrightarrow{g}_j$, $0 \leqslant \tau \leqslant t$, $j=1, \ldots, m$, порождают пространство инвариантных векторных полей на этой группе.

Доказательство см. в [2].

Отметим, что если размерность указанной группы $D^{(t)}_{x_0}$ равна k, то так как всякая k-мерная коммутативная группа Ли получается факторизацией $\mathbf{R}^k$ по некоторой решетке, то предложение 3.2. сводит управляемую систему

$$\dot{x} = e^{\tau \operatorname{ad} \overrightarrow{f}} \sum_{j=1}^{m} u^j \overrightarrow{g}^j E(x), \quad x \in \mathbf{R}^n, \tag{3.20}$$

к линейной системе в $\mathbf{R}^k$ по модулю решетки. Так что, например, задача попадания в точку для (3.20) эквивалентна задаче попадания в множество узлов подходящей решетки для линейной системы в $\mathbf{R}^k$.

ПРИЛОЖЕНИЕ. ЭЛЕМЕНТЫ ХРОНОЛОГИЧЕСКОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Здесь собраны некоторые понятия и формулы хронологического исчисления, которые использовались в основном тексте работы. Изложение довольно сжатое; доказательство всех приводимых ниже фактов можно найти в [2], [3]. Сначала излагается соответствующий материал для конечномерного матричного случая. Это делается в основном из методических соображений; почти все факты для конечномерного случая легко следуют из общих утверждений. С другой стороны, построения, проведенные в конечномерном случае имеют глубокие аналоги в общем, бесконечномерном случае.

1. Хронологический формализм и матричные дифференциальные уравнения. Пусть, как и раньше, $\mathrm{Gl}(n; \mathbf{R})$ — полная линейная группа Ли всех невырожденных матриц, $\mathrm{gl}(n; \mathbf{R})$ — ее алгебра Ли. Нас будут интересовать матричные дифференциальные уравнения

$$\dot{X} = XA_t, \quad X_{t_0} = I, \tag{1}$$

$$\dot{Y} = B_t Y, \quad Y_{t_0} = I \tag{2}$$

относительно семейств X_t, Y_t, $t \in \mathbf{R}$, элементов $\mathrm{Gl}(n; \mathbf{R})$. Здесь A_t, B_t, $t \in \mathbf{R}$ — произвольные локально суммируемые семейства элементов $\mathrm{gl}(\mathrm{n}, \mathbf{R})$. Решения этих уравнений существуют, единственны, являются абсолютно непрерывными кривыми в группе $\mathrm{Gl}(n; \mathbf{R})$ и могут быть представлены в виде сходящихся хронологических рядов Вольтерра

$$X_t = \overrightarrow{\exp} \int_{t_0}^{t} A_\tau d\tau = I + \sum_{m=1}^{\infty} \int_{t_0}^{t} d\tau_1 \ldots \int_{t_0}^{\tau_{m-1}} d\tau_m A_{\tau_m} \ldots A_{\tau_1},$$

$$Y_t=\overleftarrow{\exp}\int\limits_0^t B_\tau d\tau=I+\sum_{m=1}^{\infty}\int\limits_{t_0}^{t} d\tau_1\ldots\int\limits_{t_0}^{\tau_{m-1}} d\tau_m A_{\tau_1}\ldots A_{\tau_m}.$$

Стрелка над exp в обозначениях правой и левой хронологических экспонент

$$\overrightarrow{\exp}\int\limits_{t_0}^{t} A_\tau d\tau,\quad \overleftarrow{\exp}\int\limits_{t_0}^{t} B_\tau d\tau$$

показывает, куда выносится при дифференцировании соответствующее семейство матриц:

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{\exp}\int\limits_{t_0}^{t} A_\tau d\tau=\overrightarrow{\exp}\int\limits_{t_0}^{t} A_\tau d\tau A_t,\quad \frac{d}{dt}\overleftarrow{\exp}\int\limits_{t_0}^{t} B_\tau d\tau=B_t\overleftarrow{\exp}\int\limits_{t_0}^{t} B_\tau d\tau.$$

Далее, оказывается, что имеет место формула

$$\left(\overrightarrow{\exp}\int\limits_{t_0}^{t} A_\tau d\tau\right)^{-1}=\overleftarrow{\exp}\int\limits_{t_0}^{t} -A_\tau d\tau,$$

выражающая правило «обращения стрелок» для хронологических экспонент. Эта формула отражает тот простой факт, что решения уравнений

$$\dot{X}_t=X_tA_t,\quad X_{t_0}=I \quad \text{и}\quad \dot{Y}_t=-A_tY_t,\quad Y_{t_0}=I$$

являются взаимно обратными абсолютно непрерывными семействами элементов $\mathrm{Gl}(n;\ \mathbb{R})$. Следует отметить, что совместное рассмотрение предыдущих уравнений позволяет чисто алгебраическим способом доказать единственность решений уравнений (1), (2) (более подробно см. [2]; см. также работу [1], где аналогичным способом доказана единственность решения аналитической системы дифференциальных уравнений с частными производными). Наконец, отметим, что если $t_0<t_1<\ldots$ $\ldots<t_k<t$ — произвольные моменты времени, то

$$\overrightarrow{\exp}\int\limits_{t_0}^{t} A_\tau d\tau=\overrightarrow{\exp}\int\limits_{t_0}^{t_1} A_\tau d\tau\cdot\overrightarrow{\exp}\int\limits_{t_1}^{t_2} A_\tau d\tau\ldots\overrightarrow{\exp}\int\limits_{t_k}^{t} A_\tau d\tau.$$

Эта формула (и аналогичная формула для левой экспоненты) выражает ее полугрупповое свойство и является непосредственным следствием единственности решений соответствующих уравнений. Если $[A_{t'}A_{t''}]=-A_{t'}A_{t''}+A_{t''}A_{t'}=0$ для любых t', $t''\in\mathbb{R}$, или, более общо, если $\forall t\in\mathbb{R}$

$$\left[\int\limits_{t_0}^{t} A_\tau d\tau\ \ A_t\right]=0,$$

то правая и левая хронологические экспоненты совпадают:

$$\overrightarrow{\exp}\int_{t_0}^{t} A_\tau d\tau = \overleftarrow{\exp}\int_{t_0}^{t} A_\tau d\tau = e^{\int_{t_0}^{t} A_\tau d\tau},$$

где, как обычно,

$$e^{\int_{t_0}^{t} A_\tau d\tau} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\int_{t_0}^{t} A_\tau d\tau\right)^k.$$

Основное значение для нас имеет так называемая формула вариаций, которая выражает решение

$$\overrightarrow{\exp}\int_{t_0}^{t} (B_\tau + A_\tau)\, d\tau$$

возмущенного уравнения

$$\dot{X} = X(A_t + B_t), \quad X_{t_0} = I$$

через решение

$$\overrightarrow{\exp}\int_{t_0}^{t} A_\tau d\tau$$

исходного уравнения

$$\dot{X} = XA_t, \quad X_{t_0} = I.$$

Эта формула имеет вид:

$$\overrightarrow{\exp}\int_{t_0}^{t} (A_\tau + B_\tau)\, d\tau = \overrightarrow{\exp}\int_{t_0}^{t} \overrightarrow{\exp}\int_{t_0}^{\tau} \mathrm{ad}\, A_\theta d\theta B_\tau d\tau\, \overrightarrow{\exp}\int_{t_0}^{t} A_\tau d\tau, \qquad (3)$$

где, как обычно,

$$\mathrm{ad}\, A(B) = -[AB] = BA - AB \quad \forall A, B \in \mathrm{gl}(n;\ \mathbf{R}).$$

Здесь

$$\overrightarrow{\exp}\int_{t_0}^{t} \mathrm{ad}\, A_\tau d\tau$$

есть решение матричного дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dt} W_t = W_t \circ \mathrm{ad}\, A_t, \quad W_{t_0} = \mathrm{Id}.$$

При этом $\forall B \in \mathrm{gl}(n;\ \mathbf{R})$

$$\overrightarrow{\exp}\int_{t_0}^{t} \mathrm{ad}\, A_\tau d\tau B = \mathrm{Ad}\left(\overrightarrow{\exp}\int_{t_0}^{t} A_\tau d\tau\right) B =$$

$$= \left(\overrightarrow{\exp}\int_{t_0}^{t} A_\tau d\tau\right) B \left(\overrightarrow{\exp}\int_{t_0}^{t} A_\tau d\tau\right)^{-1}.$$

Следовательно, формулу (3) можно записать также в виде

$$\overrightarrow{\exp}\int_{t_0}^{t}(A_\tau+B_\tau)\,d\tau=\overrightarrow{\exp}\int_{t_0}^{t}\mathrm{Ad}\,\overrightarrow{\exp}\int_{t_0}^{\tau}A_\theta d\theta B_\tau d\tau\,\overrightarrow{\exp}\int_{t_0}^{t}A_\tau d\tau=$$

$$=\overrightarrow{\exp}\int_{t_0}^{t}\overrightarrow{\exp}\int_{t_0}^{\tau}\mathrm{ad}\,A_\theta d\theta B_\tau d\tau\,\overrightarrow{\exp}\int_{t_0}^{t}A_\tau d\tau.$$

Кроме того,

$$\overrightarrow{\exp}\int_{t_0}^{t}(A_\tau+B_\tau)\,d\tau=\overrightarrow{\exp}\int_{t_0}^{t}A_\tau d\tau\,\overrightarrow{\exp}\int_{t_0}^{t}\left(\mathrm{Ad}\,\overrightarrow{\exp}\int_{t}^{\tau}A_\theta d\theta\right)B_\tau d\tau=$$

$$=\overrightarrow{\exp}\int_{t_0}^{t}A_\tau d\tau\,\overrightarrow{\exp}\int_{t_0}^{t}\overrightarrow{\exp}\int_{t}^{\tau}\mathrm{ad}\,A_\theta d\theta B_\tau d\tau.$$

Аналогичные формулы имеют место и для левой экспоненты:

$$\overleftarrow{\exp}\int_{t_0}^{t}(A_\tau+B_\tau)\,d\tau=\overleftarrow{\exp}\int_{t_0}^{t}A_\tau d\tau\cdot\overleftarrow{\exp}\int_{t_0}^{t}\overrightarrow{\exp}\int_{t_0}^{\tau}-\mathrm{ad}\,A_\theta d\theta B_\tau d\tau=$$

$$=\overleftarrow{\exp}\int_{t_0}^{t}A_\tau d\tau\cdot\overleftarrow{\exp}\int_{t_0}^{t}\left(\mathrm{Ad}\,\overrightarrow{\exp}\int_{t_0}^{\tau}-A_\theta d\theta B_\tau\right)d\tau.$$

Правым хронологическим логарифмом абсолютно непрерывной кривой

$$\overrightarrow{\exp}\int_{t_0}^{t}A_\tau d\tau,\quad t\in\mathrm{R}$$

в группе $\mathrm{Gl}(n;\ \mathbf{R})$ называется абсолютно непрерывная кривая

$$\int_{t_0}^{t}A_\tau d\tau=\overrightarrow{\ln}\,\overrightarrow{\exp}\int_{t_0}^{t}A_\tau d\tau,\quad t\in\mathrm{R}$$

в алгебре Ли $\mathrm{gl}(n;\ \mathbf{R})$.

С помощью формулы вариаций можно вычислить

$$\overrightarrow{\ln}\left(\overrightarrow{\exp}\int_{t_0}^{t}A_\tau d\tau\right)^{-1}\quad\text{и}\quad\overrightarrow{\ln}\left(\overrightarrow{\exp}\int_{t_0}^{t}A_\tau d\tau\,\overrightarrow{\exp}\int_{t_0}^{t}B_\tau d\tau\right).$$

Именно, оказывается, что

$$\overrightarrow{\ln}\left(\overrightarrow{\exp}\int_{t_0}^{t}A_\tau d\tau\,\overrightarrow{\exp}\int_{t_0}^{t}B_\tau d\tau\right)=\int_{t_0}^{t}\left(\overrightarrow{\exp}\int_{t_0}^{\tau}-\mathrm{ad}\,B_\theta d\theta A_\tau+B_\tau\right)d\tau,$$

$$\overrightarrow{\ln}\left(\overrightarrow{\exp}\int_{t_0}^{t}A_\tau d\tau\right)^{-1}=\overrightarrow{\ln}\left(\overleftarrow{\exp}\int_{t_0}^{t}-A_\tau d\tau\right)=$$

$$= \int_{t_0}^{t} \overrightarrow{\exp} \int_0^{\tau} \operatorname{ad} A_0 d\theta A_{\tau} d\tau. \tag{4}$$

Аналогично вводятся левый хронологический логарифм. Отметим, что формулы (4) естественно рассматривать как аналог формулы Кэмпбелла—Хаусдорфа, выражающую логарифм $\ln(e^A e^B)$ через A, B, $[A, B]$ и т. д.

2. **Однопараметрические семейства функций и операторов.** Пусть M — бесконечно дифференцируемое n-мерное многообразие, гладко вложенное в пространство $\mathbf{R}^d$, $\Phi = C^\infty(M)$ — алгебра гладких функций на M, $\Phi = \Phi_1 \times \ldots \times \Phi_n$ — декартово произведение n экземпляров Φ, E — сужение тождественного отображения $\mathbf{R}^d$ на M, $\operatorname{Der}(\Phi)$ — множество дифференцирований алгебры Φ, $\operatorname{Diff}(M)$ — группа диффеоморфизмов многообразия M.

Пусть, далее, $\pi(x)$ — ортогональный проектор $\mathbf{R}^d$ на касательное пространство

$$T_x M = \{\overrightarrow{X} E(x);\ \overrightarrow{X} \in \operatorname{Der}(\Phi)\}$$

к M в точке x. Сопоставим вектору $h \in \mathbf{R}^d$ векторное поле $\overrightarrow{h} \in \operatorname{Der}(\Phi)$ по формуле

$$\overrightarrow{h} \varphi(x) = \langle d\varphi(x),\ \pi(x) h \rangle \quad \forall \varphi \in \Phi, \quad x \in M.$$

Определим в Φ полунормы $\|\cdot\|_{s,U}$ (s — целое $\geqslant 0$, $U \subset M$ — компакт) формулой

$$\|\varphi\|_{s,U} = \sup_{x \in U} \sum_{\alpha=1}^{s} \sup_{\substack{|h_j|=1 \\ j=1,\ldots,\alpha}} |\overrightarrow{h}_1 \ldots \overrightarrow{h}_\alpha \varphi(x)| \quad \forall \varphi \in \Phi.$$

Если $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi^1 \\ \vdots \\ \varphi^n \end{pmatrix} \in \Phi^n$, то положим

$$\|\varphi\|_{s,U} = \max_{1 < \alpha < n} \|\varphi^\alpha\|_{s,U}.$$

Система полунорм $\|\cdot\|_{s,U}$ определяет в Φ локально выпуклую топологию, превращая Φ в пространство Фреше. Всюду, далее, пространство Φ рассматривается с этой топологией.

Обозначим через $\mathscr{L}(\Phi)$ ассоциативную алгебру линейных непрерывных отображений Φ в себя. Можно доказать, что

$$\operatorname{Diff}(M), \quad \operatorname{Der}(\Phi) \subset \mathscr{L}(\Phi).$$

В пространстве $\mathscr{L}(\Phi)$ введем топологию простой (поточечной) сходимости: последовательность операторов $\mathscr{A}_k \to 0$, $x \to \infty$ в $\mathscr{L}(\Phi)$, если $\forall \varphi \in \Phi$ $\mathscr{A}_k \varphi \to 0$ в Φ.

Пусть φ_t, $t \in \mathbf{R}$, — семейство элементов Φ, зависящее от параметров $t \in \mathbf{R}$. Непрерывность и дифференцируемость по параметру t этого семейства определяется обычным образом, ибо Φ — линейное топологическое пространство.

Семейство φ_t, $t \in \mathbf{R}$, называется измеримым, если для любого $x \in M$ измерима скалярная функция $t \mapsto \varphi_t(x)$.

Измеримое семейство φ_t, $t \in \mathbf{R}$, называется локально интегрируемым, если для любой полунормы $\|\cdot\|_{s,U}$ функция

$$t \mapsto \| \varphi_t \|_{s,U}$$

интегрируема по Лебегу. При этом интегралом локально интегрируемого семейства φ_t, $t \in \mathbf{R}$ в пределах от t_1 до t_2 называется функция

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi_\tau d\tau : x \mapsto \int_{t_1}^{t_2} \varphi_\tau(x)\, d\tau.$$

Эта функция принадлежит Φ и

$$\left\| \int_{t_1}^{t_2} \psi_\tau d\tau \right\|_{s,U} \leqslant \int_{t_1}^{t_2} \| \psi_\tau \|_{s,U} d\tau.$$

Семейство φ_t, $t \in \mathbf{R}$, называется абсолютно непрерывным, если существует локально интегрируемое семейство ψ_t, $t \in \mathbf{R}$, такое, что $\forall t \in \mathbf{R}$, $t_0 \in \mathbf{R}$

$$\varphi_t = \varphi_{t_0} + \int_{t_0}^{t} \psi_\tau d\tau.$$

Можно доказать (см. [1]), что абсолютно непрерывное семейство φ_t, $t \in \mathbf{R}$, элементов Φ дифференцируемо почти всюду, причем

$$\frac{d}{dt} \varphi_t = \psi_t.$$

Те же понятия, что и выше, определяются и для однопараметрических семейств A_t, $t \in \mathbf{R}$, операторов из $\mathscr{L}(\Phi)$ в «слабом» смысле.

Именно, мы говорим, что семейство $\mathscr{A}_t$, $t \in \mathbf{R}$, элементов $\mathscr{L}(\Phi)$ некоторым свойством, если $\forall \varphi \in \Phi$ этим свойством обладает семейство $\psi_t = \mathscr{A}_t \varphi$, $t \in \mathbf{R}$ элементов Φ.

3. Нестационарные векторные поля и потоки. Нестационарным векторным полем на многообразии M или просто полем мы будем называть произвольное локально интегрируемое семейство

$$\vec{X}_t, \quad t \in \mathbf{R},$$

элементов $\mathrm{Der}\,(\Phi) \subset \mathscr{L}(\Phi)$.

Нестационарное поле $\vec{X}_t$, $t \in \mathbf{R}$, называется ограниченным, если $\forall s \geqslant 0$, t_1, $t_2 \in \mathbf{R}$

$$\int_{t_1}^{t_2} \| X_\tau \|_{s,M} d\tau < \infty,$$

где $X_\tau = \vec{X}_\tau E \in \Phi^d$.

Потоком на многообразии M мы будем называть произвольное абсолютно непрерывное семейство P_t^*, $t \in \mathrm{R}$, диффеоморфизмов M, удовлетворяющее условию $P_0^* = \mathrm{Id}$. Здесь Id — тождественное отображение $\mathscr{L}(\Phi)$.

Пусть $\vec{X}_t$, $t \in \mathrm{R}$, — некоторое нестационарное векторное поле на M. Рассмотрим линейные дифференциальные уравнения

$$\frac{d}{dt} \mathscr{A}_t = \mathscr{A}_t \circ \vec{X}_t, \quad \mathscr{A}_0 = \mathrm{Id}, \tag{5}$$

$$\frac{d}{dt} \mathscr{B}_t = -\vec{X}_t \circ \mathscr{B}_t, \quad \mathscr{B}_0 = \mathrm{Id} \tag{6}$$

относительно семейств $\mathscr{A}_t$, $\mathscr{B}_t$, $t \in \mathrm{R}$, элементов $\mathscr{L}(\Phi)$. Решениями этих уравнений называются абсолютно непрерывные семейства $\mathscr{A}_t$, $\mathscr{B}_t$, $t \in \mathrm{R}$, такие, что

$$\frac{d}{dt} \mathscr{A}_t = \mathscr{A}_t \circ \vec{X}_t, \quad \frac{d}{dt} \mathscr{B}_t = -\vec{X}_t \circ \mathscr{B}_t$$

при почти всех $t \in \mathrm{R}$ и $\mathscr{A}_0 = \mathscr{B}_0 = \mathrm{Id}$. Уравнения (5)—(6) эквивалентны линейным интегральным уравнениям

$$\mathscr{A}_t = \mathrm{Id} + \int_0^t \mathscr{A}_\tau \circ \vec{X}_\tau d\tau, \quad \mathscr{B}_t = \mathrm{Id} - \int_0^t \vec{X}_\tau \circ \mathscr{B}_\tau d\tau.$$

Оказывается, что если поле $\vec{X}_t$, $t \in \mathrm{R}$, ограниченно, то решения этих уравнений существуют, единственны и являются взаимно обратными потоками. При этом, если P_t^*, $t \in \mathrm{R}$, — решение уравнения (5), то $P_t = P_t^* E$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению $\forall x_0 \in M$

$$\frac{d}{dt} P_t(x_0) = X_t(P_t(x_0)), \quad P_0(x_0) = x_0. \tag{7}$$

и обратно, если семейство диффеоморфизмов многообразия M P_t, $t \in \mathrm{R}$, определено дифференциальным уравнением (7), то P_t^*, $t \in \mathrm{R}$, есть поток, удовлетворяющий уравнению (5). В свою очередь, если $\mathscr{B}_t$, $t \in \mathrm{R}$, — произвольное решение уравнения (6), то $\forall \varphi \in \Phi$ функция $\omega(t, x) = \mathscr{B}_t \varphi(x)$ удовлетворяет линейному однородному уравнению в частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial}{\partial t} \omega(t, x) + \vec{X}_t \omega(t, x) = 0, \quad \omega(0, x) = \varphi(x). \tag{8}$$

Далее, если многообразие M является аналитическим, а поле $\vec{X}_t$ ограничено и вещественно аналитично, то решения уравнений (5)—(6) может быть представлено с помощью хронологических рядов Вольтерра, именно с помощью рядов вида

$$\overrightarrow{\mathscr{V}}_t(\overrightarrow{X}_\tau)=\mathrm{Id}+\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^t d\tau_1\ldots\int_0^{\tau_{m-1}} d\tau_m\overrightarrow{X}_{\tau_m}\circ\ldots\circ\overrightarrow{X}_{\tau_1},$$

$$\overleftarrow{\mathscr{V}}_t(-\overrightarrow{X}_\tau)=\mathrm{Id}+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\int_0^t d\tau_1\ldots\int_0^{\tau_{m-1}} d\tau_m\overrightarrow{X}_{\tau_1}\circ\ldots\circ\overrightarrow{X}_{\tau_m}.$$

Приведем точную формулировку соответствующего утверждения, для случая, когда $M=\mathbf{R}^n$. Пусть V_σ, $\sigma>0$, —комплексная окрестность $\mathbf{R}^n\subset\mathbf{C}^n$:

$$V_\sigma=\left\{z=\begin{pmatrix} z^1\\ \vdots\\ z^n\end{pmatrix}\in\mathbf{C}^n \,\middle|\, |\mathrm{Im}\, z|\leqslant\sigma\right\},$$

а Ω_σ—множество действительных аналитических функций ω на $\mathbf{R}^n$, допускающих ограниченное аналитическое продолжение на V_σ,

$$\|\omega\|_\sigma^{\mathbf{C}^n}=\sup_{z\in V_\sigma}|\omega(z)|,\quad \omega\in\Omega_\sigma,\quad \Omega_\sigma^n=\prod_{k=1}^{n}\Omega_\sigma.$$

Поле $\overrightarrow{X}_t$, $t\in\mathbf{R}$, называется ограниченным аналитическим, если для некоторого $\sigma>0$ $X_t\in\Omega_\sigma^n$, $t\in\mathbf{R}$. Пусть

$$\|X_t\|_\sigma^{\mathbf{C}^n}=\max_{1\leqslant\alpha\leqslant n}\|X_t^\alpha\|_\sigma^{\mathbf{C}^n}.$$

При этих предположениях оказывается, что существует такое $\rho=\rho(\sigma)$, есть ряд

$$\overrightarrow{\mathscr{V}}_t(\overrightarrow{X}_\tau)\,\omega(z)=\omega(z)+\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^t d\tau_1\ldots\int_0^{\tau_{m-1}}\overrightarrow{X}_{\tau_m}\ldots\overrightarrow{X}_{\tau_1}\omega(z)$$

сходится абсолютно и равномерно при $\forall\omega\in\Omega_\sigma$, $\sigma'<\sigma$, $|t|<\rho(\sigma)$, При этом

$$\|\overrightarrow{\mathscr{V}}_t(\overrightarrow{X}_\tau)\,\omega\|_{\sigma'}^{\mathbf{C}^n}\leqslant\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{2n}{\sigma-\sigma'}\right)^m\left[\int_0^t\|X_\tau\|_\sigma^{\mathbf{C}^n}\right]^m\|\omega\|_\sigma^{\mathbf{C}^n}.$$

Далее, семейство P_t^*, $t\in\mathbf{R}$, где $P_t=\mathscr{V}_t(\overrightarrow{X}_\tau)\,E$ является решением уравнения (5).

Аналогичное утверждение имеет место и для левого уравнения (6). Следует отметить здесь, что сами хронологические ряды $\overrightarrow{\mathscr{V}}_t(\overrightarrow{X}_\tau)$ и $\overleftarrow{\mathscr{V}}_t(-\overrightarrow{X}_\tau)$, вообще говоря, расходятся в отличие от конечномерного матричного случая.

Поток P_t^*, $t\in\mathbf{R}$, удовлетворяющий уравнению (5) называется правой хронологической экспонентой, а поток Q_t^*, $t\in\mathbf{R}$, удовлетворяющий уравнению (6) — левой хронологической экспонентой. Для них, соответственно, вводим обозначения

$$P_t^* = \overrightarrow{\exp}\int_0^t \overrightarrow{X}_\tau d\tau, \quad Q_t^* = \overleftarrow{\exp}\int_0^t -\overrightarrow{X}_\tau d\tau.$$

При этом, как и в матричном случае,

$$\left(\overrightarrow{\exp}\int_0^t \overrightarrow{X}_\tau d\tau\right)^{-1} = \overleftarrow{\exp}\int_0^t -\overrightarrow{X}_\tau d\tau$$

и имеют место соответствующие формулы вариации постоянной, например,

$$\overrightarrow{\exp}\int_0^t (\overrightarrow{X}_\tau + \overrightarrow{Y}_\tau)\, d\tau = \overrightarrow{\exp}\int_0^t \overrightarrow{\exp}\int_0^\tau \mathrm{ad}\, \overrightarrow{X}_\theta d\theta \overrightarrow{Y}_\tau d\tau \times$$

$$\times \overrightarrow{\exp}\int_0^t \overrightarrow{X}_\tau d\tau = \overrightarrow{\exp}\int_0^t \mathrm{Ad}\, \overrightarrow{\exp}\int_0^\tau \overrightarrow{X}_0 d\theta \overrightarrow{Y}_\tau d\tau\, \overrightarrow{\exp}\int_0^t \overrightarrow{X}_\tau d\tau;$$

$$\overrightarrow{\exp}\int_0^t (\overrightarrow{X}_\tau + \overrightarrow{Y}_\tau)\, d\tau = \overrightarrow{\exp}\int_0^t X_\tau d\tau\, \overrightarrow{\exp}\int_0^t \overrightarrow{\exp}\int_t^\tau \mathrm{ad}\, \overrightarrow{X}_\theta \overrightarrow{Y}_\tau d\tau =$$

$$= \overrightarrow{\exp}\int_0^t \overrightarrow{X}_\tau d\tau\, \overrightarrow{\exp}\int_0^t \mathrm{Ad}\, \overrightarrow{\exp}\int_t^\tau \overrightarrow{X}_0 d\theta \overrightarrow{Y}_\tau d\tau.$$

Отметим, что если M — аналитическое многообразие, а поля $\overrightarrow{X}_t$ и $\overrightarrow{Y}_t$ вещественно аналитичны и ограничены, то поле

$$\overrightarrow{\exp}\int_0^t \mathrm{ad}\, \overrightarrow{X}_\tau d\tau \overrightarrow{Y}_t = \mathrm{Ad}\, \overrightarrow{\exp}\int_0^t \overrightarrow{X}_\tau d\tau \overrightarrow{Y}_t$$

можно выразить также в терминах соответствующего хронологического ряда

$$\overrightarrow{\mathscr{V}}_t (\mathrm{ad}\, \overrightarrow{X}_\tau) \overrightarrow{Y}_t = \sum_{k=0}^m \int_0^t d\tau_1 \ldots \int_0^{\tau_{m-1}} d\tau_m\, \mathrm{ad}\, \overrightarrow{X}_{\tau_m} \ldots \mathrm{ad}\, \overrightarrow{X}_{\tau_1} \overrightarrow{Y}_t.$$

Именно, если $M = \mathbf{R}^n$, $\overrightarrow{X}_t$, $Y_t \in \Omega_\sigma^n$, то существует такое $\rho = \rho(\sigma)$, что ряд

$$\overrightarrow{\mathscr{V}}_t (\mathrm{ad}\, \overrightarrow{X}_\tau) \overrightarrow{Y}_t E(z) = \sum_{k=0}^\infty \int_0^t d\tau_1 \ldots \int_0^{\tau_{m-1}} \mathrm{ad}\, \overrightarrow{X}_{\tau_m} \circ \ldots \circ \mathrm{ad}\, X_{\tau_1} \overrightarrow{Y}_t E(z)$$

сходится абсолютно и равномерно при $|t| < \rho(\sigma)$, $\sigma' < \sigma$, причем

$$\left(\mathrm{Ad}\,\overrightarrow{\exp}\int\limits_0^t \vec{X}_\tau d\tau \vec{Y}_t\right) E(z) = \vec{\mathscr{V}}_t(\mathrm{ad}\,\vec{X}_\tau)\vec{Y}_t E(z).$$

Абсолютно непрерывное поле $\int\limits_0^t \vec{X}_\tau d\tau$ называется правым хронологическим логарифмом потока.

$$P_t^* = \overrightarrow{\exp}\int\limits_0^t \vec{X}_\tau d\tau$$

и обозначается через

$$\overrightarrow{\ln}\,\overrightarrow{\exp}\int\limits_0^t \vec{X}_\tau d\tau.$$

Аналогичным образом определяется левый хронологический логарифм. Как и в матричном случае, оказываются справедливыми формулы

$$\overrightarrow{\ln}\left(\overrightarrow{\exp}\int\limits_0^t \vec{X}_\tau d\tau\, \overrightarrow{\exp}\int\limits_0^t \vec{Y}_\tau d\tau\right) = \int\limits_0^t \left(\overrightarrow{\exp}\int\limits_0^\tau -\mathrm{ad}\,\vec{Y}_\theta d\theta \vec{X}_\tau + Y_\tau\right) d\tau,$$

$$\overrightarrow{\ln}\left(\overrightarrow{\exp}\int\limits_0^t \vec{X}_\tau d\tau\right)^{-1} = -\int\limits_0^t \overrightarrow{\exp}\int\limits_0^\tau \mathrm{ad}\,\vec{X}_\theta d\theta \vec{X}_\tau d\tau.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аграчев А. А., Вахрамеев С. А.*, Хронологические ряды и теорема Коши—Ковалевской. В сб. «Пробл. геометрии. Т. 12 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1981, 165—189 (РЖМат, 1981, 10Б307)
2. —, *Гамкрелидзе Р. В.*, Экспоненциальное представление потоков и хронологическое исчисление. Мат. сб., 1978, *107*, № 4, 467—532 (РЖМат, 1979, 4Б583)
3. —, —, Хронологические алгебры и нестационарные векторные поля. В сб. «Пробл. геометрии. Т. 11 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1980, 135—176 (РЖМат, 1980, 9Б451)
4. *Арнольд В. И.*, Математические методы классической механики. М., Наука, 1974, 431 с. (РЖМат, 1975, 6Б433К)
5. *Варга Дж.*, Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М., Наука, 1977, 622 с., илл. (РЖМат, 1977, 7Б666К)
6. *Габасов Р., Кириллова Ф. М.*, Методы оптимального управления. В сб. «Современные пробл. математики. Т. 6 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1975, 133—261 (РЖМат, 1976, 8Б620)
7. —, —, Математическая теория оптимального управления. В сб. «Мат. анализ. Т. 16 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1979, 55—97 (РЖМат, 1979, 7Б594)
8. *Гамкрелидзе Р. В.*, О скользящих оптимальных режимах. Докл. АН СССР, 1962, *143*, № 6, 1243—1245 (РЖМат, 1963, 5Б343)
9. —, Необходимые условия первого порядка и аксиоматика экстремаль-

ных задач. Тр. Мат. ин-та АН СССР, 1971, *112*, ч. I, 152—180 (РЖМат, 1971, 12Б677)
10. —, Основы оптимального управления. Тбилиси, 1977. Изд-во Тбилиск. ун-та, 1977, 245 с.
11. —, *Харатишвили Г. Л.*, Экстремальные задачи в линейных топологических пространствах. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1969, *33*, № 4, 781—839 (РЖМат, 1970, 2Б590)
12. *Дубовицкий А. Я., Милютин А. А.*, Необходимые условия слабого экстремума в общей задаче оптимального управления. М., Наука, 1971, 113 с., илл. (РЖМат, 19871, 11Б699)
13. *Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.*, Теория экстремальных задач. М., Наука, 1974, 479 с., илл. (РЖМат, 1974, 11Б707К)
14. *Ли Э. В., Маркус Л.*, Основы теории оптимального управления. М., Наука, 1972, 576 с. (РЖМат, 1973, 2Б590К)
15. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М., Наука, 1969, 384 с. (РЖМат, 1970, 1Б529К)
16. *Филиппов А. Ф.*, О некоторых вопросах теории оптимального регулирования. Вестн. МГУ, Сер. матем., механ., астроном., физ., хим., 1959, № 2, 25—32 (РЖМат, 1961, 6Б315)
17. *Aeyels Dirk*, Generic observability of differentible systems. SIAM J. Contr. and Optimiz., 1981, *19*, № 5, 595—603
18. *Bacciotti Andrea*, Structure métrique des orbites de familles symétriques de champes de vecteurs et théorie du temps minimum. SIAM J. Contr. and Optimiz., 1979, *17*, № 2, 311—319 (РЖМат, 1979, 10Б674)
19. —, *Stefani G.*, The region of attainability of nonlinear systems with unbounded controls. J. Optimiz. Theory and App., 1981, *35*, № 1, 57—84
20. *Baillieul J.*, Geometric methods for nonlinear optimal control problems. J. Optimiz. Theory and Appl., 1978, *25*, № 4, 519—548 (РЖМат, 1979, 5Б534)
21. —, The geometry of homogeneous polynomial dynamical systems. Nonlinear Anal.: Theory, Meth. and Appl., 1980, *4*, № 5, 879—900 (РЖМат, 1981, 1Б673)
22. *Bendsoe Martin Philip*, On the existemce of observable single—latput systems of a simple type. SIAM J. Contr. and Optimiz., 1981, *19*, № 4, 555—559
23. *Bonnard Bernard*, Controlabilite des systemes bilineaires. Qutils et modeles math. autom. Anal. syst. et trait signal. Vol. 1. Paris, 1981, 229—243 (РЖМат, 1982, 2Б677)
24. *Brockett R. W.*, System theory on group manifolds and coset spaces. SIAM J. Contr., 1972, *10*, № 2, 265—284 (РЖМат, 1973, 2Б303)
25. —, Lie algebras and Lie groups in control theory. Geometr. Meth. Syst. Theory. Dordrecht—Boston, 1973, 43—82 (РЖМат, 1974, 10В523)
26. —, On the reachable set for biliniar systems. Lect. Notes. Econ. and Math. Syst., 1975, *111*, 54—63 (РЖМат, 1976, 3Б275)
27. —, Volterra series and geometric control theory. Automatica, 1976, *12*, № 2, 167—176 (РЖМат, 1977, 1Б1017)
28. —, Control theory and singular Riemannian geometry. New Dir. Appl. Math. New York e. a., 1982, 11—27
29. *Chow W. L.*, Uber Systeme von linearen partiellen Differentialgleichungen ester Ordnung. Math. Ann., 1939, *117*, 98—105
30. *Conti R.*, On relay controllability for bilinear processes. Differential Equations. Stockholm, 1977, 32—36 (РЖМат, 1979, 1Б409)
31. *Crouch P. E.*, Dynamical realizations of finite volterra series. SIAM J. Contr. and Optimiz., 1980, *18*, № 4, 621—623
32. *Fliess Michel*, The unobservability ideal for nonlinear systems. IEEE Trans Autom. Contr. Vol. Ac-26. 1981, № 2, 592—592
33. —, Realization of nonlinear systems and abstract transitive Lie algebras. Bull. Amer. Math. Soc., 1980, 2, 444—446

34. *Haynes G. W., Hermes H.,* Nonlinear controllability via Lie theory. SIAM J. Contr., 1970, *8*, № 4, 450—460 (РЖМат, 1971, 8Б426)
35. *Hermann Robert,* On the accessibility problem in control theory. Internat. Sympos. Nonlinear Different. Equations and Nonlinear Mech., Colorado Springs, 1961. New York—London, Acad. Press., 1963, 325—332 (РЖМат, 1965, 2Б463)
36. —, Some remarks on geometry of systems. Geometr. Meth. Syst. Theory. Dordrecht—Boston, 1973, 237—242 (РЖМат, 1974, 9Б705)
37. —, *Krener A. J.,* Nonlinear controllability and observability. IEEE Trans. Automat. Contr. vol. AC—22, 1977, 728—740
38. *Hermes H.,* On local and global controllability. SIAM J. Contr., 1974, *12*, № 2, 252—261 (РЖМат, 1975, 4Б658)
39. —, Necessary and sufficient conditions for local controllability and time optimality. Proc. Int. Congr. Math., Vancouver, 1974, Vol. 2, S. 1, 1975, 343—347 (РЖМат, 1976, 8Б630)
40. —, High order algebraic conditions for controllability. Lect. Notes Econ. and Math. Syst., 1976, *131*, 165—171 (РЖМат, 1977, 1Б563)
41. —, Local controllability and sufficient conditions in singular problems. I, II. J. Different Equat., 1976, *20*, № 1, 213—232; SIAM J. Contr., 1976, *14*, № 6, 1049—1069 (РЖМат, 1976, 12Б489; 1977, 5Б317)
42. —, On local controllability. SIAM J. Contr. and Optim., 1982, *20*, № 2, 211—220
43. —, *Haynes G.,* On the nonlinear control problem with control appearing linearly. J. Soc. Industr. and Appl. Math. Control., 1963, *A1*, № 2, 85—108 (РЖМат, 1964, 6Б354)
44. *Hirschorn R. M.,* Invertibility of nonlinear control systems. SIAM J. Contr. and Optim., 1979, *17*, № 2, 289—297 (РЖМат, 1979, 10Б673)
45. *Hunt L. R.,* Controllabilite of general nonlinear systems. Math. Syst. Theory, 1979, *12*, № 4, 361—370 (РЖМат, 1980, 3Б514)
46. —, Controllability of nonlinear systems in two dimension. Math. Syst. Theory, 1980, *13*, 361—376
47. *Jakubczyk Bronisław,* Existence and uniqueness of realization of nonlinear systems. SIAM J. Contr. and Optimiz., 1980, *18*, № 4, 455—471 (РЖМат, 1981, 2Б564)
48. *Jurdjevic Velimir,* Abstract control systems: controllability and observability. SIAM J. Contr., 1970, *8*, № 3, 424—439 (РЖМат, 1971, 5Б656)
49. —, Certain controllability properties of analytic control systems. SIAM J. Contr., 1972, *10*, № 2, 354—360 (РЖМат, 1973, 1Б413)
50. —, Causal dynamical systems: irreducible realizations. Geometr. Meth. Syst. Theory. Dordrecht—Boston, 1973, 253—262 (РЖМат, 1974, 10Б280)
51. —, On the structure of irreducible state representations of a causal system. Math. Syst. Theory, 1974, *8*, № 1, 77—89 (РЖМат, 1975, 5Б356)
52. —, Attainable sets and controllability: a geometry approach. Lect. Notes Econ. and Math. Syst., 1974, *106*, 219—251 (РЖМат, 1975, 7Б539)
53. —, *Kupka J.,* Control systems on semi-simple Lie groups and their homogeneous space. Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 1981, *31*, № 4, 151—179
54. —, Control systems subordinated to a group action: Accessibility. J. of Differ. Equat., 1981, *39*, № 2, 186—211
55. —, *Sussman H.,* Controllability of nonlinear systems. J. Different. Equat., 1972, *12*, № 1, 95—116 (РЖМат, 1973, 3Б304)
56. —, —, Control systems on Lie groups. J. Different. equat., 1972, *12*, № 2, 313—329 (РЖМат, 1973, 4А580)
57. *Kalitine B., Lobry C.,* Complète contrólabilité de certains systèmes non linéabres. Rev. roum. math. pures et appl., 1979, *24*, № 2, 255—271 (РЖМат, 1979, 11Б510)
58. *Krener A. J.,* A generalization of the accessibility problem for control systems. IEEE Conf. Decis. and Contr. (Incl. 10th Symp. Adapt. Process), Miami Beach, Fla, 1971, New York, N. Y., 1971, 186—187 (РЖМат, 1973, 5Б531)

59. —, The high order maximal principle. Geometr. Meth. Syst. Theory, Dordreht—Boston. 1973, 174—184 (РЖМат, 1974, 9Б 717)
60. —, Bilinear and nonlinear realizations of input-output maps. SIAM J. Contr., 1975, *13*, № 4, 827—834 (РЖМат, 1976, 2Б252)
61. —, Local approximation of control systems. J. Different. Equat., 1975, *19*, № 1, 125—133 (РЖМат, 1976, 10Б279)
62. —, A generalization of Chow's theorem and bang-bang theorem to nonlinear control problems. SIAM J. Contr., 1974, *12*, № 1, 43—52
63. *Kucera Jan*, Solution in large of control problem: $\dot{x}=(A(1-u)+Bu)x$. Czechosl. Math. J., 1966, *16*, № 4, 600—623 (РЖМат, 1968, 5Б261)
64. —, Solution in large of control problem: $\dot{x}=(Au+Bv)x$. Czechosl. Math. J., 1967, *17*, № 1, 91—96 (РЖМат, 1968, 5Б262)
65. —, On the accessibility of bilinear system. Czechosl. mat. J., 1970, *20*, № 1, 160—168 (РЖМат, 1970, 12Б303)
66. *Langholz G., Sokolov M.*, Caratheodory controllability criterion for nonlinear dynamical systems. Trans. ASME J. Dyn. Syst., Meas, and Contr., 1978, *100*, № 3, 209—213 (РЖМат, 1979, 5Б524)
67. *Levitt Norman, Sussman Héctor J.*, On controllability by means of two vector fields. SIAM J. Contr., 1975, *13*, № 6, 1271—1281 (РЖМат, 1976, 7Б513)
68. *Lobry Claude*, Application d'un résultat de Chow à la théorie du contrôle optimal. C. r. Acad. sci., 1970, *270*, № 11, A725—A727 (РЖМат, 1970, 12Б627)
69. —, Controlabilite des systemes nonlineaires. SIAM J. Control, 1970, *8*, № 4, 573—605 (РЖМат, 1971, 7Б594)
70. —, Contrôlabilité de systèmes linéaires par des commandes bang-bang. Rev. franç. inform. et rech. opér., 1970, *4*, № R-3, 135—140 (РЖМат, 1971, 10Б255)
71. —, Une propriété de l'ensemble des états accessible d'un système quidable. C. r. Acad. sci., 1971, *272*, № 2, A153—A156 (РЖМат, 1971, 7Б591)
72. —, Une propriete generique des coples de champs de vecteurs. Czechosl. Mat. J., 1972, *22*, № 2, 230—237 (РЖМат, 1972, 11А536)
73. —, Quelques propriétés «generiques» des systèmes à commande. Lect. Notes Math., 1972, *280*, 120—130 (РЖМат, 1973, 2Б564)
74. —, Dynamical polysystems and control theory. Geometr. Meth. Syst. Theory. Dordrecht—Boston, 1973, 1—42 (РЖМат, 1974, 10Б524)
75. —, Controllability of nonlinear systems on compact manfifolds. SIAM J. Contr., 1974, *12*, № 1, 1—4
76. —, Controllability of nonlinear control dynamical systems. Contr. Theory and Top. Funct. Anal. vol. 1. Vienna, 1976, 361—383 (РЖМат, 1976, 10Б477)
77. —, Controllability des systemes non lineaires. Qutils et modeles math. autom. Anal. syst. et trait signal. Vol. 1, Paris, 1981, 187—214
78. *Markus L.*, Controllability of multi-traectories on Lie groups. Lect Notes Math., 1981, *898*, 250—265 (РЖМат, 1982, 6Б697)
79. *Nijmeijer Henk*, Controlled invariance for affine control systems. Int. J. Contr., 1981, *34*, № 4, 825—833
80. *Sallet G.*, Complete controlabilite sur les groupes lineaires. Qutils et modeles math. autom. Anal. syst. et trait signal. vol. 1. Paris, 1981, 215—227
81. *Schaft A. J. vas der*, Controllability and observability for affine nonlinear Hamiltonian systèms. IEEE Trans. Autom. Contr., 1982, *27*, № 2, 490—492
82. *Sontag Eduardo D.*, On the observability of polinomial systems. 1. Finite-time problems. SIAM J. Contr. and Optim., 1979, *17*, № 1, 139—151 (РЖМат, 1979, 8Б594)
83. *Sussmann Héctor J.*, Dynamical systems on manifolds: accessibility and controllability. IEEE Conf. Decis. and Contr. (Incl. 10th Symp. Adapt. Process), Miami Beach, Fla, 1971, New York, N. Y., 1971, 188—191 (РЖМат, 1973, 5Б534)

84. —, The control problem $\dot{x}=(A(1-u)+Bu)x$: A comment on an article by J. Kučera. Czechosl. Mat. J., 1972, *22*, 423—426 (РЖМат, 1973, 2Б553)
85. —, The control problem $\dot{x}=A(u)x$. Czechosl. Mat. J., 1972, *22*, № 3, 490—494 (РЖМат, 1973, 2Б552)
86. —, The bang-bang problem for certain control systems in $GL(n, R)$. SIAM J. Contr., 1972, *10*, № 3, 470—476 (РЖМат, 1973, 3Б563)
87. —, An extension of theorem of Nagano on transitive Lie algebras. Proc. Amer. Math. Soc., 1974, *45*, № 3, 349—356 (РЖМат, 1975, 6А694)
88. —, Orbits of families of vector fields and integrability of systems with singularities. Bull. Amer. Math. Soc., 1973, *79*, № 1, 197—199 (РЖМат, 1973, 9А584)
89. —, Orbits of families of vector fields and integrability of distributions. Trans. Amer. Math. Soc., 1973, *180*, June, 171—188 (РЖМат, 1974, 5А596)
90. —, Minimal realizations of nonlinear systems. Geometr. Meth. Syst. Theory. Dordrecht—Boston, 1973, 243—252 (РЖМат, 1974, 10Б531)
91. —, On quotients of manifolds: a generalization of the closed subgroup theorem. Bull. Amer. Math. Soc., 1974, *80*, № 3, 573—575 (РЖМат, 1975, 2А592)
92. —, A generalization of the closed subgroup theorem to quotients of arbitrary manifolds. J. Differen. Geom., 1975, *10*, № 1, 151—166 (РЖМат, 1975, 11А602)
93. —, On the number of directions needed to achieve controllability SIAM J. Contr., 1975, *13*, № 2, 414—419 (РЖМат, 1975, 9Б518)
94. —, Some properties of vector field systems that are not altered by small perturbations. J. Different. Equat., 1976, *20*, № 2, 292—315 (РЖМат, 1976, 12Б490)
95. —, Minimal realizations and canonical forms for bilinear systems. J. Franklin Inst., 1976, *301*, № 6, 593—604 (РЖМат, 1977, 1Б319)
96. —, Semigroup representation, bilinear approximation of input-output maps, and generalized inputs. Lect. Notes. Econ. and Math. Syst., 1976, *131*, 172—191 (РЖМат, 1977, 1В981)
97. —, Existence and uniqueness of minimal realization of non-linear systems. Math. Syst. Theory, 1976—1977, *10*, № 3, 263—284 (РЖМат, 1977, 12Б684)
98. —, Generic single-input observability of continous time polynomial systems. Proc. IEEE Conf. Decis. and Contr. and 17th Symp. Adapt. Process., San Diego, Calif., 1979. New York. N. Y., 1978, 566—571 (РЖМат, 1980, 2Б510)
99. —, Single-input observability of continuous time systems. Math. Syst. Theory, 1979, *12*, № 4, 371—393 (РЖМат, 1980, 3Б516)
100. —, A bang-bang theorem with bounds on the number of switchings SIAM J. Contr. and Optim., 1979, *17*, № 5, 629—651 (РЖМат, 1980, 6Б645)
101. —, Bounds on the number of switchings for trajectories of piecewise analytic vector fields. J. of Differ. Equat., 1982, *43*, № 2, 399—418