Е. А. Кашина, О представлении чисел квадратичными формами в полях алгебраических чисел,
Зап. научн. сем. ЛОМИ, 1986, том 151, 68–77

https://www.mathnet.ru/znsl4987

Е.А.Кашина

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ЧИСЕЛ КВАДРАТИЧНЫМИ ФОРМАМИ В ПОЛЯХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ

I. Введение. Пусть K - вполне вещественное поле алгебраических чисел степени $n=[K:\mathbb{Q}]$ и дискриминанта $\mathcal{D}=\mathcal{D}(K)$;

$$f=f(X)=f(x_1,\dots,x_s)=\frac{1}{2}A[X] \qquad (1)$$

- вполне положительно определенная квадратичная форма над кольцом $\mathfrak{O}$ целых чисел поля K с числом переменных $s\geq 4$. Обозначим через $r(f,m)$ число представлений над $\mathfrak{O}$ числа $m\in\mathfrak{O}$ формой f,

$$r(f,m)=\sum_{f(X)=m;\; X\in\mathfrak{O}^s} 1$$

Пусть $\rho(f,m)$ - полный особый ряд задачи:

$$\rho(f,m)=I(f,m)H(f,m),$$

где

$$I(f,m)=\left\{\frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma(\frac{s}{2})}\right\}^n \left\{N(m)\right\}^{\frac{s}{2}-1}\left\{N(\det A)\right\}^{-\frac{1}{2}}\mathcal{D}^{-\frac{s+1}{2}}$$

- особый интеграл

$$H(f,m)=\sum_{\substack{\alpha\,(\mathrm{mod}\,1)\\ \alpha\vartheta=\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}\\ (\mathfrak{a},\mathfrak{b}\vartheta)=(1)}}\frac{G(\alpha f)}{\{N(\mathfrak{b})\}^s}e^{-2\pi i\,\mathrm{tr}(\alpha m)}$$

- особый ряд Харди - Литтлвуда. Здесь ϑ - дифферента K,

$$G(\alpha f)=\sum_{X\bmod\mathfrak{b}} e^{2\pi i\,\mathrm{tr}\{\alpha f[X]\}};\quad \alpha\vartheta=\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}},(\mathfrak{a},\mathfrak{b}\vartheta)=(1)$$

- сумма Гаусса формы $f(X)$.

Говорим, что f - форма типа (P), если

$$r(f,m)=\rho(f,m)$$

для всех $m\in\mathfrak{O}$, $m\succ 0$.

В случае $K=\mathbb{Q}$ конечность числа классов примитивных квадратичных форм типа (P), доказана как для частного случая суммы квадратов [10], так и в общем случае (и даже для $s\geq 3$) [4, 3] В поле алгебраических чисел для суммы квадратов аналогичный вопрос рассматривался в работах [1, 6].

2. Основной результат. В настоящей статье распространяется результат [I, 6] на случай произвольных примитивных вполне положительных форм $f(X)$.

ТЕОРЕМА. Существует такая постоянная $c = c(s,n)$, зависящая только от $s \geq 4$ и степени n вполне вещественного поля K, что если фиксированы s, n и $N(\det A) > c$, то вполне положительно определенная квадратичная форма f вида (I) не есть форма типа (P), т.е. число классов примитивных форм типа (P) конечно.

Отсюда следует (при $s \geq 4$) результат Пфойфера [9] о конечности числа одноклассных родов вполне положительно определенных s-арных квадратичных форм над $\mathcal{O}$.

3. Вспомогательные результаты. Положим, что представимое формой f число m является ее арифметическим минимумом, т.е.

$$m = \inf_{(x_1,\dots,x_s)} f(x_1,\dots,x_s).$$

Используя теорему Минковского, можно доказать, что

$$N(m) \leq s^{\frac{2n}{s}}\, 2^{-2n(1+\frac{1}{s})} \pi^{-n} \mathcal{D}^{\frac{1}{s}} \{N(\det A)\}^{\frac{1}{s}} \left\{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\right\}^{\frac{2n}{s}}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ I. Особый ряд $H(f,m)$ можно представить в виде бесконечного произведения

$$H(f,m) = \prod_{\mathfrak{p}} \chi_{\mathfrak{p}}(m)$$

Произведение берется по всем простым идеалам $\mathfrak{p}$.

$$\chi_{\mathfrak{p}}(m) = \sum_{K=0}^{\infty} A_{\mathfrak{p}^K}(m),$$

$$A_{\mathfrak{p}^K}(m) = \sum_{\alpha (\mathrm{mod}\, 1)} \frac{G(\alpha f)}{N\mathfrak{p}^{Ks}} e^{-2\pi i \,\mathrm{tr}\, \alpha m}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Для любой квадратичной формы f, для любых $t, \mathfrak{p}$ существует эквивалентная форма f_1 такая, что

$$f \sim f_1 \equiv \pi^{e_1} \varphi_1(X) + \dots + \pi^{e_\ell} \varphi_\ell(X) (\mathrm{mod}\, \mathfrak{p}^t), \tag{2}$$

где $e_i \in \mathbb{Z}$, $0 \leq e_1 < e_2 < \dots < e_\ell < t$; $\varphi_1, \dots, \varphi_\ell$ – собственно целые формы с попарно непересекающимися переменными, числа их переменных $S_\alpha = S(\varphi_\alpha)$ $(\alpha = 1, \dots, \ell)$, $s_1 + \dots + s_\ell = s$; их определители d_i $(i = 1, \dots, \ell)$ взаимно просты с π, $\pi \in \mathfrak{p}$, $\pi \notin \mathfrak{p}^2$.

а) если $\mathfrak{p} \nmid 2$, то $$\varphi_\alpha = \sum_{\beta=1}^{S_\alpha} a_{\alpha\beta} x_\beta^2 \tag{3}$$

б) если $\mathfrak{g} \mid 2$, то φ_α – или вида (3) или

$$\varphi_\alpha = \sum_{\beta=1}^{s_\alpha/2} \left(2a'_{\alpha\beta} x_\beta^2 + 2a''_{\alpha\beta} x_\beta y_\beta + 2a'''_{\alpha\beta} y_\beta^2\right) \qquad (4)$$

(см. [8]).

4. <u>Вычисление $X_\mathfrak{p}(m)$, $\mathfrak{g} \nmid 2$</u>. Рассуждения проводятся аналогично [5] . Обозначим

$$\ell(k) = \begin{cases} 0, \text{ если } k \leqslant e_1 \\ \tau, \text{ если } e_\tau < k \leqslant e_{\tau+1} \\ \ell, \text{ если } e_\ell < k \end{cases}$$

Выберем число $\alpha_0 : \alpha_0 = \dfrac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{g}^k \vartheta}$, где $(\mathfrak{a}, \mathfrak{g}^k \vartheta) = (1)$. Тогда

$$A_{\mathfrak{g}^k}(m) = \sum_{\beta \bmod \mathfrak{g}^k}{}' \frac{G(\alpha_0 \beta f)}{N\mathfrak{p}^{ks}} e^{-2\pi i \, tr \, \alpha_0 \beta m}$$

не зависит от выбора α_0. Положим

$$\sigma_{\ell(k)}(f, \mathfrak{g}^k) = \begin{cases} \prod\limits_{i=1}^{\ell(k)} \sigma\left(\alpha_0 \pi^{e_i} \varphi_i, \mathfrak{p}^{k-e_i}\right), \text{если } \sum\limits_{i=1}^{\ell(k)} s_i (k-e_i) \equiv 0 \pmod 2 \\ \prod\limits_{i=1}^{\ell(k)} \sigma\left(\alpha_0 \pi^{e_i} \varphi_i, \mathfrak{g}^{k-e_i}\right) \sigma\left(\alpha_0 \pi^{k-1} x^2, \mathfrak{p}\right), \quad \text{если } \sum\limits_{i=1}^{\ell(k)} s_i (k-e_i) \equiv 1 (2) \end{cases}$$

где $\sigma\left(\alpha_0 \pi^{e_i} \varphi_i, \mathfrak{p}^{k-e_i}\right)$– знак суммы Гаусса $G\left(\alpha_0 \pi^{e_i} \varphi_i\right)$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. $|G(\alpha x^2)|^2 = N\mathfrak{b}$, $\alpha = \dfrac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}$, $\mathfrak{b} \nmid 2$

См. [2] .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. Пусть $\vartheta(k) = \sum\limits_{i=1}^{\ell(k)} s_i (k-e_i)$. Тогда

$$A_{\mathfrak{p}^k}(m) = \begin{cases} 0, \text{ если } m \notin \mathfrak{p}^{k-1} \\ 0, \text{ если } m \in \mathfrak{p}^k, \ \vartheta(k) \equiv 1 \pmod 2 \\ \sigma_{\ell(k)}(f, \mathfrak{p}^k) N\mathfrak{p}^{-\frac{1}{2}\vartheta(k)} \varphi(\mathfrak{p}^k), \ m \in \mathfrak{p}^k, \ \vartheta(k) \equiv 0 \pmod 2 \\ -\sigma_{\ell(k)}(f, \mathfrak{p}^k) N\mathfrak{p}^{k-1-\frac{1}{2}\vartheta(k)}, \ m \in \mathfrak{p}^{k-1} \setminus \mathfrak{p}^k, \ \vartheta(k) \equiv 0 \pmod 2 \\ \sigma_{\ell(k)}(f, \mathfrak{p}^k) \left(\dfrac{m\pi^{-k+1}}{\mathfrak{g}}\right) N\mathfrak{p}^{k-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\vartheta(k)}, \ m \in \mathfrak{p}^{k-1} \setminus \mathfrak{p}^k, \vartheta(k) \equiv 1 (2) \end{cases}$$

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $\mathfrak{g}^t \parallel m$. Тогда

$$X_\mathfrak{p}(m) = 1 + \sum_{\substack{0 < k \leqslant t \\ \vartheta(k) \equiv 0 (2)}} \sigma_{\ell(k)}(f, \mathfrak{p}^k) N\mathfrak{p}^{-\frac{1}{2}\vartheta(k)} \varphi(\mathfrak{p}^k) +$$

$$+\begin{cases} \sigma_{\ell(t+1)}(f, p^{t+1})\left(\frac{m\pi^{-t}}{p}\right) Np^{t+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}v(t+1)}, & \text{если } v(t+1)\equiv 1 \pmod 2 \\ -\sigma_{\ell(t+1)}(f, p^{t+1}) Np^{t-\frac{1}{2}v(t+1)}, & \text{если } v(t+1)\equiv 0 \pmod 2 \end{cases}$$

5. Оценка $X_p(m)$, $p \mid 2$, $p^c \| 2$. В этом случае положим

$$\sigma_i(c) = \begin{cases} 0, & \text{если во (2) } \varphi_i \text{ имеет вид (3)} \\ c, & \text{если во (2) } \varphi_i \text{ имеет вид (4)} \end{cases}$$

Пусть $\beta = \beta_1 + \pi^{k-2rc}\gamma$, где $0 \leqslant k-2rc < 2c$. Заметим, что

$$G(\alpha_0 \beta f) = G(\alpha_0 \beta_1 f) \tag{5}$$

где α_0: $\alpha_0 = \frac{\mathfrak{a}}{p^k \vartheta}$, $(\mathfrak{a}, p^k\vartheta) = (1)$

Тогда

$$A_{p^k}(m) = \sum_{\beta \bmod p^k}{}' \frac{G(\alpha_0 \beta f)}{Np^{ks}} e^{-2\pi i tr \alpha_0 \beta m}$$

не зависит от выбора α_0.

Используя (5), получаем

$$A_{p^k}(m) = Np^{\sum_{i=1}^{\ell(k)} s_i(e_i - k + \sigma_i(c))} \sum_{\gamma \bmod p^{2rc}}{}' e^{-2\pi i tr \alpha_0 \pi^{k-2rc}\gamma m} \times$$

$$\times \sum_{\beta_1 \bmod p^{k-2rc}}{}' G(\alpha_0 \beta_1 f) e^{-2\pi i tr \alpha_0 \beta_1 m} \leqslant$$

$$\leqslant Np^{\sum_{i=1}^{\ell(k)} s_i(e_i - k + \sigma_i(c))} \times$$

$$\times \sum_{\beta_1 \bmod p^{k-2rc}}' \prod_{i=1}^{\ell(k)} |G(\alpha_0 \beta_1 \varphi_i)| \times$$

$$\times \begin{cases} \varphi(p^{2rc}), & \text{если } m \in p^{2rc} \\ -N p^{2rc-1}, & \text{если } m \in p^{2rc-1} \setminus p^{2rc} \\ 0, & \text{если } m \notin p^{2rc-1} \end{cases}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.

$$A_{p^k}(m) \leqslant 2^{\frac{n}{4}\sum_{i=1}^{\ell(k)} s_i} Np^{\frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^{\ell(k)} cs_i - v(k)\right)} \left(1 - \frac{1}{Np}\right) \times$$

$$\times \begin{cases} \varphi(p^k), & \text{если } m \in p^{2rc} \\ -Np^{k-1}, & \text{если } m \in p^{2rc-1} \setminus p^{2rc} \\ 0, & \text{если } m \notin p^{2rc-1} \end{cases}$$

Оценки для $|G(\alpha_0 \beta_1 \varphi_i)|$ см. в [II].

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $p^t \| m$. Тогда

$$X_p(m) \leqslant Np^{e_1} + \sum_{e_1 < k \leqslant t+2c+1} 2^{\frac{n}{4}\sum_{i=1}^{\ell(k)} s_i} Np^{k + \frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^{\ell(k)} cs_i - v(k)\right)} \left(1 - \frac{1}{Np}\right)$$

Запишем $X_p(m)$ в виде

$$X_p(m) \leqslant N p^{e_1} + \left(1 - \frac{1}{Np}\right)[K_1 + K_2]$$

$$K_1 = \sum_{k=e_\ell+1}^{t+2c+1} 2^{\frac{n}{4}\sum_{i=1}^{\ell} s_i} Np^{k - \frac{1}{4}\left(v(k) - \sum_{i=1}^{\ell(k)} cs_i\right)} \leqslant$$

$$\leqslant 2^{\frac{n}{4}\sum_{i=1}^{\ell} s_i} Np^{\sum_{i=1}^{\ell} \frac{s_i}{4}(e_i + c) + (e_\ell + 1)\left(1 - \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{\ell} s_i\right)} \times$$

$$\times \left(1 - Np^{\left(1 - \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{\ell} s_i\right)}\right)^{-1}.$$

$$K_2 = \sum_{K=e_1+1}^{e_\ell} N_p^{\,\kappa\left(1-\frac14\sum_{i=1}^{\ell(\kappa)} s_i\right)+\frac14\sum_{i=1}^{\ell(\kappa)} s_i(e_i+c)} \cdot 2^{\frac{n}{4}\sum_{i=1}^{\ell(\kappa)} s_i} =$$

$$= \sum_{i=1}^{\ell-1}\sum_{K=e_i+1}^{e_{i+1}} 2^{\frac{n}{4}\sum_{\alpha=1}^{i} s_\alpha} N_p^{\frac14\sum_{\alpha=1}^{i} s_\alpha(e_\alpha+c)+\kappa\left(1-\frac14\sum_{\alpha=1}^{i} s_\alpha\right)} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{\ell-1} 2^{\frac{n}{4}\sum_{\alpha=1}^{i} s_\alpha} N_p^{\frac14\sum_{\alpha=1}^{i} s_\alpha(e_\alpha+c)+(e_i+1)\left(1-\frac14\sum_{\alpha=1}^{i} s_\alpha\right)} \times$$

$$\times \sum_{K=0}^{\infty} N_p^{\,\kappa\left(1-\frac14\sum_{\alpha=1}^{i} s_\alpha\right)} .$$

$$K_1+K_2 < \sum_{i=1}^{\ell} 2^{\frac{n}{4}\sum_{\alpha=1}^{i} s_\alpha} N_p^{\frac14\sum_{\alpha=1}^{i} s_\alpha(e_\alpha+c)+(e_i+1)\left(1-\frac14\sum_{\alpha=1}^{i} s_\alpha\right)} \times$$

$$\times\left(1-N_p^{\left(1-\frac14\sum_{\alpha=1}^{i} s_\alpha\right)}\right)^{-1}$$

Используем в дальнейшем следующие соотношения:

I. $$\left(N_p^{\left(\frac{1}{2\sigma}\sum_{\alpha=1}^{i} s_\alpha-1\right)}-1\right)^{-1} \leqslant \left(N_p^{\left(\frac{1}{2\sigma}\sum_{\alpha=1}^{a} s_\alpha-1\right)}-1\right)^{-1} N_p^{-\frac{1}{2\sigma}\sum_{\alpha=a+1}^{i} s_\alpha}$$

$$\sigma = \begin{cases} 2 & p\mid 2 \\ 1 & p\nmid 2 \end{cases}$$

где a – такое, что $\frac{1}{2\sigma}\sum_{\alpha=1}^{a} s_\alpha - 1 > 0$ (6)

2. $$-e_i\sum_{\alpha=1}^{i} s_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{i} s_\alpha(e_\alpha+c) \leqslant s_1(e_1+c)+s_1(e_1-e_i)-\sum_{\alpha=1}^{i}(i-\alpha)s_\alpha$$

$$K_1+K_2 < 2^{\frac{ns}{4}}\left(N_p^{\left(\frac14\sum_{\alpha=1}^{a} s_\alpha-1\right)}-1\right)^{-1} N_p^{\frac{s_1}{4}(e_1+c)} \times$$

$$\times \sum_{i=1}^{\infty} N_p^{(e_i+1)\left(1-\frac{s_1}{4}\right)-\frac14\sum_{\alpha=1}^{i}(i-\alpha)s_\alpha-\frac14\sum_{\alpha=a+1}^{i} s_\alpha}$$

Рассматривая различные случаи ($a = 1, 2, 3$), получаем окончательно

$$K_1+K_2 < N\, 2^{\frac{S}{4}}\left(\sqrt{N_p}-1\right)^{-1} N_p^{\frac{S}{4}(c-1)}\Big[1+N_p^{e_2/2}+N_p^{e_3/2-1}+$$

$$+N_p^{e_\ell/2}\frac{\sqrt{N_p}}{\sqrt{N_p}-1}\Big],$$

$$\chi_p(m) < N\, 2^{\frac{S}{2}} N_p^{\frac{t}{2}}, \qquad \prod_{\substack{p\mid 2\\ p\mid d}} \chi_p(m) < N\, 2^{\frac{S\,\nu(2)}{2}}\, N m_2^{\frac12},$$

где

$$\nu(2) = \{\#p : p\mid 2,\ p\mid d\}$$

$$Nm = \prod_{\substack{p\nmid 2\\ p^t\| m\\ p|d}} Np^t \prod_{\substack{p|2\\ p\|m\\ p|d}} Np^t = Nm_1 \; Nm_2$$

6. <u>Оценка</u> $\prod_{\substack{p\nmid 2\\ p|d\\ p^t\|m}} \chi_p(m)$. Из п.4 получаем

$$\chi_p(m) \leqslant Np^{e_1} + (1 - Np^{-1})(K_1 + K_2)$$

$$K_1 = \sum_{K=e_\ell+1}^{t+1} Np^{K - \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{\ell} s_\alpha (K - e_\alpha)} \leqslant Np^{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\ell} e_i s_i} \left(1 - Np^{(1 - \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{\ell} s_\alpha)}\right)^{-1} \times$$
$$\times Np^{(e_\ell + 1)(1 - \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{\ell} s_\alpha)} .$$

$$K_2 = \sum_{K=e_1+1}^{e_\ell} Np^{K - \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{\ell(K)} s_\alpha (K - e_\alpha)} = \sum_{i=1}^{\ell-1} \sum_{K=e_i+1}^{e_{i+1}} Np^{K(1 - \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{i} s_\alpha)} Np^{\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{i} s_\alpha e_\alpha} =$$
$$= \sum_{i=1}^{\ell-1} Np^{\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{i} s_\alpha e_\alpha + (e_i + 1)(1 - \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{i} s_\alpha)} \cdot \wp_i ,$$

где

$$\wp_i = \sum_{K=0}^{e_{i+1} - e_i - 1} Np^{K(1 - \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{i} s_\alpha)} =$$

$$= \begin{cases} e_{i+1} - e_i , & \text{если } \sum_{\alpha=1}^{i} s_\alpha = 2 \\ \left(1 - Np^{(1 - \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{i} s_\alpha)(e_{i+1} - e_i)}\right)\left(1 - Np^{(1 - \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{i} s_\alpha)}\right)^{-1} & \text{в других случаях} \end{cases}$$

и

$$K_1 + K_2 \leqslant \sum_{i=1}^{\ell} Np^{\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{i} s_\alpha e_\alpha + (e_i + 1)(1 - \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{i} s_\alpha)} \times$$
$$\times \left(1 - Np^{(1 - \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{i} s_\alpha)}\right)^{-1} .$$

Используя (6), получаем

$$K_1 + K_2 \leqslant Np^{\frac{1}{2} s_1 e_1} \left(Np^{(\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{i} s_\alpha - 1)}\right)^{-1} \times$$

$$\times \sum_{i=1}^{\infty} Np^{(1 - \frac{1}{2}s_1)(e_i - e_1) - \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{i}(i - \alpha)s_\alpha - \frac{1}{2}\sum_{\alpha=a+1}^{i} s_\alpha} .$$

Рассматривая несколько случаев ($a = 1, 2, 3$), получаем окончательно

$$\chi_p(m) < Np^{t/2} ; \quad \prod_{\substack{p\nmid 2\\ p|m}} \chi_p(m) < Nm_1^{\frac{1}{2}}$$

7. <u>Оценка</u> $\prod\limits_{p\nmid 2d} X_p(m)$. В этом случае в равенстве (2) $\ell=1$, $e_1=0$ $\vartheta(k)=k\cdot s$ и при $\vartheta(t+1)\equiv 0 \pmod 2$

$$X_p(m)=1+\sum_{\substack{0\le k\le t\\ \vartheta(k)\equiv 0 \pmod 2}} \sigma_{\ell(k)}(f,g^k)Ng^{-\frac{1}{2}ks+k-1}(Ng-1)-$$

$$-\sigma_{\ell(t+1)}(f,p^{t+1})Np^{t-\frac{1}{2}(t+1)s}\le 1+(Np-1)\times$$

$$\times\sum_{\substack{0\le k\le t\\ \vartheta(k)\equiv 0 \pmod 2}} Np^{-\frac{1}{2}ks+k-1}+Np^{t-\frac{1}{2}(t+1)s}\le \frac{1-Np^{(t+2)(1-\frac{1}{2}s)}}{1-Np^{(1-\frac{1}{2}s)}}.$$

Если $\vartheta(t+1)\equiv 1 \pmod 2$, то

$$X_p(m)=1+\sum_{\substack{0<k\le t\\ \vartheta(k)\equiv 0 \pmod 2}} \sigma_{\ell(k)}(f,g^k)Np^{-\frac{1}{2}ks+k-1}(Ng-1)+$$

$$+\sigma_{\ell(t+1)}(f,p^{t+1})\left(\frac{m\pi^{-t}}{g}\right)Np^{t+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(t+1)s}\le 1+$$

$$+\sum_{0<k\le t} Np^{-\frac{1}{2}ks+k}+Np^{t+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(t+1)s}\le \frac{1+Np^{\frac{1}{2}(1-s)}}{1-Np^{(1-\frac{1}{2}s)}}$$

В обоих случаях

$$X_p(m)\le \frac{1+Np^{\frac{1}{2}(1-s)}}{1-Np^{(1-\frac{1}{2}s)}}$$

и

$$\prod_{p\nmid 2d} X_p(m)\le \zeta_K\left(\frac{1}{2}s-1\right)\zeta_K\left(\frac{s-1}{2}\right)\zeta_K^{-1}(s-1)$$

8. <u>Доказательство теоремы</u>. Из п.п.5,6,7 следует соответственно

$$\prod_{p|d} \chi_p(m) < N^{\frac{s\cdot\nu(2)}{2}} N m^{\frac{1}{2}}$$

$$\prod_{p} \chi_p(m) < N2^{\frac{s\nu(2)}{2}} N m^{\frac{1}{2}} \zeta_K\left(\tfrac{1}{2}s-1\right)\zeta_K\left(\tfrac{s-1}{2}\right)\zeta_K^{-1}(s-1) \overset{(\text{см.п.3})}{<}$$

$$< N2^{\left(\frac{s\nu(2)}{2}-1-\frac{1}{s}\right)} \times s^{\frac{n}{s}} \pi^{-\frac{n}{2}} \mathcal{D}^{\frac{1}{2s}} \left\{N(\det A)\right\}^{\frac{1}{2s}} \left\{\Gamma\left(\tfrac{s}{2}\right)\right\}^{\frac{n}{s}} \zeta_K\left(\tfrac{1}{2}s-1\right)\zeta_K\left(\tfrac{s-1}{2}\right)\zeta_K^{-1}(s-1).$$

Из п.I выводим

$$\rho(f,m) < N2^{\left(\frac{s\nu(2)}{2}+\frac{1-s^2}{s}\right)} s^{n\left(1-\frac{1}{s}\right)} \pi^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\tfrac{s}{2}\right)^{-\frac{n}{s}} \mathcal{D}^{-\frac{1+s^2}{2s}} \times$$
$$\times \zeta_K\left(\tfrac{1}{2}s-1\right)\zeta_K\left(\tfrac{s-1}{2}\right)\zeta_K^{-1}(s-1)\left\{N(\det A)\right\}^{-\frac{1}{2s}}$$

Обозначим

$$C = C(s,n,\mathcal{D}) = N2^{s\left(\frac{\nu(2)}{2}-1\right)} s^{n} \Gamma\left(1+\tfrac{s}{2}\right)^{-\frac{n}{s}} \pi^{\frac{n}{2}} \times$$
$$\times \mathcal{D}^{-\frac{1+s^2}{2s}} \zeta_K\left(\tfrac{1}{2}s-1\right)\zeta_K\left(\tfrac{s-1}{2}\right)\zeta_K^{-1}(s-1).$$

Используя оценку дискриминанта ([7], с.70)

$$|\mathcal{D}| \geq \left(\tfrac{11}{2}\right)^{2}\left(\tfrac{\pi e^2}{4}\right)^{4}(2\pi n)^{-1}$$

можно записать C в виде

$$C = C(s,n) = 2^{\frac{13(s^2+1)}{2s} + sn\left(\frac{\nu(2)}{2}-1\right)} s^{n} \Gamma\left(1+\tfrac{s}{2}\right)^{-\frac{n}{2}} \pi^{\left(\frac{n-3s}{2}-\frac{3}{2s}\right)} \times$$
$$\times \left(\tfrac{11e^4}{3}\right)^{-\frac{1+s^2}{s}} \zeta_K\left(\tfrac{1}{2}s-1\right)\zeta_K\left(\tfrac{s-1}{2}\right)\zeta_K^{-1}(s-1) n^{\frac{1+s^2}{2s}}.$$

Поэтому $\rho(f,m) < 2$ при $N(\det A) \geq \left(\frac{c}{2}\right)^{2s}$, в то время как число представлений m формой $f(X)$ больше двух. Следовательно, при $N(\det A) \geq \left(\frac{c}{2}\right)^{2s}$ не существует форм f типа P.

Литература

1. Воронецкий А.Б., Кашина Е.А. Суммы квадратов в полях алгебраических чисел. – Топология и теория множеств. Ижевск, 1982, с.103–110.
2. Гекке Э. Лекции по теории алгебраических чисел. М.–Л.: ГИТТЛ,1940.
3. Гогишвили Г.П. О конечности числа определенных клас-

сов положительных примитивных квадратичных форм. – Труды ТМИ им.Размадзе, 1974, т.45, с.778-1100.
4. К о г а н Л.А., Т а ш п у л а т о в Б.Т., Ф а й з и е в С.Р. Представление чисел квадратичными формами. Ташкент, 1980. 226 с.
5. М а л ы ш е в А.В. О представлении целых чисел положительными квадратичными формами. – Тр.Мат.ин-та АН СССР, 1962, т.65. 212 с.
6. D z e w a s J. Quadratsummen in reel-quadratischen Zahlkörpern. – Math.Nachr., 1960, Bd.21, S.233-284.
7. N a r k i e w i c z W. Elementary and analytic theory of algebraic numbers. Warzawa, 1974.
8. O ' M e a r a O.T. Introduction to quadratic forms. S., 1963.
9. P f e u f f e r H. On the conjecture about class numbers of totally positive quadratic forms in totally real algebraic number fields. – J.Number Theory, 1979, v.11, N 2,p.188-196.
10. R a n k i n R.A. Sums of squares and cusp forms. – Amer. J.Math., 1965, v.87, N 4, p.857-860.
11. S i e g e l C.L. Additive Theorie der Zahlkörper. II. – Math.Ann., 1923, Bd.88, S.184-210.