Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

E. O. Biteleva, D. V. Valovik, A note on hybrid waves in plane layered waveguiding structures,
University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences, 2017, Issue 3, 3–14

https://www.mathnet.ru/eng/ivpnz185

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
https://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 18.97.9.173
June 18, 2025, 11:00:26

М А Т Е М А Т И К А

УДК 517.927, 517.968, 519.6
DOI 10.21685/2072-3040-2017-3-1

Е. О. Бителева, Д. В. Валовик

О ГИБРИДНЫХ ВОЛНАХ В ТЕОРИИ ПЛОСКИХ ВОЛНОВЕДУЩИХ СТРУКТУР [1]

Аннотация.

Актуальность и цели. Изучается распространение гибридной электромагнитной волны в плоском слое, заполненном анизотропным диэлектриком. Интерес к подобным задачам обусловлен как математическими аспектами теории, так и практическими приложениями в микроэлектронике и фотонике.

Материалы и методы. Применены классические методы теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Результаты. Исследована линейная двухпараметрическая задача на собственные значения, возникающая в электродинамике волноведущих структур. Конфигурация поля полностью учитывает симметрию плоского волновода. Распространяющаяся волна определяется парой связанных постоянных распространения. Получено дисперсионное уравнение, определяющее постоянные распространения и доказана теорема об эквивалентности исходной задачи о распространении волн и дисперсионного уравнения.

Выводы. Предложена новая концепция гибридного электромагнитного поля в плоскослоистой волноведущей структуре. Гибридная электромагнитная волна является наиболее общей конфигурацией поля в плоской геометрии. Эта концепция обобщает хорошо известные типы поляризованных волн (TE- и TM-волны).

Ключевые слова: гибридная электромагнитная волна, плоский волновод, двухпарамертическая задача на собственные значения, уравнения Максвелла.

E. O. Biteleva, D. V. Valovik

A NOTE ON HYBRID WAVES IN PLANE LAYERED WAVEGUIDING STRUCTURES

Abstract.

Background. The paper focuses on the problem of propagation of a hybrid electromagnetic wave in a plane layer filled with anisotropic dielectric. Such kind of problems attracts attention due to the mathematical aspects of the theory as well as the importance in microelectronics and photonics.

Materials and methods. Classical methods of ordinary differential equations.

Results. A linear two-parameter eigenvalue problem arising in the theory of guided electromagnetic waves is considered. The field configuration is adjusted with the symmetry of a plane layered waveguide. The guided wave is characterised

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 15-01-00206), Минобрнауки РФ (Соглашение 1.894.2017/4.6)).

by a pair of coupled propagation constants. The dispersion equation, which determines the coupled propagation constants, is derived. The equivalency between the original waveguiding problem and the dispersion equation is proved.

Conclusions. The paper suggests a novel concept of a hybrid electromagnetic wave in a plane layered structure. The hybrid wave is the most general field configuration, which can exist in a plane waveguide. This concept generalises well known types of polarised guided waves (TE and TM waves).

Key words: hybrid electromagnetic wave, plane waveguide, two-parameter eigenvalue problem, Maxwell equations.

1. Физическая формулировка задачи

Рассмотрим плоский слой $\Sigma := \left\{ (x, y, z) : 0 \le x \le h, (x, z) \in \mathbb{R}^2 \right\}$, расположенный в декартовой системе координат $Oxyz$ и имеющий идеально проводящие стенки:

$$\sigma_0 := \left\{ (x, y, z) : x = 0,\ (y, z) \in \mathbb{R}^2 \right\}, \quad \sigma_h := \left\{ (x, y, z) : x = h,\ (y, z) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Мы изучаем распространение монохроматической электромагнитной волны $(\mathbf{E}, \mathbf{H}) e^{-i\omega t}$ в слое Σ, где ω – круговая частота. Вектор функции $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ носят название комплексных амплитуд, которые в рассматриваемой задаче имеют вид

$$\mathbf{E} = (e_x, e_y, e_z)^T \cdot e^{i(\gamma_y y + \gamma_z z)}, \quad \mathbf{H} = (h_x, h_y, h_z)^T \cdot e^{i(\gamma_y y + \gamma_z z)}, \tag{1}$$

где

$$e_x \equiv e_x(x),\ \ e_y \equiv e_y(x),\ \ e_z \equiv e_z(x),\ \ h_x \equiv h_x(x),\ \ h_y \equiv h_y(x),\ \ h_z \equiv h_z(x),$$

и γ_y, γ_z – неизвестные и подлежащие определению вещественные параметры (связанные постоянные распространения электромагнитной волны), $(\cdot)^{\mathrm{T}}$ – операция транспонирования.

Слой Σ заполнен немагнитной анизотропной однородной средой, характеризующейся тензором диэлектрической проницаемости

$$\hat{\varepsilon} = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon}_x & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\varepsilon}_y & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\varepsilon}_z \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где диагональные элементы вещественны и, вообще говоря, все различны. Предполагаем, что в слое $\mu = \mu_0 > 0$ – магнитная проницаемость вакуума. Без потери общности считаем, что $\tilde{\varepsilon}_x \ge \max\left\{ \tilde{\varepsilon}_y, \tilde{\varepsilon}_z \right\}$.

Задачей *P* будем называть задачу определения связанных собственных значений $(\gamma_y, \gamma_z) = (\tilde{\gamma}_y, \tilde{\gamma}_z)$, для которых существует нетривиальное поле $(\mathbf{E}, \mathbf{H}) e^{-i\omega t}$ такое, что комплексные амплитуды $\mathbf{E}, \mathbf{H}$, заданные формулами (1), удовлетворяют уравнениям Максвелла

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = i\mu\omega\mathbf{H},\ \ \operatorname{rot}\mathbf{H} = -i\hat{\varepsilon}\omega\mathbf{E}, \tag{3}$$

а касательные компоненты электрического поля обращаются в нуль на границах $x = 0,\ \ x = h.$

В настоящей статье рассматривается случай, который отвечает набору параметров

$$\tilde{\varepsilon}_x > \max\left\{\tilde{\varepsilon}_y, \tilde{\varepsilon}_z\right\}, \tilde{\varepsilon}_y \neq \tilde{\varepsilon}_z \ \text{ и } \ \gamma_y \neq 0\ ,\ \gamma_z \neq 0\ . \tag{4}$$

Задача P является линейной двухпараметрической задачей на собственные значения [1]. Насколько известно авторам статьи, поле типа (1), которое можно назвать гибридным, ранее в литературе не изучалось.

2. Основные уравнения

Подставив поля (1) в систему (3), получаем шесть скалярных уравнений, которые запишем в следующем виде

$$\begin{cases} \gamma_y e_z - \left(\gamma_z e_y\right) = \mu\omega h_x, \\ \gamma_z\left(ie_x\right) - e_z' = i\mu\omega\left(ih_y\right), \\ e_y' - \gamma_y\left(ie_x\right) = i\mu\omega\left(ih_z\right), \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} \gamma_y\left(ih_z\right) - \gamma_z\left(ih_y\right) = -\omega\varepsilon_0\tilde{\varepsilon}_x\left(ie_x\right), \\ -\gamma_z h_x - (ih_z)' = \omega\varepsilon_0\tilde{\varepsilon}_y e_y, \\ (ih_y)' + \gamma_y h_x = \omega\varepsilon_0\tilde{\varepsilon}_z e_z. \end{cases} \tag{6}$$

Обозначим $ie_x,\ e_y,\ e_z$ через $u_x,\ u_y,\ u_z$ соответственно.

Из системы (5) находим

$$h_x = \frac{1}{\mu\omega}\left(\gamma_y u_z - \gamma_z u_y\right),\ ih_y = \frac{1}{\mu\omega}(\gamma_z u_x - u_z'),\ ih_z = \frac{1}{\mu\omega}(u_y' - \gamma_y u_x). \tag{7}$$

Подставив выражения (7) в уравнения (6), получаем систему уравнений, которую можно представить в виде

$$\begin{cases} \gamma_y u_y' + \gamma_z u_z' = -(\varepsilon_x - \gamma_y^2 - \gamma_z^2)u_x, \\ u_y'' + \gamma_y\gamma_z u_z - \gamma_y u_x' = -(\varepsilon_y - \gamma_z^2)u_y, \\ u_z'' + \gamma_y\gamma_z u_y - \gamma_z u_x' = -(\varepsilon_z - \gamma_y^2)u_z, \end{cases} \tag{8}$$

где $\varepsilon_x = k_0^2\tilde{\varepsilon}_x, \varepsilon_y = k_0^2\tilde{\varepsilon}_y, \varepsilon_z = k_0^2\tilde{\varepsilon}_z, k_0^2 = \mu\varepsilon_0\omega^2.$

Из первого уравнения системы (8) находим

$$u_x = -\frac{1}{\delta}\left(\gamma_y u_y' + \gamma_z u_z'\right), \tag{9}$$

где $\delta = \varepsilon_x - \gamma_y^2 - \gamma_z^2.$

Используя (9) и считая, что $\delta \neq 0$, получаем из (8):

$$\begin{cases} u_y'' = -\dfrac{\varepsilon_x\varepsilon_y - \varepsilon_y\gamma_y^2 - \varepsilon_x\gamma_z^2}{\varepsilon_x} u_y - \gamma_y\gamma_z \dfrac{\varepsilon_x - \varepsilon_z}{\varepsilon_x} u_z, \\ u_z'' = -\gamma_y\gamma_z \dfrac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{\varepsilon_x} u_y - \dfrac{\varepsilon_x\varepsilon_z - \varepsilon_x\gamma_y^2 - \varepsilon_z\gamma_z^2}{\varepsilon_x} u_z. \end{cases} \tag{10}$$

3. Решение основных уравнений

Пусть $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4)^T = (u_y, u_y', u_z, u_z')^T$, тогда систему (10) можно записать в виде

$$\mathbf{v}' = \mathrm{A}\mathbf{v}, \tag{11}$$

где

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -a & 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -c & 0 & -d & 0 \end{pmatrix},$$

а коэффициенты a, b, c, d определены формулами:

$$a = \varepsilon_y - \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x}\gamma_y^2 - \gamma_z^2, \; b = \gamma_y\gamma_z\left(1 - \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x}\right),$$

$$d = \varepsilon_z - \gamma_y^2 - \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x}\gamma_z^2, \; c = \gamma_y\gamma_z\left(1 - \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x}\right). \tag{12}$$

Собственные значения матрицы A обозначим через λ_1, λ_2, λ_3 и λ_4; они легко находятся и имеют вид

$$\lambda_1 = i\frac{\sqrt{a + d + \sqrt{D}}}{\sqrt{2}} = i\lambda_1', \quad \lambda_3 = -i\lambda_1',$$

$$\lambda_2 = i\frac{\sqrt{a + d - \sqrt{D}}}{\sqrt{2}} = i\lambda_2', \quad \lambda_4 = -i\lambda_2', \tag{13}$$

где

$$D = (a+d)^2 - 4(ad - bc) = (a-d)^2 + 4bc =$$

$$= (a-d)^2 + 4\gamma_y^2\gamma_z^2 \frac{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)(\varepsilon_x - \varepsilon_z)}{\varepsilon_x^2} > 0. \tag{14}$$

Предполагаем, что $a + d \neq 0$ и $ad - bc \neq 0$. В этом случае все λ_i различны (и не равны нулю), а значит существует базис из собственных векторов $\mathbf{x}_i$.

Собственные векторы $\mathbf{x}_i$ являются решениями системы

$$\left(\mathrm{A}-\lambda_i \mathrm{E}\right)\mathbf{x}=0,$$

и имеют вид

$$\mathbf{x}_i=\left(-b,-b\lambda_i,a+\lambda_i^2,\lambda_i\left(a+\lambda_i^2\right)\right)^{\mathrm{T}},\ i=1,2,3,4. \tag{15}$$

Теперь решение системы (11) можно записать в виде

$$\mathbf{v}=\sum_{i=1}^{4}c_i\mathbf{x}_i e^{\lambda_i x},$$

где c_i – произвольные постоянные.

Из полученной формулы следует, что компоненты u_y, u_z решения $\mathbf{u}=\left(u_x,u_y,u_z\right)^{\mathrm{T}}$ системы (8) даются следующими выражениями

$$u_y\left(x\right)=\sum_{i=1}^{4}c_i(-b)e^{\lambda_i x},\quad u_z\left(x\right)=\sum_{i=1}^{4}c_i(a+\lambda_i^2)e^{\lambda_i x}, \tag{16}$$

а u_x определяется формулой (9).

Решения (16) получены, когда $a+d\neq 0$ и $ad-bc\neq 0$. Рассмотрим ситуацию, когда хотя бы одно из этих соотношений не выполняется. Для этого выясним, при каких условиях λ_1 и λ_2 обращаются в нуль. Очевидно, что

$$\lambda_1^2=\lambda_3^2=-\frac{a+d+\sqrt{D}}{2},\quad \lambda_2^2=\lambda_4^2=-\frac{a+d-\sqrt{D}}{2}.$$

Если $a+d>0$, то λ_1, λ_3 в нуль не обращаются (поскольку $D>0$) и $\lambda_1=-\lambda_3$; при этом если $ad-bc=0$, то $\lambda_2=\lambda_4=0$. Если $a+d<0$ и $ad-bc=0$, $\lambda_1=\lambda_3=0$; при этом λ_2, λ_4 в нуль не обращаются (поскольку $D>0$) и $\lambda_2=-\lambda_4$.

Используя формулы (12) , можно показать, что соотношение $ad-bc=0$ принимает вид

$$\frac{\varepsilon_y\varepsilon_z}{\varepsilon_x}\left(\frac{\gamma_y^2}{\varepsilon_z}+\frac{\gamma_z^2}{\varepsilon_y}-1\right)\left(\gamma_y^2+\gamma_z^2-\varepsilon_x\right)=0. \tag{17}$$

Из формулы (17) ясно, что $ad-bc=0$ на эллипсе E и окружности C, где

$$E:=\left\{\left(\gamma_y,\gamma_z\right):\frac{\gamma_y^2}{\varepsilon_z}+\frac{\gamma_z^2}{\varepsilon_y}=1\right\},\quad C:=\left\{\left(\gamma_y,\gamma_z\right):\gamma_y^2+\gamma_z^2=\varepsilon_x\right\}.$$

Другими словами, точки в которых какие-либо из собственных значений λ_i' могут обращаться в нуль, лежат только на окружности C и эллипсе E.

Отметим, что в случае $a+d=0$ и $ad-bc\neq 0$ все собственные значения λ_i различны.

Одновременное обращение в нуль выражений $a+d$ и $ad-bc$ невозможно. Действительно, используя формулы (12), можно показать, что соотношение $a+d=0$ имеет вид

$$\frac{\gamma_y^2}{\varepsilon_x\dfrac{\varepsilon_y+\varepsilon_z}{\varepsilon_x+\varepsilon_y}}+\frac{\gamma_z^2}{\varepsilon_x\dfrac{\varepsilon_y+\varepsilon_z}{\varepsilon_x+\varepsilon_z}}=1. \tag{18}$$

Формула (18) определяет эллипс

$$E'=\left\{\left(\gamma_y,\gamma_z\right):\frac{\gamma_y^2}{\varepsilon_x\dfrac{\varepsilon_y+\varepsilon_z}{\varepsilon_x+\varepsilon_y}}+\frac{\gamma_z^2}{\varepsilon_x\dfrac{\varepsilon_y+\varepsilon_z}{\varepsilon_x+\varepsilon_z}}=1\right\}. \tag{19}$$

В силу того, что $\varepsilon_x>\max\left\{\varepsilon_y,\varepsilon_z\right\}$, эллипс E находится строго внутри окружности C.

Рассмотрим неравенства

$$\varepsilon_z\left(\varepsilon_x+\varepsilon_y\right)<\varepsilon_x\left(\varepsilon_y+\varepsilon_z\right)<\varepsilon_x\left(\varepsilon_x+\varepsilon_y\right),$$

$$\varepsilon_y\left(\varepsilon_x+\varepsilon_z\right)<\varepsilon_x\left(\varepsilon_y+\varepsilon_z\right)<\varepsilon_x\left(\varepsilon_x+\varepsilon_z\right),$$

справедливость которых очевидна. Из этих неравенств следует, что

$$\varepsilon_z<\varepsilon_x\frac{\varepsilon_y+\varepsilon_z}{\varepsilon_x+\varepsilon_y}<\varepsilon_x \text{ и } \varepsilon_y<\varepsilon_x\frac{\varepsilon_y+\varepsilon_z}{\varepsilon_x+\varepsilon_z}<\varepsilon_x.$$

Отсюда получаем, что эллипс E' находится строго внутри области, ограниченной эллипсом E и окружностью C. Таким образом, кривые C и E', а также E и E' не имеют общих точек.

Пусть $a+d>0$ и $ad-bc=0$. В этом случае

$$\lambda_1=i\sqrt{a+d}\ ,\ \lambda_2=0,\ \lambda_3=-\lambda_1,\ \lambda_4=0.$$

Собственные векторы, отвечающие собственным значениям λ_1 и λ_3, определяются формулой (15). Поскольку $a+\lambda_1^2=a+\lambda_2^2=d$, то получаем

$$\mathbf{x}_1=\left(-b,-b\lambda_1,-d,-\lambda_1 d\right)^{\mathrm{T}},\mathbf{x}_3=\left(-b,-b\lambda_3,-d,-\lambda_3 d\right)^{\mathrm{T}}$$

(очевидно, векторы $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_3$ линейно независимы).

Вычисляя матрицу $\mathrm{A}-\lambda_2\mathrm{E}(=\mathrm{A}-\lambda_4\mathrm{E})$, получаем, что ее ранг равен 3. Поскольку кратность собственного значения λ_2 равна 2, то собственные векторы, отвечающие этому собственному значению, надо искать в виде

$$\mathbf{x}_2 = \left(a_1 + b_1 x, a_2 + b_2 x, a_3 + b_3 x, a_4 + b_4 x\right)^{\mathrm{T}},$$

где a_i, b_i подлежат определению.

Подставив указанный вектор вместо $\mathbf{v}$ в уравнение (11), приходим к системе

$$\begin{cases} b_1 = a_2 + b_2 x, \\ b_2 = -a\left(a_1 + b_1 x\right) - b\left(a_3 + b_3 x\right), \\ b_3 = a_4 + b_4 x, \\ b_4 = -c\left(a_1 + b_1 x\right) - d\left(a_3 + b_3 x\right). \end{cases}$$

Откуда, считая a_3 и b_3 свободными переменными, получаем, что решение $\mathbf{v}_2$ системы (11), отвечающее собственным значениям λ_2, λ_4, имеет вид

$$\mathbf{v}_2 = \left(-\frac{b}{a}\left(a_3 + b_3 x\right), -\frac{b}{a} b_3, a_3 x + b_3 x, b_3\right)^{\mathrm{T}}.$$

Из полученных результатов следует, что компоненты u_y, u_z решения $\mathbf{u} = \left(u_x, u_y, u_z\right)^{\mathrm{T}}$ системы (8) даются выражениями:

$$u_y\left(x\right) = -c_1 b e^{\lambda_1 x} - c_3 b e^{\lambda_3 x} - \frac{b}{a}\left(a_3 + b_3 x\right), \;\; u_z\left(x\right) = -c_1 d e^{\lambda_1 x} - c_3 d e^{\lambda_3 x} + a_3 + b_3 x,$$

где c_1, c_3, a_3, b_3 – произвольные постоянные, а u_x определяется формулой (9).

Поскольку $\lambda_3 = -\lambda_1 = -i\sqrt{a+d}$ и $a + d > 0$, то полученные решения удобно переписать в виде

$$u_y\left(x\right) = -\overline{c}_1 b \sin\left(x\sqrt{a+d}\right) - \overline{c}_3 b \cos\left(x\sqrt{a+d}\right) - \frac{b}{a}\left(a_3 + b_3 x\right), \tag{20}$$

$$u_z\left(x\right) = -\overline{c}_1 d \sin\left(x\sqrt{a+d}\right) - \overline{c}_3 d \cos\left(x\sqrt{a+d}\right) + a_3 + b_3 x, \tag{21}$$

где $\overline{c}_1, \overline{c}_3, a_3, b_3$ – произвольные постоянные.

Пусть $a + d < 0$ и $ad - bc = 0$. В этом случае

$$\lambda_1 = 0, \;\; \lambda_2 = -\sqrt{\left|a+d\right|}, \;\; \lambda_3 = 0, \;\; \lambda_2 = \sqrt{\left|a+d\right|}.$$

Собственные векторы, отвечающие собственным значениям λ_2 и λ_4, определяются формулой (15). Поскольку $a + \lambda_2^2 = a + \lambda_2^2 = -d$, то получаем

$$\mathbf{x}_2 = \left(-b, -b\lambda_2, -d, -\lambda_2 d\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\mathbf{x}_4 = \left(-b, -b\lambda_4, -d, -\lambda_4 d\right)^{\mathrm{T}}$$

(очевидно, векторы $\mathbf{x}_2$ и $\mathbf{x}_4$ линейно независимы).

Вычисляя матрицу $A-\lambda_1 E(=A-\lambda_3 E)$, получаем, что ее ранг равен 3. Поскольку кратность собственного значения λ_1 равна 2, то собственные векторы, отвечающие этому собственному значению, надо искать в виде

$$\mathbf{x}_2=\left(a_1+b_1x,a_2+b_2x,a_3+b_3x,a_4+b_4x\right)^{\mathrm{T}},$$

где a_i, b_i подлежат определению.

Подставив указанный вектор вместо $\mathbf{v}$ в уравнение (11), приходим к системе

$$\begin{cases} b_1=a_2+b_2x, \\ b_2=-a\left(a_1+b_1x\right)-b\left(a_3+b_3x\right), \\ b_3=a_4+b_4x, \\ b_4=-c\left(a_1+b_1x\right)-d\left(a_3+b_3x\right). \end{cases}$$

Откуда, считая a_3 и b_3 свободными переменными, получаем, что решение $\mathbf{v}_2$ системы (11), отвечающее собственным значениям λ_1, λ_3, имеет вид

$$\mathbf{v}_1=\left(-\frac{b}{a}\left(a_3+b_3x\right),-\frac{b}{a}b_3,a_3x+b_3x,b_3\right)^{\mathrm{T}}.$$

Из полученных результатов следует, что компоненты u_y,u_z решения $\mathbf{u}=\left(u_x,u_y,u_z\right)^{\mathrm{T}}$ системы (8) даются выражениями:

$$u_y\left(x\right)=-c_1be^{\lambda_2x}-c_3be^{\lambda_4x}-\frac{b}{a}\left(a_3+b_3x\right),$$

$$u_y\left(x\right)=-c_1de^{\lambda_2x}-c_3de^{\lambda_4x}+a_3+b_3x,$$

где c_i,a_3,b_3 – произвольные постоянные, а u_x определяется формулой (9).

Поскольку $\lambda_2=-\lambda_4=-\sqrt{a+d}$ и $a+d<0$, то полученные решения удобно переписать в виде

$$u_y\left(x\right)=-c_2be^{-x\sqrt{|a+d|}}-c_4de^{x\sqrt{|a+d|}}-\frac{b}{a}\left(a_3+b_3x\right), \tag{22}$$

$$u_z\left(x\right)=-c_2de^{-x\sqrt{|a+d|}}-c_4de^{x\sqrt{|a+d|}}+a_3+b_3x. \tag{23}$$

4. Дисперсионное уравнение

На идеально проводящих стенках σ_0 и σ_h касательные компоненты электрического поля **E** обращаются в нуль. Касательными являются *y*-я и *z*-я компоненты вектора **E**. Отсюда получаем краевые условия:

$$u_y\left(0\right)=u_z\left(0\right)=u_y\left(h\right)=u_z\left(h\right)=0. \tag{24}$$

Из решений (16) и условий (24) получаем линейную однородную систему уравнений следующего вида:

$$\begin{cases} c_1 & +c_2 & +c_3 & +c_4 = 0, \\ \lambda_1^2 c_1 & +\lambda_2^2 c_2 & +\lambda_3^2 c_4 & +\lambda_4^2 c_4 = 0, \\ e^{\lambda_1 h} c_1 & +e^{\lambda_2 h} c_2 & +e^{\lambda_1 h} c_3 & +e^{-\lambda_4 h} c_4 = 0, \\ \lambda_1^2 e^{\lambda_1 h} c_1 & +\lambda_2^2 e^{\lambda_2 h} c_2 & +\lambda_3^2 e^{\lambda_3 h} c_3 & +\lambda_4^2 e^{-\lambda_2 h} c_4 = 0, \end{cases}$$

которую, используя формулы $\lambda_3 = -\lambda_1$, $\lambda_4 = -\lambda_2$, удобно записать в матричной форме:

$$\mathrm{B}\mathbf{c} = 0,$$

где $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3, c_4)^{\mathrm{T}}$,

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_1^2 & \lambda_2^2 \\ e^{h\lambda_1} & e^{h\lambda_2} & e^{-h\lambda_1} & e^{-h\lambda_2} \\ \lambda_1^2 e^{h\lambda_1} & \lambda_2^2 e^{h\lambda_2} & \lambda_1^2 e^{-h\lambda_1} & \lambda_2^2 e^{-h\lambda_2} \end{pmatrix}.$$

Условие совместности этой системы

$$\det \mathrm{B} = 0 \tag{25}$$

является дисперсионным уравнением. Указанный определитель элементарно вычисляется и дает

$$\det B = (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)^2 \left(e^{\lambda_1 h} - e^{-\lambda_1 h}\right)\left(e^{\lambda_2 h} - e^{-\lambda_2 h}\right) \text{ и } \lambda_1^2 - \lambda_2^2 = -\sqrt{D}.$$

Из формулы (14) видим, что $D > 0$. Следовательно, дисперсионное уравнение, отвечающее случаю попарно различных λ_i, имеет вид

$$\left(e^{\lambda_1 h} - e^{-\lambda_1 h}\right)\left(e^{\lambda_2 h} - e^{-\lambda_2 h}\right). \tag{26}$$

Для получения дисперсионного уравнения при $ad - bc = 0$, рассмотрим решения (20)–(21) и (22)–(23). Используя краевые условия (24) и решения (20)–(21), получаем дисперсионное уравнение в виде

$$\sin\sqrt{a+d}\,h = 0. \tag{27}$$

Легко проверить, что решение (22)–(23), которое удовлетворяет краевым условиям (24), является тривиальным.

5. Исследование дисперсионного уравнения

Кривые E и C делят плоскость $\left(\gamma_y, \gamma_z\right)$ на три непересекающиеся области: i_1, i_2 и i_3. Будем обозначать множество точек окружности C и точек,

лежащих внутри нее, через $\overline{C}$; множество точек эллипса E и точек, лежащих внутри него, через $\overline{E}$ ($\overline{C}$ и $\overline{\varepsilon}$ – замкнутые множества); (открытое) множество точек, лежащих внутри окружности C, через $\operatorname{Int}\overline{C}$; (открытое) множество точек, лежащих внутри эллипса E, через $\operatorname{Int}\overline{E}$. Тогда $i_1 = \operatorname{Int}\overline{E}$, $i_2 = \operatorname{Int}\overline{C} \setminus \overline{E}$, $i_3 = \left\{\left(\gamma_y, \gamma_z\right) : \left(\gamma_y, \gamma_z\right) \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{C}\right\}$.

Поскольку $\lambda_i'^2$ может менять знак только при переходе через C или E, то в каждой из областей величина $\lambda_1'^2$ (или $\lambda_2'^2$) либо положительна, либо отрицательна. Таким образом, достаточно выбрать в каждой из областей по одной точке и вычислить значение $\lambda_i'^2$ в этой точке.

Пусть $\theta > 0$ – достаточно малое число.

Вычисляя $\lambda_i'^2$ в точке $\left(\gamma_y, \gamma_z\right) = (\theta, \theta) \in i_1$, получаем

$$\lambda_i'^2 = \frac{\varepsilon_y + \varepsilon_z \pm \left|\varepsilon_y - \varepsilon_z\right| + O(\theta^2)}{2} > 0.$$

Следовательно, в области i_1 дисперсионное уравнение (26) принимает вид

$$\sin\left(\lambda_1' h\right)\sin\left(\lambda_2' h\right) = 0, \tag{28}$$

с вещественными λ_1', λ_2'. Очевидно, решения (28) – корни уравнения (25).

В области i_2 можно взять, например, точку $\left(\gamma_y, \gamma_z\right) = (\theta, \alpha)$, где $\sqrt{\varepsilon_y} < \alpha < \sqrt{\varepsilon_z}$. Тогда, используя формулы (12), получаем $\lambda_1'^2 = d + O(\theta) > 0$ и $\lambda_2'^2 = a + O(\theta) < 0$.

Значит в области i_2 дисперсионное уравнение (26) принимает вид

$$\sin\left(\lambda_1' h\right)\operatorname{sh}\left(\lambda_2 h\right) = 0 \tag{29}$$

с вещественными λ_1', λ_2. Поскольку λ_2 не обращается в нуль при $\left(\gamma_y, \gamma_z\right) \in i_2$, то второй множитель в (29) также не обращается в нуль.

В области i_3 можно взять, например, точку $\left(\gamma_y, \gamma_z\right) = (\theta, \alpha)$, где $\alpha > \sqrt{\varepsilon_x}$. В этом случае, используя формулы (12), получаем $\lambda_1'^2 = d + O(\theta) < 0$ и $\lambda_2'^2 = a + O(\theta) < 0$.

Следовательно в области i_3 дисперсионное уравнение (25) принимает вид

$$\operatorname{sh}\left(\lambda_1 h\right)\operatorname{sh}\left(\lambda_2 h\right) = 0 \tag{30}$$

с вещественными λ_1, λ_2.

Так как λ_1, λ_2 не обращаются в нуль при $\left(\gamma_y, \gamma_z\right) \in i_3$, то не обращаются в нуль и множители в (30), значит уравнение (30) не имеет решений при $\left(\gamma_y, \gamma_z\right) \in i_3$.

Из проведенных рассуждений следует, что не существует вещественных решений $\left(\gamma_y,\gamma_z\right)=\left(\tilde{\gamma}_y,\tilde{\gamma}_z\right)$ уравнения (26), лежащих в области i_3.

Рассмотрим отдельно кривые C и E.

Предположим, что $\left(\gamma_y,\gamma_z\right)\in C$. Другими словами, $\delta=\varepsilon_x-\gamma_y^2-\gamma_z^2=0$. Используя первое уравнение системы (8) и принимая во внимание (24), получаем $u_y=-(\gamma_z/\gamma_y)u_z$. Имея ввиду этот результат, из системы (8) выводим уравнение

$$u_y''=\frac{\left(\varepsilon_x-\varepsilon_z\right)\gamma_y^2+(\varepsilon_x-\varepsilon_y)\gamma_z^2}{\varepsilon_x}u_y.$$

Очевидно, что не существует решений этого уравнения, удовлетворяющих условиям (24) Таким образом, не существует связанных собственных значений $\left(\tilde{\gamma}_y,\tilde{\gamma}_z\right)$, лежащих на окружности C.

Теперь предположим, что $\left(\gamma_y,\gamma_z\right)\in E$. В этом случае дисперсионное уравнение имеет вид (27), при этом $a+d>0$. Условие $a+d>0$ определяет область, лежащую внутри эллипса E'. Таким образом, в данном случае решениями $\left(\gamma_y,\gamma_z\right)=\left(\tilde{\gamma}_y,\tilde{\gamma}_z\right)$ могут быть лишь те точки, которые удовлетворяют уравнению (27) и при этом лежат на E.

Результатом проведенных рассуждений является следующая

Теорема 1 (об эквивалентности). При условии (4) все связанные собственные значения задачи P и только они являются решениями дисперсионного уравнения

$$\mathrm{D}_{\mathrm{lin}}\left(\gamma_y,\gamma_z\right)=0, \tag{31}$$

где

$$\mathrm{D}_{\mathrm{lin}}\left(\gamma_y,\gamma_z\right)=\begin{cases}\left(\lambda_1'^2-\dfrac{\pi^2n^2}{h^2}\right)\left(\lambda_2'^2-\dfrac{\pi^2m^2}{h^2}\right), & \left(\gamma_y,\gamma_z\right)\in i_1,\quad n,m=1,2,\ldots\\ \lambda_1'^2-\dfrac{\pi^2n^2}{h^2}, & \left(\gamma_y,\gamma_z\right)\in i_2,\quad n,=1,2,\ldots\\ a+d-\dfrac{\pi^2n^2}{h}, & \left(\gamma_y,\gamma_z\right)\in i_2,\quad n,=1,2,\ldots\end{cases} \tag{32}$$

а λ_i' определены формулами (13). При этом все вещественные связанные значения $\left(\tilde{\gamma}_y,\tilde{\gamma}_z\right)\in \mathrm{Int}\,\overline{C}$.

Случаи, когда параметры не удовлетворяют условиям (4), будем называть вырожденными. Некоторые из вырожденных случаев отвечают распространению TE- и TM-волн [2–4]. Эти случаи являются существенно более простыми по сравнению с изученным и мы не будем испытывать терпение читателя элементарными выкладками.

Библиографический список

1. **Atkinson, F. V.** Multiparameter eigenvalue problems / F. V. Atkinson, A. B. Mingarelli. – CRC Press, 2011. – 292 p.
2. **Вайнштейн Л. А.** Электромагнитные волны / Л. А. Вайнштейн. – М. : Радио и связь, 1988. – 440 с.
3. **Взятышев, В. Ф.** Диэлектрические волноводы / В. Ф. Взятышев. – М. : Советское радио, 1970. – 216 с.
4. **Гончаренко, А. М.** Основы теории оптических волноводов / А. М. Гончаренко, В. А. Карпенко. – Минск : Наука и техника, 1983. – 237 с.

References

1. Atkinson F. V., Mingarelli A. B. *Multiparameter eigenvalue problems*. CRC Press, 2011, 292 p.
2. Vaynshteyn L. A. *Elektromagnitnye volny* [Electomagnetic waves]. Moscow: Radio i svyaz', 1988, 440 p.
3. Vzyatyshev V. F. *Dielektricheskie volnovody* [Dielectric waveguides]. Moscow: Sovetskoe radio, 1970, 216 p.
4. Goncharenko A. M., Karpenko V. A. *Osnovy teorii opticheskikh volnovodov* [Basic theory of optic waveguides]. Minsk: Nauka i tekhnika, 1983, 237 p.

Бителева Елена Олеговна
студент, Пензенский государственный университет (Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: len.biteleva@yandex.ru

Biteleva Elena Olegovna
Student, Penza State University (40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Валовик Дмитрий Викторович
кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра математики и суперкомпьютерного моделирования, Пензенский государственный университет (Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: dvalovik@mail.ru

Valovik Dmitriy Viktorovich
Candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, sub-department of mathematics and supercomputer modeling, Penza State University (40 Krasnaya street, Penza, Russia)

УДК 517.927, 517.968, 519.6

Бителева, Е. О.

О гибридных волнах в теории плоских волноведущих структур / Е. О. Бителева, Д. В. Валовик // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2017. – № 3 (43). – С. 3–14. DOI 10.21685/2072-3040-2017-3-1