Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

V. P. Il'in, Certain remarks on the convergence of sequences of functions of polynomial type in the spaces $W_p^l(G)$, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1968, Volume 11, 73–96

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
http://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 18.97.9.169
February 11, 2025, 11:09:48

В.П.Ильин

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ О СХОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМИАЛЬНОГО ТИПА В ПРОСТРАНСТВАХ $W_p^{\ell}(G)$

В работе [I][ж)] на основе мультипликативных неравенств, соответствующих теоремам вложения, были получены некоторые результаты о сходимости последовательностей функций в пространствах $W_p^{\ell}(G)$. Для частного случая, когда функции рассматриваемой последовательности являются функциями полиномиального типа, т.е. такими, что для них справедливы неравенства типа неравенства Маркова или Бернштейна, а сходимость рассматривается в пространстве $C^s(G)$, полученные результаты конкретизировались. В качестве следствий из этих результатов были получены некоторые теоремы о сходимости метода Ритца в применении к краевым задачам для эллиптических уравнений второго и четвертого порядков.

В данной заметке мы обобщаем эти результаты работы [I].

ж) Работа [I] представляет собой несколько переработанное и дополненное изложение результатов работы [2].

Основной здесь является теорема, обобщающая соответствующую теорему из [1], в которой на основании известной быстроты убывания $\|f-g_i\|_{W_p^l(G)}$, где $g_i\ (i=1,\dots)$ – функции полиномиального типа в области G, делается заключение о порядке сходимости $\{g_i\}_1^\infty$ к f в норме $W_q^s(G)$, где $p\le q\le\infty$, а s – вообще говоря, произвольное целое положительное число. Для доказательства теоремы применяются неравенства для функций полиномиального типа, дающие оценку их нормы в $W_q^s(G)$ через норму в $W_p^l(G)$. Хотя такого рода неравенства для некоторых классов областей хорошо известны, мы их устанавливаем, применяя метод, основанный на использовании параметрических неравенств для функций из пространств $W_p^l(G)$.

Из доказанной теоремы и теорем конструктивной теории функций, позволяющих оценить порядок убывания $\|f-g_i\|_{W_p^l(G)}$, вытекают некоторые конкретные результаты о порядке сходимости вариационных процессов в пространствах $W_q^s(G)$.

Отметим, что в случае обыкновенных дифференциальных уравнений вопрос о порядке сходимости производных любого порядка в методе Ритца-Галеркина рассматривался И.К.Даугавет [3], а в случае любого числа независимых переменных – С.Г.Михлиным [ж)], однако методы, а отчасти и результаты этих авторов отличны от наших.

I. В настоящем пункте G будет обозначать область n-мерного эвклидова пространства E^n, удовлетворяющую ус-

---

[ж)] Автор имел возможность познакомиться с результатами С.Г.Михлина в рукописи.

ловию: для каждой точки $x=(x_1,\dots,x_n)\in G$ существует n -мерный шаровой сектор постоянного радиуса и формы с вершиной в x, целиком лежащий внутри G. Пусть H – величина наибольшего допустимого радиуса достигающего каждую точку x области G сектора. Тогда, если G удовлетворяет указанному условию, мы будем писать $G\in A(H)$.

Пусть функция $f(x)$ определена в области G и имеет в ней обобщенные в смысле С.Л.Соболева производные всех рассматриваемых ниже порядков. Будем предполагать также, что все рассматриваемые ниже нормы функции f имеют смысл.

Пусть $\bar{\alpha}=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ – целый неотрицательный вектор ($\alpha_i\geqslant 0$ – целые), $|\bar{\alpha}|=\alpha_1+\dots+\alpha_n$. Положим

$$\mathcal{D}^{\bar{\alpha}} f(x)=\frac{\partial^{|\bar{\alpha}|} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_n^{\alpha_n}},\quad \mathcal{D}^{\ell} f(x)=\sqrt{\sum_{|\bar{\alpha}|=\ell}|\mathcal{D}^{\bar{\alpha}} f(x)|^2},$$

где ℓ – целое неотрицательное число.

Пусть $p>1$[ж)],

$$\|f\|_{W_p^\ell(G)}=\|f\|_{L_p(G)}+\|\mathcal{D}^\ell f\|_{L_p(G)}$$

$$(\text{при } \ell=0 \quad \|f\|_{W_p^\ell(G)}=\|f\|_{L_p(G)}),$$

ж) Предположение, что $p>1$, мы делаем для простоты. Некоторым усложнением рассуждений основные из приводимых ниже оценок могут быть получены аналогичным методом и для $p=1$.

где

$$\|f\|_{L_p(G)} = \Big[\int_G |f(x)|^p \, dx \Big]^{\frac{1}{p}} .$$

Основной целью настоящего пункта является получение специального типа оценок $\|\mathcal{D}^s f\|_{L_q(G)}$ через $\|f\|_{W_p^l(G)}$, где s – произвольное целое неотрицательное число, а число q удовлетворяет неравенствам: $p \le q \le \infty$.

В зависимости от соотношений между параметрами l, s, p, q n (n – размерность области G) будем различать следующие случаи:

I) $l - s - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} \geq 0$, причем исключается случай одновременного выполнения следующих равенств: $l - s - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} = 0$ и $q = \infty$;

2) $l - s - \frac{n}{p} = 0$, $q = \infty$;

3) $l - s - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} < 0$.

I) Пусть $l - s - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} \geq 0$, но при $l - s - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} = 0$ $q \neq \infty$. На основании теоремы 2 (стр. 76) работы [I] в этом случае справедлива оценка

$$\|\mathcal{D}^s f\|_{L_q(G)} \le C \|f\|^{\alpha}_{L_p(G)} \cdot \|f\|^{1-\alpha}_{W_p^l(G)} \le C \|f\|_{W_p^l(G)} , \quad (\mathrm{I})$$

где $\alpha = \frac{1}{l}\left(l - s - \frac{n}{p} + \frac{n}{q}\right)$, а C – константа, зависящая от вида области G , но не зависящая от f .

2) Пусть $l-s-\frac{n}{p}=0$, $q=\infty$. Пусть τ — произвольное положительное число, $\tau \geq p$. На основании неравенства (16'') (стр. 71) работы [I] для любой точки $x \in G$ справедлива оценка

$$|\mathcal{D}^s f(x)| \leq C_1 h^{-\frac{n}{\tau}} \|\mathcal{D}^s f\|_{L_\tau(G\cap Ш_h(x))} + C_2 h \|\mathcal{D}^{s+1} f\|_{L_\infty(G)} \quad (2)$$

где h — произвольное положительное число, удовлетворяющее неравенствам: $0<h\leq H$, H — параметр, входящий в определение класса $A(H)$, к которому принадлежит область G , $Ш_h(x)$ — n -мерный шар радиуса h с центром в x , а C_1 C_2 — константы, не зависящие от f, h и τ .

Далее, на основании неравенства (25) (стр. 73) той же работы имеем

$$\|\mathcal{D}^s f\|_{L_\tau(G\cap Ш_h(x))} \leq C_3 h^{\frac{n}{\tau}} \lambda^{-\frac{n}{p}} \|\mathcal{D}^s f\|_{L_p(G)} + \quad (3)$$

$$+ C_4 (2\tau)^{\frac{1}{p'}} h^{\frac{n}{2\tau}} \|\mathcal{D}^l f\|_{L_p(G)} ,$$

где $\frac{1}{p'} = 1 - \frac{1}{p}$, λ — фиксированное число, $0<\lambda\leq H$, C_3 и C_4 — константы, не зависящие от h, τ, λ f.

Подставляя (3)в(2) и замечая при этом, что

$$\|\mathcal{D}^s f\|_{L_p(G)} \le C_5 \|f\|_{W_p^\ell(G)} ,$$

$$\vdots$$

так как $s \le \ell$, получим

$$\|\mathcal{D}^s f\|_{L_\infty(G)} \le C_6 \|f\|_{W_p^\ell(G)} + \tag{4}$$

$$+ C_7 (2\tau)^{\frac{1}{p'}} h^{-\frac{n}{2\tau}} \|f\|_{W_p^\ell(G)} + C_2 h \|\mathcal{D}^{s+1} f\|_{L_\infty(G)} ,$$

где C_6, C_7, C_2 - постоянные, не зависящие от f, h и τ , а h и τ - произвольные числа, удовлетворяющие неравенствам: $0 < h \le H$, $p \le \tau < \infty$.

3) Пусть, наконец, $\ell - s - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} < 0$. Рассмотрим два подслучая: а) $s \le \ell - 1$, б) $s \ge \ell$.

Пусть сперва $s \le \ell - 1$. Так как $\ell - s - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} < 0$, то существует такое τ , $p < \tau < q \le \infty$, что $\ell - s - \frac{n}{p} + \frac{n}{\tau} = 0$ и, в силу теоремы вложения (см. [4]),

$$\|\mathcal{D}^s f\|_{L_\tau(G)} \le C_9 \|f\|_{W_p^\ell(G)} , \tag{5}$$

где C_9 не зависит от f .

На основании неравенства (24) (стр. 73) работы [I] и неравенства (5) тогда получим

$$\|\mathcal{D}^s f\|_{L_q(G)} \leq C_{10} h^{-\frac{n}{r}+\frac{n}{q}} \|\mathcal{D}^s f\|_{L_r(G)} + C_{11} h \|\mathcal{D}^{s+1} f\|_{L_q(G)} \leq$$

$$\leq C_{12} h^{l-s-\frac{n}{p}+\frac{n}{q}} \|f\|_{W_p^l(G)} + C_{11} h \|\mathcal{D}^{s+1} f\|_{L_q(G)}, \tag{6}$$

где h – произвольное положительное число, $0<h\leq H$, C_{11} и C_{12} – константы, не зависящие от f и h.

Пусть теперь $s \geqslant l$. Тогда на основании неравенства (37) (стр. 77) работы [I] получим

$$\|\mathcal{D}^s f\|_{L_q(G)} \leq C_{13} h^{l-s-\frac{n}{p}+\frac{n}{q}} \|\mathcal{D}^l f\|_{L_p(G)} + C_{14} h \|\mathcal{D}^{s+1} f\|_{L_q(G)} \leq$$

$$\leq C_{13} h^{l-s-\frac{n}{p}+\frac{n}{q}} \|f\|_{W_p^l(G)} + C_{14} h \|\mathcal{D}^{s+1} f\|_{L_q(G)}, \tag{7}$$

где $0<h\leq H$, C_{13} и C_{14} не зависят от f и h. Сравнивая (6) и (7), видим, что при $l-s-\frac{n}{p}+\frac{n}{q}<0$ можно считать, что всегда справедлива оценка (7).

Оценки (I), (4) и (7), соответствующие случаям I), 2) и 3), мы применим в следующем пункте для получения нужных неравенств для функций более узких классов.

II. Пусть $\nu > 0$ - целое число, i - произвольное положительное число, $\sigma(\xi)$ - положительная при $\xi > 0$ монотонно возрастающая функция, удовлетворяющая условию:

$$\sigma(m\xi) \leq C(m)\sigma(\xi), \tag{8}$$

где $m \geq 1$ - любое положительное число, $C(m)$ - константа, не зависящая от ξ .

Будем говорить, что функция $g(x)$ является в области G функцией класса $\mathcal{P}(i;\sigma;\nu;G)$, если для любого целого неотрицательного вектора $\bar{\alpha}$, $|\bar{\alpha}| = s$, $0 \leq s \leq \nu-1$, и любого числа q , $1 \leq q \leq \infty$, справедливы неравенства:

$$\|\mathcal{D}^{\bar{\alpha}+\bar{\omega}_k} g\|_{L_q(G)} \leq \bar{C}\sigma(i)\|\mathcal{D}^{\bar{\alpha}} g\|_{L_q(G)} \quad (k=1,\dots,n), \tag{9}$$

где $\bar{\omega}_k = (0,\dots,0,\overset{k}{1},0,\dots 0)$, $\bar{C}$ - константа, зависящая от свойств области G и не зависящая от i и g , σ - функция, удовлетворяющая указанным выше условиям (она, вообще говоря, также зависит от G).

Для определенного класса областей G , например, для областей, удовлетворяющих условиям приводимого ниже замечания (простейшим примером такой области является прямоугольный параллелепипед с ребрами, параллельными осям координат), функциями класса $\mathcal{P}(i;\sigma;\nu;G)$ при любом ν и при $\sigma(i) = i^2$ являются алгебраические и тригонометрические полиномы степени i по каждой переменной.

Пусть G – ограниченная область, а Γ – ее граница. Пусть, далее, $\omega(x)$ – достаточно гладкая функция, определенная в открытой области, содержащей $\bar{G}=G+\Gamma$, удовлетворяющая условиям: I) $\omega(x)=0$ на Γ, 2) $\omega(x)>0$ в G, 3) $|\operatorname{grad}\omega|_\Gamma>0$. Тогда функцией класса $\mathcal{P}(i;\sigma;\ell;G)$, где $\sigma(i)=i^2$, является функция вида:

$$g(x)=\omega^\ell(x)P_i(x), \tag{I0}$$

где $P_i(x)$ – алгебраический полином степени не выше i по каждой из переменных $x_1,\dots,x_n$, ℓ – натуральное число. При $\ell=1$ этот результат доказан в работе [5].

Функциями класса $\mathcal{P}(i;\sigma;v;E^n)$ $(G=E^n)$ при любом v являются целые функции степени i по каждой из пе- переменных, суммируемые по E^n со степенью q, причем $\sigma(i)=i$. Аналогичное верно для тригонометрических полиномов, рассматриваемых на периоде $\Pi=G$.ж)

Предположим теперь, что $g(x)$ является функцией класса $\mathcal{P}(i;\sigma;s+1;G)$ и $g(x)\in W_p^\ell(G)$, $G\in A(H)$. Отметим следствия, вытекающие для $g(x)$ из неравенств (I), (4) и (7).

1) Если $\ell-s-\frac{n}{p}+\frac{n}{q}\geqslant 0$ (при $\ell-s-\frac{n}{p}+\frac{n}{q}=0$ $q\neq\infty$), то на основании (1)

ж) Применявшийся выше термин – функции полиномаильного типа – относился именно к функциям классов $\mathcal{P}(i;\sigma;v;G)$.

$$\|\mathcal{D}^s g\|_{L_q(G)} \leq C\|g\|_{W_p^\ell(G)}. \tag{11}$$

2) Если $\ell - s - \frac{n}{p} = 0$ и $q = \infty$, то, в силу (4),

$$\|\mathcal{D}^s g\|_{L_\infty(G)} \leq C_6 \|g\|_{W_p^\ell(G)} +$$

$$+ C_7 (2\tau)^{\frac{1}{p'}} h^{-\frac{n}{2\tau}} \|g\|_{W_p^\ell(G)} + C_2 h \|\mathcal{D}^{s+1} g\|_{L_\infty(G)}, \tag{4'}$$

где $0 < h \leq H$, $p \leq \tau < \infty$.

Согласно неравенств (9),

$$\|\mathcal{D}^{s+1} g\|_{L_\infty(G)} \leq \tilde{C}\sigma(i) \|\mathcal{D}^s g\|_{L_\infty(G)}, \tag{12}$$

где $\tilde{C}$ не зависит от i и g.

Оценим последнее слагаемое в $(4')$ на основании неравенства (12) и положим

$$h = \frac{1}{K C_2 \tilde{C} \sigma(i)},$$

где $K \geq 2$ выбрано так, что $h \leq H$. Тогда, перенося слагаемое с $\|\mathcal{D}^s g\|_{L_\infty(G)}$ в левую часть неравенства и замечая, что коэффициент при нем $\leq \frac{1}{2}$, после простых преобразований получим

$$\|\mathcal{D}^s g\|_{L_\infty(G)} \leq C_{15}\|g\|_{W_p^\ell(G)} + C_{16}(2\tau)^{\frac{1}{p'}}[\sigma(i)]^{\frac{n}{2\tau}}\|g\|_{W_p^\ell(G)}, \quad (13)$$

где C_{15} и C_{16} не зависят от i, τ и g.

Если $\ln[\sigma(i)]^n \geq 2p$, то, полагая

$$2\tau = \ln[\sigma(i)]^n,$$

получим

$$\|\mathcal{D}^s g\|_{L_\infty(G)} \leq C_{17}\|g\|_{W_p^\ell(G)} \cdot [\ln\sigma(i)|^{\frac{1}{p'}} \quad (14)$$

Если же $\ln[\sigma(i)]^n \leq 2p$, то, полагая в (13) $2\tau = 2p$, получим

$$\|\mathcal{D}^s g\|_{L_\infty(G)} \leq C_{18}\|g\|_{W_p^\ell(G)}.$$

При $\sigma(i) \geq 2$ мы всегда можем считать, что имеет место неравенство (14), где δ не зависит от i и g.

3) Если $\ell - s - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} < 0$, то на основании неравенства (7)

$$\|\mathcal{D}^s g\|_{L_q(G)} \le C_{13} h^{l-s-\frac{n}{p}+\frac{n}{q}} \|g\|_{W_p^l(G)} + C_{14} h \|\mathcal{D}^{s+1} g\|_{L_q(G)} .$$

Применяя, как и выше, для оценки $\|\mathcal{D}^{s+1} g\|_{L_q(G)}$ неравенство (I2) и выбирая соответствующим образом h, получим

$$\|\mathcal{D}^s g\|_{L_q(G)} \le C_{19} \|g\|_{W_p^l(G)} [\sigma(i)]^{-(l-s-\frac{n}{p}+\frac{n}{q})} \tag{I5}$$

где C_{19} - константа, не зависящая от i и g.

Замечание. Пусть $l=s=0$, $1 \le p < q \le \infty$. Тогда имеет место случай 3) ($l-s-\frac{n}{p}+\frac{n}{q}<0$), и мы получаем из (I5) хорошо известное неравенство:

$$\|g\|_{L_q(G)} \le C \|g\|_{L_p(G)} [\sigma(i)]^{\frac{n}{p}-\frac{n}{q}} . \tag{I6}$$

Если G^m - сечение области G гиперплоскостью размерности m, $1 \le m < n$, то аналогичным способом можно получить следующее неравенство:

$$\|g\|_{L_q(G^m)} \le C \|g\|_{L_p(G)} [\sigma(i)]^{\frac{n}{p}-\frac{m}{q}} . \tag{I7}$$

Неравенства (I6) и (I7) (как и неравенства (I4) и (I5)) можно уточнить, если на область G наложить более жесткие ограничения.

Предположим, что область G удовлетворяет условию: для каждой точки $x \in G$ существует прямоугольный параллелепипед фиксированных размеров с ребрами, параллельными осям координат и с вершиной в x, целиком содержащийся в G. Пусть $H_k \, (k=1,\dots,n)$ - наибольшие допустимые длины ребер достигающего каждую точку x области G параллелепипеда.

Обозначим через e произвольное (в том числе и пустое) подмножество множества $e^n = \{1,\dots,n\}$ натуральных чисел; положим $e' = e^n \setminus e$, $\bar{\omega}^e = (\omega_1^e, \dots, \omega_n^e)$, где $\omega_j^e = 1$, если $j \in e$, $\omega_j^e = 0$, если $j \in e'$,

$$\mathcal{D}^{\bar{\omega}^e} g(x) = \frac{\partial}{\partial x_{j_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{j_k}} g(x), \qquad \{j_1,\dots,j_k\} = e.$$

Методом интегральных представлений дифференцируемых функций нетрудно доказать следующее неравенство:

$$\|g\|_{L_q(G)} \leq \sum_{e \subseteq e^n} C_e \|\mathcal{D}^{\bar{\omega}^e} g\|_{L_p(G)} \times \left(\prod_{k\in e} h_k^{1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}\right)\left(\prod_{k\in e'} h_k^{-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}\right), \tag{I8}$$

где $1 \leq p < q \leq \infty$, h_k - произвольные числа, удовлетворяющие условиям: $0<h_k\leq H_k$ $(k=1,\dots,n)$, C_e – постоянные, не зависящие от g и h_k.

Предположим еще, что в области G для функции $g(x)$ справедливы неравенства (9) в форме:

$$\|\mathcal{D}^{\bar{\alpha}+\bar{\omega}_k} g\|_{L_p(G)}\leq \bar{C}\,\sigma(i_k)\|\mathcal{D}^{\bar{\alpha}} g\|_{L_p(G)} \quad (k=1,\dots,n), \qquad (9')$$

т.е. $g(x)$ является функцией полиномиального типа степени i_k по переменной x_k $(k=1,\dots,n)$.

Тогда на основании (9′) неравенство (I8) можно записать в виде:

$$\|g\|_{L_q(G)}\leq\|g\|_{L_p(G)}\sum_{e\subseteq e^n}\tilde{C}_e\Big(\prod_{k\in e}h_k^{1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}\cdot\sigma(i_k)\Big)\Big(\prod_{k\in e'}h_k^{-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}\Big).$$

Полагая

$$h_k=\frac{1}{M\sigma(i_k)} \quad (k=1,\dots,n),$$

где $M>0$ выбрано так, что $h_k\leq H_k$ $(k=1,\dots,n)$, получим

$$\|g\|_{L_q(G)}\leq C\|g\|_{L_p(G)}\Big(\prod_{k=1}^{n}\sigma(i_k)\Big)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \qquad (I9)$$

где C не зависит от g и i_k $(k=1,\dots,n)$.

Пусть, далее, m – натуральное число, $1 < m < n$, $e^{n-m} = \{m+1, \ldots, n\}$, e – произвольное подмножество e^{n-m}, $e' = e^{n-m} \setminus e$, G^m – сечение области G гиперплоскостью $x_{m+1} = const, \ldots, x_n = const$. Тогда можно установить неравенство:

$$\|g\|_{L_p(G^m)} \leq \sum_{e \subseteq e^{n-m}} C_e \|\mathcal{D}^{\bar{\omega}^e} g\|_{L_p(G)} \Big(\prod_{k \in e} h_k^{1-\frac{1}{p}}\Big)\Big(\prod_{k \in e'} h_k^{-\frac{1}{p}}\Big).$$

Отсюда с помощью неравенства ($9'$) получим

$$\|g\|_{L_p(G^m)} \leq C \|g\|_{L_p(G)} \cdot \Big(\prod_{k=m+1}^{n} \sigma(i_k)\Big)^{\frac{1}{p}}. \tag{20}$$

Для целых функций конечной степени при $G = E^n$ и для тригонометрических полиномов, рассматриваемых на периоде, неравенства (19) и (20), с указанием значений констант C, впервые были получены С.М.Никольским [6], но другим методом. Другие случаи справедливости неравенств (19) и (20), но в основном для функций одного переменного, рассматривались позднее и рядом других авторов.

Мы будем в дальнейшем рассматривать последовательности $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ функций таких, что $g_i \in \mathcal{P}(i; \sigma; v; G)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ и если $i > k$, то $g_i - g_k \in \mathcal{P}(i; \sigma; v; G)$.

Тогда, очевидно, для разности $g_i - g_k$ будут справедливы соответственно неравенства (11), (14) и (15) с заменой в них g_i

на $g_i - g_k$.

Для упрощения записи в дальнейшем положим:

$$E_i = E_i^{\ell,p} = \|f - g_i\|_{W_p^\ell(G)}, \quad E_{ik} = \|g_i - g_k\|_{W_p^\ell(G)}.$$

<u>Теорема</u>. Пусть $G \in A(H)$, $f \in W_p^\ell(G)$, $\{g_i\}_1^\infty$ - последовательность функций таких, что $g_i \in W_p^\ell(G) \cap \mathcal{P}(i; \sigma; s+1; G)$ $(i = 1, 2, \dots)$, s - некоторое натуральное число, q - положительное число, для которого $p \leq q \leq \infty$.

Пусть, далее, E_i монотонно убывают (при $i \to \infty$) и

$$1) \quad \lim_{i \to \infty} E_i = 0 \quad , \text{ если } \quad \ell - s - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} \geq 0 \tag{21}$$

(при $\ell - s - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} = 0$ $q \neq \infty$);

$$2) \text{ Сходится ряд } \quad \sum_{m=0}^\infty E_{2^m} |\ln \sigma(2^m)|^{\frac{1}{p'}}, \tag{22}$$

если $\ell - s - \frac{n}{p} = 0$ и $q = \infty$;

3) сходится ряд $\sum\limits_{m=0}^{\infty} E_{2^m}[\sigma(2^m)]^{-(l-s-\frac{n}{p}+\frac{n}{q})}$, (23)

если $l-s-\frac{n}{p}+\frac{n}{q}<0$.

Тогда функция $f(x)$ имеет в области G все обобщенные производные $\mathcal{D}^{\bar{\alpha}}f$ порядка $|\bar{\alpha}|=s$ и последовательность $\{\mathcal{D}^{\bar{\alpha}}g_i\}_1^{\infty}$ сходится к $\mathcal{D}^{\bar{\alpha}}f$ в $L_q(G)$, причем:

I) $\|\mathcal{D}^{\bar{\alpha}}f-\mathcal{D}^{\bar{\alpha}}g_i\|_{L_q(G)}\leq C_{20}E_i$ при условии (2I); (24)

2) $$\|\mathcal{D}^{\bar{\alpha}}f-\mathcal{D}^{\bar{\alpha}}g_i\|_{L_\infty(G)}\leq C_{21}E_i|\ln\sigma(i)|^{\frac{1}{p'}}+$$ (25)

$$+C_{22}\sum_{m=r}^{\infty}E_{2^m}|\ln\sigma(2^m)|^{\frac{1}{p'}}$$ при условии (22);

3) $$\|\mathcal{D}^{\bar{\alpha}}f-\mathcal{D}^{\bar{\alpha}}g_i\|_{L_q(G)}\leq C_{23}E_i[\sigma(i)]^{-(l-s-\frac{n}{p}+\frac{n}{q})}+$$

$$+C_{24}\sum_{m=\nu}^{\infty} E_{2^m}\,[\sigma(2^m)]^{-(l-s-\frac{n}{p}+\frac{n}{q})} \qquad \text{при условии (23), (26)}$$

где C_j - постоянные, не зависящие от f и g_i, а целое число ν таково, что $2^{\nu-1}<i\le 2^{\nu}$.

Доказательство. Случай $l-s-\frac{n}{p}+\frac{n}{q}\ge 0$ не требует рассмотрения, так как неравенство (24) является прямым следствием неравенства (I). Остальные два случая рассматриваются одинаково. Мы остановимся на доказательстве утверждения теоремы в случае $l-s-\frac{n}{p}+\frac{n}{q}<0$.

Прежде всего заметим, что

$$E_{ik}\le E_i+E_k\le 2E_k \quad , \text{ если } i>k \quad , \tag{27}$$

так как E_i по условию монотонно убывают.

Докажем, что последовательность $\{\mathcal{D}^{\bar\alpha} g_{2^m}\}_{m=1}^{\infty}$, $|\bar\alpha|=s$ сходится в $L_q(G)$ к некоторой функции φ. Для этого установим сходимость ряда

$$\sum_{m=1}^{\infty}\|\mathcal{D}^{\bar\alpha}(g_{2^{m+1}}-g_{2^m})\|_{L_q(G)} . \tag{28}$$

Поскольку $g_{2^{m+1}} - g_{2^m}$ является функцией класса $\mathcal{P}(2^{m+1}; \sigma; s+1; G)$, то на основании неравенств (I5), (27) и (8) имеем

$$\|\mathcal{D}^{\bar{\alpha}}(g_{2^{m+1}} - g_{2^m})\|_{L_q(G)} \leq C_{25} E_{2^m}[\sigma(2^{m+1})]^{-(l-s-\frac{n}{p}+\frac{n}{q})} \leq$$

$$\leq C_{26} E_{2^m}[\sigma(2^m)]^{-(l-s-\frac{n}{p}+\frac{n}{q})}, \tag{29}$$

где C_{26} не зависит от m.

Из неравенства (29) и сходимости ряда (23) вытекает сходимость ряда (28). Поэтому существует функция $\varphi \in L_q(G)$ такая, что

$$\lim_{m\to\infty} \|\mathcal{D}^{\bar{\alpha}} g_{2^m} - \varphi\|_{L_q(G)} = 0$$

Так как, кроме того,

$$\lim_{m\to\infty} \|g_{2^m} - f\|_{L_p(G)} = 0 \qquad (E_i \to 0 \text{ при } i \to \infty),$$

то существует $\mathcal{D}^{\bar{\alpha}} f$ и $\mathcal{D}^{\bar{\alpha}} f = \varphi \in L_q(G)$.

Оценим теперь $\|\mathcal{D}^{\bar{\alpha}} f - \mathcal{D}^{\bar{\alpha}} g_i\|_{L_q(G)}$ при произвольном натуральном i. Выберем целое r так, чтобы $2^{r-1} < i \leq 2^r$. Тогда, используя неравенство:

$$\|\mathcal{D}^{\bar{\alpha}}(g_{2^r} - g_i)\|_{L_q(G)} \leq C_{27} E_i [\sigma(i)]^{-(l-s-\frac{n}{p}+\frac{n}{q})} \quad (i = 2^{r-1}, \dots, 2^r),$$

получаемое так же как и неравенство (29), получим

$$\|\mathcal{D}^{\bar{\alpha}}(f - g_i)\|_{L_q(G)} \leq$$

$$\leq \|\mathcal{D}^{\bar{\alpha}}(g_{2^r} - g_i)\|_{L_q(G)} + \|\mathcal{D}^{\bar{\alpha}}(f - g_{2^r})\|_{L_q(G)} \leq$$

$$\leq \|\mathcal{D}^{\bar{\alpha}}(g_{2^r} - g_i)\|_{L_q(G)} + \sum_{m=r}^{\infty} \|\mathcal{D}^{\bar{\alpha}}(g_{2^{m+1}} - g_{2^m})\|_{L_q(G)} \leq$$

$$\leq C_{28} E_i [\sigma(i)]^{-(l-s-\frac{n}{p}+\frac{n}{q})} + C_{29} \sum_{m=r}^{\infty} E_{2^m} [\sigma(2^m)]^{-(l-s-\frac{n}{p}+\frac{n}{q})}.$$

Теорема доказана.

II. Доказанная теорема позволяет, зная оценку скорости убывания $E_i^{\ell,p} = \|f-g\|_{W_p^\ell(G)}$, делать заключение о скорости сходимости производных произвольного порядка s функций g_i классов $\mathcal{P}(i;\sigma;\nu;G)$ к соответствующей производной функции f в норме $L_q(G)$. Оценку для $E_i^{\ell,p}$ удается в некоторых случаях указать на основе теорем конструктивной теории функций.

Мы применим доказанную теорему к оценке быстроты сходимости вариационных процессов.

Предположим, что ищется решение первой краевой задачи для линейного самосопряженного дифференциального уравнения эллиптического типа порядка 2ℓ в n-мерной ограниченной области G :

$$\mathcal{L}u = f$$

$$\mathcal{D}^{\bar{\alpha}} u/_{\Gamma} = 0 \qquad |\bar{\alpha}| = 0, 1, \ldots, \ell-1. \tag{30}$$

Пусть решение u ищется как предел минимизирующей последовательности $\{u_i\}_1^\infty$ для соответствующего задаче квадратичного функционала $\mathcal{F}(u)$. Предположим, что минимизирующая последовательность строится по методу Ритца и функции u_i являются функциями соответствующих классов $\mathcal{P}(i;\sigma;\nu;G)$ вида (10) (для некоторых частных типов областей G функции u_i оказываются просто алгебраическими полиномами).

Пусть $\tilde{u}_i$ - произвольная функция вида (10) ($\tilde{u}_i = \omega^\ell(x)\, Q_i(x)$, где $Q_i(x)$ - произвольный полином степени не выше i по каждой из переменных $x_1, \ldots, x_n$).

Тогда, как хорошо известно, справедлива следующая цепь неравенств

$$E_i^{l,2} = \|u-u_i\|_{W_2^l(G)} \le C_1(\mathcal{F}(u_i)-\mathcal{F}(u)) \le$$

$$\le C_1(\mathcal{F}(\tilde{u}_i)-\mathcal{F}(u)) \le C_2\|u-\tilde{u}_i\|_{W_2^l(G)}, \tag{31}$$

где C_2 не зависит от u и $\tilde{u}_i$.

Возможность получения оценки для $E_i^{l,2}$ основана на неравенстве (31) и теоремах, дающих оценку для $\|u-\tilde{u}_i\|_{W_2^l(G)}$. Оценку для $\|u-\tilde{u}_i\|_{W_2^l(G)}$ можно получить на основании теоремы И.Ю.Харрик [7].

Пусть функция u – решение задачи (30)– является K раз непрерывно дифференцируемой в области $\bar{G}$, а $\omega(x)$ – $K+1$ раз непрерывно дифференцируема. Тогда, как показано в работе [7], существует функция $\tilde{u}_i$, указанного выше вида, такая, что

$$\|u-\tilde{u}_i\|_{C^l(\bar{G})} = O\left(\frac{\omega^{(K)}(u;\frac{1}{i})}{i^{K-l}}\right), \quad K>l, \tag{32}$$

где $\omega^{(K)}(u;\frac{1}{i})$ – максимальный модуль непрерывности производных порядка K функции u.

При указанных условиях из (31) и (32) следует, что

$$E_i^{l,2} \le C\,\frac{\omega^{(K)}(u;\frac{1}{i})}{i^{K-l}}.$$

Применяя эту оценку к доказанной выше теореме при $p=2$, $G(i)=i^2$, получим неравенства:

I) $\|\mathcal{D}^s u - \mathcal{D}^s u_i\|_{L_q(G)} \leq C_1 i^{-k+l}\omega^{(k)}(u;\frac{1}{i})$, если

$$l-s-\frac{n}{2}+\frac{n}{q}\geq 0 \ (\text{при } l-s-\frac{n}{2}+\frac{n}{q}=0 \ q\neq\infty),\ k>l;$$

2) $\|\mathcal{D}^s u - \mathcal{D}^s u_i\|_{C(G)} \leq C_2 i^{-k+l}\omega^{(k)}(u;\frac{1}{i})\sqrt{\ln i}$,

если $l-s-\frac{n}{2}=0$, $k>l$;

3) $\|\mathcal{D}^s u - \mathcal{D}^s u_i\|_{L_q(G)} \leq C_3 i^{-k+l-2[l-s-\frac{n}{2}+\frac{n}{q}]}\cdot\omega^{(k)}(u;\frac{1}{i})$,

если $l-s-\frac{n}{2}+\frac{n}{q}<0$ и $k>l-2[l-s-\frac{n}{2}+\frac{n}{q}]$, где C_1, C_2 и C_3 не зависят от i.

Литература

1. Ильин В.П. Некоторые неравенства в функциональных пространствах и их применение к исследованию сходимости вариационных процессов. Тр. Матем. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР, 1959, 53, 64-127.

2. Ильин В.П. Кандидатская диссертация. ЛГУ, 1951г.

3. Даугавет И.К. О быстроте сходимости метода Галеркина для обыкновенных дифференциальных уравнений. Известия ВУЗов, Математика, 1958, № 5, 158-165.

4. Соболев С.Л. Об одной теореме функционального анализа. Матем. сборник, 1938, 4(46):3, 471-497.

5. Харрик И.Ю. Об одном аналоге неравенства Маркова. ДАН СССР, 1956, 106, № 2, 203-206.

6. Никольский С.М. Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных. Тр. Матем. ин-та им.В.А. Стеклова АН СССР, 1951, 38, 244-278.

7. Харрик И.Ю. О приближении функций, обращающихся на границе области в нуль вместе с частными производными, функциями особого вида. Сиб. матем. журнал, 1963, IУ, № 2, 408-425.