В. К. Ахметов, В. Я. Шкадов, Ветвление собственных решений спектральной задачи об устойчивости свободного вихря,
Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 2005, номер 5, 54–59

реагирования среды на внешнее воздействие, который по своей природе с геометрической размерностью системы не связан.

Выражаю благодарность Г. Л. Бровко и И. А. Кийко за внимание и доброжелательное отношение к представленной работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ревуженко А.Ф.* Механика упругопластических сред и нестандартный анализ. Новосибирск, 2000.
2. *Ревуженко А.Ф.* Механика сыпучей среды. Новосибирск: ОФСЕТ, 2003.
3. *Хилл Р.* Математическая теория пластичности. М.: ГИТТЛ, 1956.

Поступила в редакцию
20.06.2004

УДК 532.516.013.4

ВЕТВЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ РЕШЕНИЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СВОБОДНОГО ВИХРЯ

В. К. Ахметов, В. Я. Шкадов

Исследуется спектральная задача, к которой сводится определение малых неустойчивых возмущений осесимметричного течения в свободном вихре. Рассматриваемое течение описывается профилями скорости, полученными из автомодельного решения Бэтчелора [1]. Выборочные расчеты для первых трех-четырех мод спектра собственных значений в невязкой постановке представлены в [2, 3], с учетом вязкости — в [4]. Новая вязкая мода неустойчивости исследована в [5]. Неустойчивость первых трех мод при большой закрутке потока показана в [6].

В настоящей работе на основе подробных расчетов проведен анализ собственных решений с выделением растущих возмущений восьми типов (мод неустойчивости). Рассмотрены поведение каждой моды в отдельности и свойства полного набора мод в зависимости от свободных параметров. Обнаружено и исследовано свойство ветвления собственных решений. Вычислены координаты точек ветвления и с их помощью построены нейтральные кривые в плоскостях $\mathrm{Re} = \mathrm{const}$.

1. Постановка задачи. Пусть имеется однородное осесимметричное течение вязкой несжимаемой жидкости с полем скоростей

$$U(r) = \exp(-r^2), \quad W(r) = qr^{-1}\left[1 - \exp(-r^2)\right], \quad V(r) = 0. \tag{1}$$

Здесь U, V, W — осевая, радиальная и азимутальная компоненты скорости в цилиндрической системе координат z, r, φ; q — параметр закрутки (величина, обратная к числу Россби). Профили (1) выводятся из автомодельного решения уравнений Навье–Стокса, полученного Бэтчелором [1], для вязкого закрученного следа в предположении локальной плоскопараллельности потока.

Рассмотрим малые возмущения течения (1) как решения линеаризованных уравнений Навье–Стокса типа бегущей волны (нормальные моды)

$$\{V_z', V_r', V_\varphi', p'\} = \{F, iS, H, P\}\exp[i(\alpha z + n\varphi - \alpha ct)], \tag{2}$$

в которых α, n — волновые числа, причем целые положительные значения n соответствуют распространению волны в направлении закрутки, а отрицательные — в противоположном направлении. Тогда для комплексных амплитудных функций $F(r)$, $S(r)$, $H(r)$, $P(r)$ получим систему уравнений

$$\begin{aligned}
&r^2\gamma F + \alpha r^2 P + r^2 SU' = \frac{1}{i\mathrm{Re}}\left[r(rF')' - (\alpha^2 r^2 + n^2)F\right],\\
&r^2\gamma S + 2rHW - r^2 P' = \frac{1}{i\mathrm{Re}}\left[r(rS')' - (\alpha^2 r^2 + n^2 + 1)S - 2nH\right],\\
&r^2\gamma H + r^2 S\left(W' + \frac{W}{r}\right) + rnP = \frac{1}{i\mathrm{Re}}\left[r(rH')' - (\alpha^2 r^2 + n^2 + 1)H - 2nS\right],\\
&\alpha rF + (rS)' + nH = 0, \quad \gamma = \alpha(U - c) + \frac{nW}{r}, \quad \mathrm{Re} = \frac{U_0 L}{\nu},
\end{aligned} \tag{3}$$

где U_0 — скорость на оси $r = 0$; L — радиус вихревого ядра, определяемый по максимальному значению $W(r)$; штрих означает производную по r.

Граничные условия для системы (3) выводятся из требований затухания возмущений на бесконечности и регулярного поведения решения вблизи оси $r = 0$:

$$\begin{aligned} &S(0) = H(0) = 0, && F(0),\ P(0) < \infty \quad (n = 0);\\ &S(0) \pm H(0) = 0, && F(0) = P(0) = 0 \quad (n = \pm 1);\\ &S(0) = H(0) = F(0) = P(0) = 0 && (|n| > 1);\\ &S(\infty) = H(\infty) = F(\infty) = P(\infty) = 0 && (\forall n). \end{aligned} \tag{4}$$

Будем рассматривать возмущения (2), в которых α действительное. Тогда решением системы (3) с граничными условиями (4) при фиксированных параметрах Re, q, α, n определяются комплексные собственные числа $c = c_r + ic_i$, в которых c_r — фазовая скорость, $\omega_r = \alpha c_r$ — частота колебаний и $\omega_i = \alpha c_i$ — коэффициент усиления. При $c_i > 0$ амплитуды возмущения (2) растут, при $c_i < 0$ — затухают с течением времени.

Для нахождения собственных значений задачи (3), (4) применялся метод [5, 6]. Вблизи особых точек $r = 0$ и $r = \infty$ строятся асимптотические решения по методу Фробениуса, которые позволяют перенести граничные условия в точки $r = r_a$ и $r = r_d$ соответственно. От этих точек решения продолжаются численным интегрированием по методу Рунге–Кутта с автоматическим выбором шага, контролируемой точностью и процедурой ортогонализации Грамма–Шмидта. Численные решения склеиваются в точке r_c ($r_a < r_c < r_d$) путем решения методом Ньютона соответствующего характеристического уравнения. При заданной точности $\varepsilon = 10^{-3} - 10^{-6}$ интегрирования системы (3) количество точек на отрезке $[r_a, r_d]$ составляло $10^2 - 3 \cdot 10^4$. В расчетах полагалось $r_a = 0{,}01$, величина r_c для разных мод и значений числа Рейнольдса задавалась в интервале $r_c = 0{,}2 - 2$. Значение r_d для вычисления каждого собственного числа подбиралось индивидуально, исходя из заданной точности, и варьировалось от 3 до 1200. Наиболее широкая область интегрирования требовалась для длинноволновых возмущений, вязкой неустойчивой моды и больших чисел Рейнольдса.

2. Моды неустойчивости. Рассматривается спектральная задача (3), (4) с тремя свободными параметрами Re, q, α. Значение азимутального волнового числа полагалось равным $n = -1$, так как в этом случае отмечаются наиболее опасные возмущения [2–4]. Каждое собственное число $c = c_r + ic_i$, такое, что $c_i > 0$, определяет моду неустойчивости, поскольку амплитуда соответствующего неустойчивого решения (2) возрастает со временем. Характерная особенность рассматриваемой задачи состоит в том, что количество m таких мод при выбранном состоянии механической системы (Re, q, α заданы), как правило, не единственно, а именно $1 \leqslant m \leqslant 8$. Каждая мода начинается в соответствующей критической точке $(\mathrm{Re}_m, q_m, \alpha_m)$ собственным числом c_{rm}, $c_{im} \approx 0$ при наименьшем возможном числе Re и может быть продолжена параметрически в пространстве состояний по каждому из трех свободных параметров. Интерес представляет прежде всего продолжение по числу Рейнольдса $\mathrm{Re} \geqslant \mathrm{Re}_m$. Для каждой моды $c_i > 0$ такое продолжение удается провести численно до $\mathrm{Re} = 10^5$. В табл. 1 даны значения величин Re, q, α в критических точках.

Таблица 1

Значения критических параметров Re, q, α *для мод* 1–8

Мода	Re	q	α
1	13,905	0,337	0,415
2	43,934	0,6603	0,5012
3	165,56	0,4576	0,5962
4	428,086	0,6095	0,5062
5	887,79	0,6403	0,5547
7	1579,73	0,700	0,6054
8	3526,77	0,6131	0,5679

В табл. 2 при нескольких Re даны значения основных величин, характеризующих каждую моду неустойчивости, — максимальных коэффициентов усиления ω_i^* и частот колебаний ω_r^*, которые достигаются при значениях параметров α_*, q_*, а также граничные значения волновых чисел α и величин закрутки q, таких, что $c_i \geqslant 0$ при $\alpha_{\min} \leqslant \alpha \leqslant \alpha_{\max}$, $q_{\min} \leqslant q \leqslant q_{\max}$.

Полученные значения собственных чисел при $\mathrm{Re} = 10^5$ можно рассматривать как асимптотические при $\mathrm{Re} \to \infty$, так как с увеличением Re они меняются незначительно. По характеру поведения при $\mathrm{Re} \to \infty$ моды неустойчивости делятся на две группы, а именно на невязкие (1, 3–8) и вязкие (2) моды, для которых выполняются соответственно условия $\omega_i \to \mathrm{const} \neq 0$, $\omega_i \to 0$. По знаку фазовой скорости и направлению распространения вдоль оси симметрии потока наиболее растущие волновые возмущения делятся на моду конвективной неустойчивости ($c_r > 0$, моды 1, 2) и моду абсолютной неустойчивости ($c_r < 0$, моды 3–8). С приближением параметра закрутки q к $q_{\max}$ или $q_{\min}$ возможны отклонения от этого правила. На рис. 1 представлены зависимости максимального коэффициента усиления ω_i^* (сплошные линии) и частоты колебаний ω_r^* (пунктирные линии) от закрутки q для мод 1–5 при $\mathrm{Re} = 5000$.

Таблица 2

Границы областей неустойчивости и значения ω_r^*, α_*, q_*, отвечающие максимальным коэффициентам усиления ω_i^* для мод 1–8

Мода	ω_i^*	ω_r^*	α_*	q_*	$\alpha_{\min}$	$\alpha_{\max}$	$q_{\min}$	$q_{\max}$
Re = 140								
1	0,1902	0,288	0,784	0,415	0,005	1,8	0	1,12
2	0,1123	0,191	0,783	0,690	0	1,305	0,195	0,875
Re = 300								
1	0,2158	0,302	0,803	0,431	0,021	2,005	0	1,42
2	0,0690	0,231	0,880	0,748	0	1,22	0,08	0,9
3	0,0361	−0,142	0,512	0,666	0,09	0,828	0,05	1,07
Re = 450								
1	0,2241	0,305	0,807	0,438	0,014	2,1	0	1,53
2	0,0541	0,259	0,928	0,755	0	1,24	0,05	0,9
3	0,0549	−0,161	0,518	0,697	0,06	0,96	0,04	1,18
4	0,0022	−0,1362	0,504	0,607	0,41	0,6	0,48	0,74
Re = 1000								
1	0,2339	0,307	0,811	0,448	0,006	2,2	0	1,78
2	0,0290	0,110	0,848	0,700	0	1,26	0,08	0,9
3	0,0807	−0,183	0,525	0,728	0,04	1,25	0,02	1,36
4	0,0338	−0,184	0,532	0,701	0,19	0,79	0,15	1,12
5	0,0038	−0,154	0,549	0,646	0,38	0,68	0,41	0,82
6	0,0073	−0,080	0,547	0,499	0,08	0,94	0,04	0,78
Re = 5000								
1	0,2407	0,306	0,812	0,456	0,001	2,39	0	1,65
2	0,0128	0,094	0,848	0,700	0	1,3	0,008	0,9
3	0,1040	−0,190	0,544	0,749	0,01	2,85	0,01	2,66
4	0,0671	−0,240	0,534	0,776	0,04	0,91	0,038	1,45
5	0,0428	−0,249	0,539	0,779	0,07	0,8	0,12	1,28
6	0,0252	−0,221	0,528	0,723	0,02	1,49	0,015	1,15
7	0,0126	−0,200	0,553	0,703	0,18	1,22	0,17	1,05
8	0,009	−0,2036	0,660	0,785	0,27	0,74	0,26	0,9

Единственная мода, неустойчивая одновременно в незакрученном и закрученном потоке, — это первая мода. Она имеет наименьшее критическое число Рейнольдса, наибольший коэффициент усиления и вызывает развитие конвективной неустойчивости в потоке. С ростом числа Рейнольдса в закрученном потоке при $q > q_{\min}$ развивается последовательно 3–8 мод абсолютной неустойчивости. Определяемые ими волны неустойчивости распространяются против потока вдоль оси симметрии. При увеличении числа Рейнольдса растет также максимальное значение величины закрутки $q_{\max}$, при котором течение неустойчиво.

Первые численные расчеты [2], выполненные по невязкой теории для моды 1, показали, что исследуемое течение становится устойчивым при $q \geqslant 1{,}5$. Изучая одновременно три первые неустойчивые моды при конечных числах Рейнольдса, авторы работы [6] выявили неустойчивость течения (1) при большой закрутке потока $1{,}5 < q < 4{,}882$. Настоящими расчетами установлено, что моды 4–6 также неустойчивы при $q > 1{,}5$. Зависимости $q_{\max}$ от числа Рейнольдса для мод 1–7 приведены на рис. 2.

3. Нейтральные кривые в плоскости (α, q). Обратимся к исследованию собственных решений задачи (3), (4) в плоскости свободных параметров (α, q) при $\mathrm{Re} = \mathrm{const}$. Целью является построение нейтральных кривых $\omega_i = 0$ и определение характерных значений волновых чисел по пространственной координате. Отметим в связи с этим одно важное свойство собственных решений. Оказывается, существуют точки в пространстве Re, q, α, в которых задача на собственные значения имеет кратный корень $c^{(k)} = c^{(m)}$. Это означает, что решения для двух мод в такой точке совпадают, а в малой окрестности происходит ветвление этих мод. При этом ветвиться могут разные пары (k, m) из набора неустойчивых мод, существующих при выбранном значении Re. В табл. 3 представлены некоторые примеры, в которых число точек ветвления q_b изменяется от одной при $\mathrm{Re} = 140$ до девяти при $\mathrm{Re} = 5000$.

При переходе параметра q через q_b две ветвящиеся моды обмениваются частями зависимостей $\omega_r(\alpha)$, $\omega_i(\alpha)$ и как следствие значениями $\alpha_{\max}$, $\alpha_{\min}$. Такая перестройка мод отчетливо прослеживается на рис. 3,

построенном для мод (1, 2). Значения волнового числа $\alpha_{\max}$, при котором $\omega_i = 0$ на верхней части нейтральной кривой, составляют для мод (1, 2) соответственно 1,323; 0,67 при $q = 0,68$ (рис. 3, *а*) и 0,653; 1,305 при $q = 0,69$ (рис. 3, *б*). В самой точке ветвления $q_b = 0,689$ (точки ветвления указаны пунктиром на рис. 4) исходная задача на собственные значения имеет кратный корень, а фазовые скорости и коэффициенты усиления двух мод совпадают: $\omega_r^1 = \omega_r^2 = 0,027$, $\omega_i^1 = \omega_i^2 = 0,055$ при $\alpha = 0,602$. В частном случае при $\mathrm{Re} = 115$ в точке ветвления $q_b = 0,65$ мод (1, 2) возмущения (2) представляют собой стоячие нарастающие волны: $\omega_r^1 = \omega_r^2 = 0$, $\omega_i^1 = \omega_i^2 = 0,061$ при $\alpha = 0,527$.

Таблица 3

Точки ветвления мод 1–8 *в плоскости* (α, q)

Re	$q_b(k,m)$				
140	0,689 (1, 2)	—	—	—	—
300	0,74 (1, 2)	0,52 (3, 2)	—	—	—
450	0,755 (1, 2)	0,595 (2, 3)	—	—	—
1000	0,76 (1, 2)	0,675 (2, 3)	0,495 (2, 4)	0,225 (4, 6)	—
5000	0,78 (7, 8)	0,745 (1, 2)	0,73 (3, 1)	0,71 (7, 6)	—
	0,68 (2, 4)	0,54 (2, 5)	0,43 (6, 7)	0,37 (1, 3)	0,36 (8, 7)

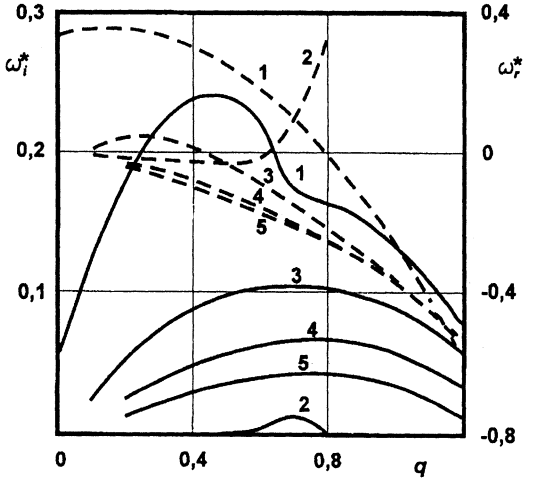

Рис. 1. Зависимости максимального коэффициента усиления ω_i^* (сплошные линии) и частоты ω_r^* (пунктирные линии) от закрутки для мод 1–5 (кривые *1–5*) при $\mathrm{Re} = 5000$

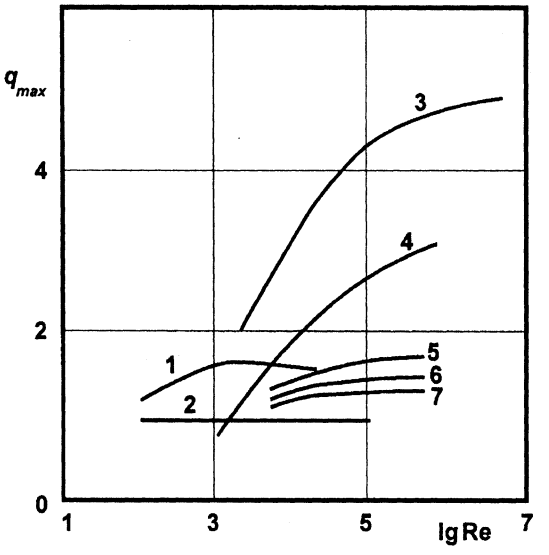

Рис. 2. Максимальные значения закрутки $q_{\max}$, при которой течение неустойчиво: моды 1–7 при $\alpha = 0,4; 0,6; 0,2; 0,3; 0,6; 0,7; 0,8$ соответственно (кривые *1–7*)

Аналогичным образом происходит ветвление мод во всех других случаях, причем новые точки ветвления возникают с ростом Re по мере появления новых неустойчивых собственных решений спектральной задачи (3), (4).

Области устойчивости и неустойчивости исходного потока (1) к возмущениям (2) разделяются в плоскости (α, q) нейтральной кривой — линией, на которой выполняется условие $\omega_i = 0$. Для каждой моды неустойчивости можно построить соответствующую нейтральную кривую. Нейтральная кривая моды m описывается отдельным замкнутым контуром только при значениях $\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_m$, близких к критическому для данной моды. По мере продвижения по Re от критической точки возникают ее бифуркации со вновь возникающими модами. При этом форма области неустойчивости качественно меняется: происходит скачкообразное изменение границ отдельных областей неустойчивости, а нейтральные кривые объединяются в единую кривую сложной формы с точками самопересечения.

На рис. 4, *а* области неустойчивости двух мод (1, 2) при $\mathrm{Re} = 140$ пересекаются, а нейтральные кривые объединяются в одну кривую, часть которой соответствует первой моде, а часть — второй. Нейтральные кривые для шести неустойчивых мод при $\mathrm{Re} = 1000$ показаны на рис. 4, *б*. Отметим, что мода 6 формируется из части моды 2 при $900 < \mathrm{Re} < 1000$ и ее нейтральная кривая не имеет отдельного замкнутого контура в отличие от всех остальных исследованных мод. При $\mathrm{Re} = 5000$ нейтральные кривые имеют наиболее сложную структуру, включая восемь точек ветвления.

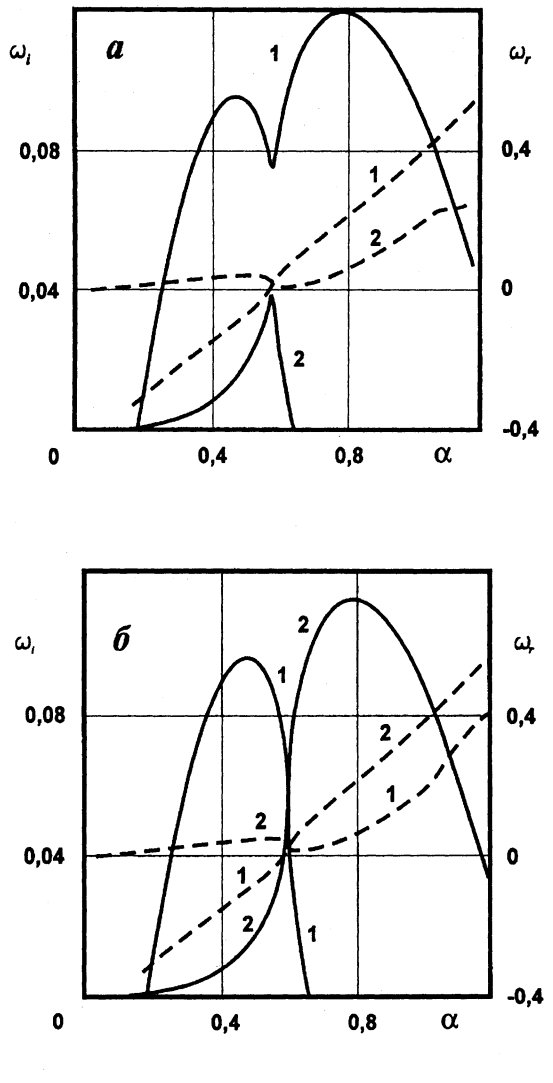

Рис. 3. Зависимости коэффициента усиления ω_i (сплошные линии) и частоты ω_r (пунктирные линии) от волнового числа для мод 1 и 2 (кривые *1, 2*) при Re = 140: *а* — $q = 0{,}68$; *б* — 0,69

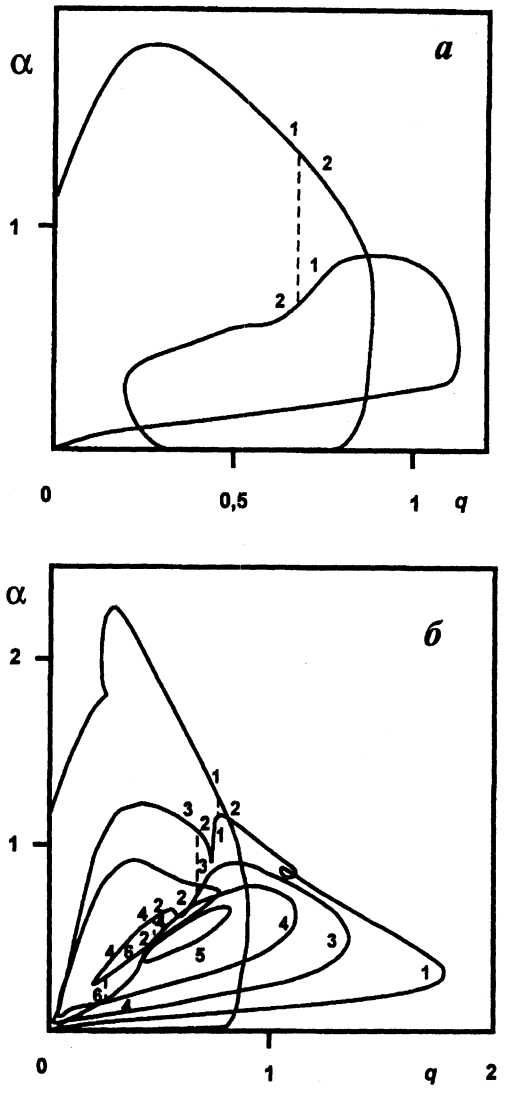

Рис. 4. Нейтральные кривые при Re = 140 для мод 1, 2 (*а*); при Re = 1000 для мод 1–6 (*б*)

4. Заключение. Проведенные численные исследования показали существование до восьми неустойчивых мод одновременно в рассматриваемом течении при фиксированном числе Рейнольдса, среди которых одна мода вязкая, а остальные — невязкие. Для всех неустойчивых мод определены критические числа Рейнольдса и максимальные коэффициенты усиления. Наибольший коэффициент усиления соответствует невязкой моде с наименьшим критическим числом Рейнольдса. Другие невязкие моды более слабые, причем чем ниже критическое число Рейнольдса Re_m, тем мода более неустойчива. Фазовые скорости, соответствующие максимальным коэффициентам усиления, положительны для наиболее неустойчивой невязкой моды и единственной вязкой моды и отрицательны для всех остальных мод.

Показано, что ветвление мод и скачкообразное изменение границ областей неустойчивости связано с существованием кратных корней в исходной задаче на собственные значения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 03-01-00042.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Batchelor G.K.* Axial flow in the trailing line vortices // J. Fluid Mech. 1964. **20**, N 4. 645–658.
2. *Lessen M., Singh P.J., Paillet F.* The stability of a trailing line vortex. Part 1. Inviscid theory // J. Fluid Mech. 1974. **63**, N 4. 753–763.

3. *Duck P.W.* The inviscid stability of swirling flows: large wavenumber disturbances // ZAMP. 1986. **37**. 340–360.
4. *Mayer E.W., Powell K.G.* Viscous and inviscid instabilities of a trailing vortex // J. Fluid Mech. 1992. **245**. 91–114.
5. *Ахметов В.К., Шкадов В.Я.* О новой вязкой моде неустойчивости свободного вихря // Изв. РАН. Механ. жидкости и газа. 1999. № 6. 76–80.
6. *Ахметов В.К., Шкадов В.Я.* Неустойчивость свободного вихря при большой закрутке потока // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2003. № 1. 66–70.

Поступила в редакцию
09.12.2004

УДК 539.3

ДВИЖЕНИЕ ТОНКОГО ЖЕСТКОГО ТЕЛА В УПРУГОЙ СРЕДЕ

А. В. Звягин

В данной работе исследуется задача о движении с постоянной скоростью жесткого тела в неограниченной линейно-упругой среде. Подобно тому как в газовой динамике рассматривается двумерная задача обтекания установившимся потоком тонких тел, здесь решается аналогичная задача для упругой среды. Такие задачи возникают, например, при моделировании движения в грунте плуга, проникающих снарядов. Для рыхлых грунтов модуль сдвига достаточно мал, поэтому скорость поперечных волн невелика и скорость движения тел может быть сравнима с ней. Существенной особенностью таких задач для упругой среды является наличие прочности, трения на поверхности тела и невозможность безотрывного обтекания. Это приводит к необходимости решения смешанных краевых задач теории упругости [1]. В работе получено в конечном виде решение таких задач для тел, контур которых имеет постоянную кривизну.

1. Основные уравнения. Двумерное движение упругой среды в неподвижной системе координат $x_1o_1y_1$ в отсутствие массовых сил описывается уравнениями Ламе

$$\rho\ddot{\boldsymbol{U}} = (\lambda+\mu)\cdot \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{U} + \mu\cdot\Delta\boldsymbol{U}, \tag{1}$$

где ρ — плотность; $\boldsymbol{U} = (u_1, u_2)$ — вектор перемещения; λ, μ — упругие постоянные Ламе; точками обозначены производные по времени t.

Компоненты тензора напряжений σ_{ij} связаны с деформациями ε_{ij} законом Гука

$$\sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}, \tag{2}$$

где по повторяющемуся индексу k подразумевается суммирование, а деформации определяются через перемещения выражениями

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}). \tag{3}$$

Здесь и далее запятая и следующие за ней индексы означают частные производные по переменным с соответствующими индексами.

Воспользуемся представлением векторного поля перемещений в форме Ламе

$$\boldsymbol{U} = \operatorname{grad}\varphi + \operatorname{rot}\boldsymbol{\psi}, \quad \operatorname{div}\boldsymbol{\psi} = 0. \tag{4}$$

Если подставить представление (4) в уравнения Ламе (1) и применить к ним оператор div, получим волновое уравнение для потенциала продольных волн φ

$$\ddot{\varphi} = a^2\Delta\varphi, \quad a = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}. \tag{5}$$

Аналогично после применения к уравнению (1) оператора rot получим волновое уравнение для определения потенциала поперечных волн $\boldsymbol{\psi}$

$$\ddot{\boldsymbol{\psi}} = b^2\Delta\boldsymbol{\psi}, \quad b = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \tag{6}$$