С. И. Яковлев, Граница конечности сингулярного спектра в окрестности особой точки операторов модели Фридрихса,
Алгебра и анализ, 1998, том 10, выпуск 4, 210–237

https://www.mathnet.ru/aa1026

Алгебра и анализ
Том 10 (1998), вып. 4

ГРАНИЦА КОНЕЧНОСТИ СИНГУЛЯРНОГО СПЕКТРА В ОКРЕСТНОСТИ ОСОБОЙ ТОЧКИ ОПЕРАТОРОВ МОДЕЛИ ФРИДРИХСА

© С. И. ЯКОВЛЕВ

В статье изучается сингулярный спектр самосопряженных операторов модели Фридрихса в окрестности особой точки. Так называется точка, около которой невозможна гладкая (локально) замена переменных, сводящая задачу к обычному случаю. В терминах гладкости ядра возмущения найдены условия, гарантирующие конечность точечного и сингулярного непрерывного спектра таких операторов. Эти условия зависят от конечности ранга оператора возмущения. Точность найденных условий подтверждается построением контрпримеров.

§1. Введение

Проблема возникновения сингулярного спектра на непрерывном появляется при анализе математических аспектов квантовой теории рассеяния и физики твердого тела. В последней из этих областей появление сингулярного спектра приводит к новым непосредственно наблюдаемым физическим эффектам — переходам Андерсена.

Важным инструментом исследования этой проблемы являются самосопряженные операторы модели Фридрихса, являющиеся очень удобной моделью реальных квантовых гамильтонианов. Оператор умножения на независимую переменную, возмущения которого здесь рассматриваются, получается при записи оператора Шрёдингера в импульсном представлении. Исследованию этой модели посвящена обширная литература. Она изучалась Л. Д. Фаддеевым, Б. С. Павловым, С. Н. Набоко, С. И. Яковлевым и др. [1–8]. Возможность возникновения сингулярного спектра здесь впервые была установлена в работе

Ключевые слова: сингулярный спектр, модель Фридрихса, самосопряженный оператор, спектральный анализ, особая точка, оператор возмущения, ранг возмущения, гладкость ядра, аналитическая оператор-функция, контрпример.

Б. С. Павлова и С. В. Петраса (1970). Принципиально новые условия возникновения сингулярного спектра найдены в работах [7–8]. Найденные условия фактически являются необходимыми и достаточными. Таким образом, вопрос о возникновении сингулярного спектра в рамках самосопряженной модели Фридрихса получил здесь свое окончательное решение.

Представляется важной дальнейшая разработка данной тематики. А именно, несомненно интересна задача исследования сингулярного спектра возмущений оператора умножения уже на функцию независимой переменной (например, $\cos t$ или t^2). Такие операторы естественно возникают при рассмотрении дискретных моделей оператора Шрёдингера в импульсном представлении. Особое внимание при этом должно уделяться сингулярному спектру в окрестности точек, около которых невозможна гладкая (локально) замена переменных, сводящая задачу к обычной модели Фридрихса. Будет показано, что в окрестности таких точек поведение сингулярного спектра приобретает совершенно иной характер.

В нашей работе мы исследуем сингулярный непрерывный и точечный спектры в окрестности особой точки $t = 0$ слабо возмущенного оператора умножения в пространстве $L_2(\mathbb{R})$ на функцию t^2, т.е. оператора $\mathcal{L} = t^2 \cdot + V$, где V (возмущение) — интегральный оператор с эрмитовым ядром $v(t, x)$. Требование принадлежности оператора V классу ядерных операторов достаточно, чтобы абсолютно непрерывный спектр $\mathcal{L}$ совпадал с вещественной полуосью $\mathbb{R}_+$ [9]. Предметом нашего исследования является поведение точечного и сингулярного непрерывного спектров в зависимости от гладкости ядра $v(t, x)$. Мы разыскиваем в некотором смысле точные условия на $v(t, x)$, обеспечивающие простую структуру сингулярного спектра, например не более конечного числа собственных значений конечной кратности. Точность найденных условий подтверждается построением контрпримеров.

Кратко опишем содержание работы. §2 посвящен описанию исследуемой модели и ее обоснованию. В §3 показано, как задача исследования сингулярного спектра в самосопряженной модели Фридрихса сводится к описанию структуры корней некоторой аналитической оператор-функции с положительной мнимой частью. §4–6 являются основными. В §4 выясняются достаточные условия на возмущение V, гарантирующие простую структуру сингулярного спектра. Эти условия оказываются различными для возмущений конечного и бесконечного рангов. В §5, 6 строятся контрпримеры, подтверждающие точность данных условий соответственно для возмущений конечного и бесконечного рангов.

§2. Описание модели и ее обоснование

В пространстве $L_2(\mathbb{R})$ рассматривается самосопряженный оператор $\mathcal{L}$, действующий по формуле

$$(\mathcal{L}u)\ (t) = t^2 \cdot u(t) + \int\limits_{\mathbb{R}} v(t,x)u(x)\,dx, \quad u \in L_2(\mathbb{R}), \tag{1}$$

т.е. $\mathcal{L} = t^2 \cdot +V$, где $t^2 \cdot$ — оператор умножения на квадрат независимой переменной, а V (возмущение) — интегральный оператор с эрмитовым ядром $v(t,x)$, удовлетворяющим следующему условию гладкости:

$$v(t+h,t+h) + v(t,t) - v(t+h,t) - v(t,t+h) \le \omega^2(|h|), \quad |h| \le 1, \tag{2}$$

с функцией $\omega(t)$ (модулем непрерывности возмущения V), монотонной и удовлетворяющей условию Дини:

$$\omega(t) \downarrow 0 \text{ при } t \downarrow 0 \quad \text{и} \quad \int\limits_0^1 \frac{\omega(t)}{t}\,dt < \infty. \tag{3}$$

Предполагается также, что оператор V неотрицательный и ядерный

$$V \ge 0, \qquad V \in \sigma_1. \tag{4}$$

Принадлежность V классу σ_1 вместе с условием (2) означает для ядра некоторое условие убывания на бесконечности. При этом (2) можно записать как условие гладкости на ядро $v_{1/2}(t,x)$ интегрального оператора $V^{1/2}$, ибо левая часть выражения (2) тождественно переписывается [3] в виде интеграла $\int_{\mathbb{R}} |v_{1/2}(t+h,y) - v_{1/2}(t,y)|^2\,dy$ (и, следовательно, неотрицательна).

Изучим структуру $\sigma_{\text{sing}}(\mathcal{L})$ сингулярного спектра оператора $\mathcal{L}$ в зависимости от гладкости возмущения. Заметим, что под сингулярным спектром мы понимаем объединение сингулярного непрерывного и точечного спектров. Основное внимание уделим особой точке нуль, так как можно показать, что после простой замены переменных $t^2 = x$ вне любой окрестности точки нуль спектральная ситуация изучается старым методом [1–8]. Это объясняется тем, что указанная замена переменных вне любой окрестности точки нуль гладкая, результаты же работ [1–8], относящиеся к структуре сингулярного спектра слабых возмущений оператора умножения на независимую переменную, в существенном носят локальный характер. В то же время, как выяснится, в окрестности точки нуль поведение сингулярного спектра приобретает совершенно иной характер.

В работах [7, 8] показано, что для самосопряженного оператора модели Фридрихса $L := t\cdot + V$ (где $t\cdot$ — оператор умножения на независимую переменную, а оператор V удовлетворяет условиям (2)–(4)) существует точная граница конечности сингулярного спектра. А именно, если $\omega(t) = O(\sqrt{t})$ при $t \to 0$, то сингулярный спектр L состоит не более чем из конечного числа собственных значений конечной кратности (сингулярный непрерывный спектр отсутствует). Если же $\overline{\lim}_{t\to 0}\, \omega(t)/\sqrt{t} = +\infty$, то строятся примеры, показывающие, что уже в случае возмущения V ранга 1 у оператора L могут появиться точки накопления собственных значений.

В работе [1] показано, как можно использовать модель Фридрихса для изучения свойств спектра оператора Шрёдингера $(-\Delta + q)$. Связь между этими операторами осуществляется интегральным преобразованием Фурье. Аналогично с помощью ряда Фурье устанавливается связь между моделью Фридрихса и дискретным оператором Шрёдингера S [10, 11] на $\mathbb{Z}$. Оператор $S = (U + U^*) + q$ и задан на пространстве $l_2(\mathbb{Z})$ квадратично суммируемых комплексных последовательностей $u = \{u_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$; здесь U — оператор правого сдвига, U^* — его сопряженный, а $q = \{q_n\}_{-\infty}^{\infty}$, так что $(q\,u)_n = q_n \cdot u_n$ [10, 11]. При изоморфизме, устанавливаемом между $l_2(\mathbb{Z})$ и $L_2(-\pi, \pi)$ отображением

$$\Phi^{-1} : u \to \widetilde{u}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n \cdot e^{int},$$

оператор S превращается в $\widetilde{S}$:

$$\widetilde{S}\widetilde{u}(t) = 2\cos(t) \cdot \widetilde{u}(t) + \int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{q}(t - x) \cdot \widetilde{u}(x)\, dx,$$

где $\widetilde{q}(t) = \sum_n q_n \cdot e^{int}$, $\widetilde{u} \in L_2(-\pi, \pi)$. Действительно,

$$
\begin{aligned}
(\widetilde{S}\widetilde{u}) &= \Phi^{-1}\left[(U+U^*)+q\right]u = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}(u_{n-1}+u_{n+1}+q_n u_n)e^{int} \\
&= \sum\nolimits_n u_n e^{i(n+1)t} + \sum\nolimits_n u_n e^{i(n-1)t} + \sum\nolimits_n q_n u_n e^{int} \\
&= 2\cos(t)\sum\nolimits_n u_n e^{int} + \int_{-\pi}^{\pi}\widetilde{q}(t-x)\cdot\widetilde{u}(x)\,dx.
\end{aligned}
$$

Очевидно, замена переменных $2\cos t = x$ сводила бы исследование $\sigma_{\rm sing}(\widetilde{S})$ к изучению $\sigma_{\rm sing}(L)$. Однако, поскольку $(\cos t)' = -\sin t|_{\pm\pi} = 0$, в окрестности точек $\pm\pi$ она не является гладкой, в связи с чем при таком переходе информация о тонких деталях структуры $\sigma_{\rm sing}(\widetilde{S})$ здесь может быть утрачена. Поэтому представляется разумным в качестве модели теории возмущений непрерывного спектра рассмотреть возмущения не оператора умножения на независимую переменную t, а оператора умножения на функцию t^2. Разумеется, имея представление о структуре множества $\sigma_{\rm sing}(L)$, определенную информацию о строении множества $\sigma_{\rm sing}(\mathcal{L})$ (в том числе и вблизи особой точки нуль) можно получить, сделав замену переменных, но эти результаты будут выражаться в неудобных терминах и окажутся недостаточно точными около точки нуль.

§3. Аналитическая оператор-функция $M(z)$ и сингулярный спектр

Пусть $M(z) : E \to E$ — аналитическая оператор-функция для $z \in \mathbb{C}\setminus[0,+\infty)$, где $E := \overline{R(V)}$ — замыкание области значений V:

$$M(z) := I + \sqrt{V}(t^2 - z)^{-1}\sqrt{V},$$

здесь $(t^2 - z)^{-1}$ — оператор умножения на соответствующую функцию в пространстве $L_2(\mathbb{R})$. Очевидно, $\Im M(z) \geq 0$ при $\Im z > 0$.

Напишем для оператора V спектральное разложение

$$V = \sum_{k=1}^{+\infty}\mu_k(\cdot,\varphi_k)\varphi_k, \quad \mu_k \geq 0,\ \mu_k \to 0,\ \|\varphi_k\| = 1.$$

Введем удобные обозначения [3]: $\{\mu_k^{1/2}\overline{\varphi_k(t)}\}_{k=1}^{\infty} =: \Phi(t)$. Используя естественный изоморфизм гильбертовых пространств E и l_2 при отождествлении

$$f \to \{(f,\varphi_k)\}_{k=1}^{\infty}, \quad \| f \|^2 = \sum\nolimits_k |(f,\varphi_k)|^2,$$

можно написать формулу для действия оператора $M(z)$ в новом l_2-представлении:

$$M(z) = I + \int_{\mathbb{R}} (t^2 - z)^{-1} (\cdot, \Phi(t))\Phi(t)\, dt.$$

Из ядерности V следует, что

$$\Phi(t) \in L_2(\mathbb{R}, l_2). \tag{5}$$

Условие гладкости (2) ядра $v(t,x)$ равносильно условию гладкости на вектор-функцию $\Phi(t)$

$$\|\Phi(t+h) - \Phi(t)\|_{l_2} \le \omega(|h|). \tag{6}$$

Из (5), (6) и (3) непосредственно получаем, что

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|\Phi(t)\|_{l_2} < \infty, \qquad \lim_{t\to\infty} \|\Phi(t)\|_{l_2} = 0. \tag{7}$$

Преобразуем выражение для $M(z)$.

$$\begin{aligned} M(z) &= I + \int_0^{+\infty} \frac{(\cdot,\Phi(t))\Phi(t) + (\cdot,\Phi(-t))\Phi(-t)}{t^2 - z}\, dt \\ &= I + \int_0^{+\infty} \frac{(\cdot,\Phi(\sqrt{\tau}))\Phi(\sqrt{\tau}) + (\cdot,\Phi(-\sqrt{\tau}))\Phi(-\sqrt{\tau})}{\tau - z} \frac{d\tau}{2\sqrt{\tau}}. \end{aligned} \tag{8}$$

Таким образом, $M(z)$ является суммой слагаемых вида

$$\int_0^{+\infty} \frac{(\cdot, g(\tau))g(\tau)}{\tau - z}\, d\tau \tag{9}$$

с вектор-функцией $g(\tau) \in L_2(\mathbb{R}_+, l_2)$ и такой, что $\|g(\tau+h) - g(\tau)\|_{l_2} \le \widetilde{\omega}_\tau(|h|)$ с функцией $\widetilde{\omega}_\tau(t)$, при каждом $\tau > 0$ удовлетворяющей для малых значений t условию (3). Отсюда уже стандартным путем, действуя так же, как и в скалярном случае [12], нетрудно показать, что у оператор-функции $M(z)$ на интервале $(0, +\infty)$ есть предельные значения, понимаемые в сильном смысле, т.е. при любом $f \in l_2$

$$M(z)f \xrightarrow[z\to\lambda+i0]{} f + v.p. \int_0^{+\infty} \frac{(f, \Phi(\sqrt{\tau}))\Phi(\sqrt{\tau}) + (f, \Phi(-\sqrt{\tau}))\Phi(-\sqrt{\tau})}{\tau - \lambda} \frac{d\tau}{2\sqrt{\tau}} + i\pi \frac{(f, \Phi(\sqrt{\lambda}))\Phi(\sqrt{\lambda}) + (f, \Phi(-\sqrt{\lambda}))\Phi(-\sqrt{\lambda})}{2\sqrt{\lambda}}. \tag{10}$$

Делая в выписанном интеграле обратную замену переменных, получаем, что при $\lambda > 0$ предельные значения $M(\lambda) := M(\lambda + i0) = \text{s-lim}_{z\to\lambda+i0} M(z)$ выражаются формулой

$$M(\lambda) = I + v.p. \int_{\mathbb{R}} \frac{(\cdot, \Phi(t))\Phi(t)}{t^2 - \lambda}\, dt + i\pi \frac{(\cdot, \Phi(\sqrt{\lambda}))\Phi(\sqrt{\lambda}) + (\cdot, \Phi(-\sqrt{\lambda}))\Phi(-\sqrt{\lambda})}{2\sqrt{\lambda}}. \tag{11}$$

На самом деле можно доказать большее, а именно, как и в работе [3] (см. также [8, 13]), показывается, что выражение (9), а значит, и (8) непрерывно вплоть до вещественной оси в ядерной норме. Таким образом, справедливо следующее предложение.

Предложение 1. *В комплексной плоскости с разрезом* $[0; +\infty)$ *аналитическая оператор-функция* $M(z)$ *при выполнении условий* (2)–(4) *на возмущение* V *непрерывно продолжается в ядерной норме на интервал* $(0; +\infty)$ *на верхнем и нижнем берегах разреза. При этом для предельных значений* $M(\lambda) := M(\lambda + i\,0)$, $\lambda > 0$, *справедливо выражение* (11).

Пусть $N := \{\, \lambda > 0 : \exists g \in l_2,\ g \ne 0,\ M(\lambda)g = 0 \,\} \equiv \{\, \lambda > 0 : \operatorname{Ker}(M(\lambda)) \ne \varnothing \}$.

Предложение 2. *Если оператор V удовлетворяет условиям* (2)–(4), *то* $\sigma_{\text{sing}}(\mathcal{L})$, *сингулярный спектр оператора $\mathcal{L}$, определяемого формулой* (1), *погружается в множество, получающееся добавлением к множеству N точки нуль, т.е.*

$$\sigma_{\text{sing}}(\mathcal{L}) = \overline{\sigma_{\text{p}}(\mathcal{L})} \cup \sigma_{\text{s.c.}}(\mathcal{L}) \subseteq N \cup \{0\},$$

где $\sigma_{\text{p}}(\mathcal{L})$ *— точечный, а* $\sigma_{\text{s.c.}}(\mathcal{L})$ *- сингулярный непрерывный спектры самосопряженного оператора* $\mathcal{L}$.

Доказательство этого утверждения основано на следующем результате, содержащемся в работе [3]:

Если $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ такое, что при некотором $\epsilon > 0$

$$\sup_{\substack{0<|z-\lambda_0|<\epsilon \\ \text{Im}\, z>0}} \|M^{-1}(z)\| < \infty, \tag{12}$$

то спектр оператора $\mathcal{L}$ на интервале $(\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon)$ абсолютно непрерывен.

Пусть теперь $\lambda_0 > 0$, $\lambda_0 \notin N$, тогда в силу компактности оператора $(M(\lambda_0) - I)$ оператор $M(\lambda_0)$ ограниченно обратим, поэтому по непрерывности $M(z)$ (уже в обычной операторной норме) это будет верно и для всех $z, \text{Im}\, z \geq 0$, из некоторой окрестности точки λ_0, а значит, в точке λ_0 условие (12) выполнено. Предложение доказано.

Как видно из предложения 2, задача исследования сингулярного спектра оператора $\mathcal{L}$ сводится к описанию структуры множества корней N оператор-функции $M(\lambda)$ с положительной мнимой частью. Заметим, что если ввести семейство компактных операторов $T_\lambda : l_2 \to l_2$, $\lambda > 0$,

$$T_\lambda := -v.p. \int_{\mathbb{R}} \frac{(\cdot, \Phi(t))\Phi(t)}{t^2 - \lambda}\, dt - i\pi \frac{(\cdot, \Phi(\sqrt{\lambda}))\Phi(\sqrt{\lambda}) + (\cdot, \Phi(-\sqrt{\lambda}))\Phi(-\sqrt{\lambda})}{2\sqrt{\lambda}},$$

то можно утверждать, что множество корней оператор-функции $M(\lambda)$ совпадает с множеством тех $\lambda > 0$, для которых оператор T_λ имеет точку 1 собственным значением, т.е.

$$N = \{\, \lambda > 0 : \exists g \in l_2,\ g \neq 0,\ T_\lambda g = g \,\}.$$

Отсюда нетрудно видеть, что $\lambda \in N$ тогда и только тогда, когда существует корневой вектор $g = g_\lambda \neq 0$ такой, что

$$(g_\lambda, \Phi(\sqrt{\lambda})) = (g_\lambda, \Phi(-\sqrt{\lambda})) = 0, \tag{13}$$

$$g_\lambda + v.p. \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{(g_\lambda, \Phi(t))\, \Phi(t)}{t^2 - \lambda}\, dt = 0. \tag{14}$$

Действительно, достаточно взять вещественную и мнимую части квадратичной формы $(T_\lambda g_\lambda, g_\lambda) = (g_\lambda, g_\lambda)$. Заметим также, что поскольку вектор-функция $\Phi(t)$ удовлетворяет свойству (6), то с учетом (13) интеграл в (14) можно понимать в обычном смысле.

§4. Достаточные условия отсутствия сингулярного спектра

В этом параграфе приводятся условия на модуль непрерывности $\omega(t)$ оператора возмущения V, гарантирующие у оператора $\mathcal{L}$, определяемого формулой (1), тривиальный сингулярный спектр, т.е. не более конечного числа собственных значений конечной кратности (расположенных на абсолютно непрерывном спектре $\sigma_a(\mathcal{L}) = [0; +\infty)$). Данные условия зависят от конечности ранга оператора возмущения.

Теорема 1. *Пусть возмущение V удовлетворяет условиям* (2)–(4) *с функцией $\omega(t) = Ct^{1/2}$, $t \to 0$. Тогда, если константа $C < (1/\ln 4)^{1/2}$, точка нуль не является точкой сгущения корней оператор-функции $M(\lambda)$.*

Доказательство. Если $\lambda \in N$, то в точке λ выполнены условия (13) и (14). Умножим скалярно (14) на соответствующий корневой вектор $g = g_\lambda$ такой, что $\|g\| = 1$. Тогда

$$I := 1 + \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{|(g, \Phi(t))|^2}{t^2 - \lambda}\, dt = 0. \tag{15}$$

Функция $\psi(t) := (g, \Phi(t))$, согласно (13), обращается в нуль в точках $\pm\sqrt{\lambda}$, поэтому $|\psi(t)| = |(g, \Phi(t) - \Phi(\pm\sqrt{\lambda}))| \leq \omega(|t \mp \sqrt{\lambda}|)$, и, если λ достаточно близко к точке нуль, последнее неравенство будет выполнено на интервале $[-\sqrt{\lambda}; \sqrt{\lambda}]$. Очевидно,

$$I \geq 1 + \int\limits_{-\sqrt{\lambda}}^{\sqrt{\lambda}} \frac{|\psi(t)|^2}{t^2 - \lambda}\, dt,$$

но

$$\left| \int\limits_{-\sqrt{\lambda}}^{\sqrt{\lambda}} \frac{|\psi(t)|^2}{t^2-\lambda}\,dt \right| \le 2\int\limits_0^{\sqrt{\lambda}} \frac{\omega^2(|t-\sqrt{\lambda}|)\,dt}{(\sqrt{\lambda}-t)(\sqrt{\lambda}+t)} \le 2C^2 \int\limits_0^{\sqrt{\lambda}} \frac{dt}{\sqrt{\lambda}+t} = C^2\ln 4,$$

а значит, $I \ge 1-C^2\ln 4 > 0$, что противоречит равенству (15). Теорема доказана.

Если возмущение V имеет конечный ранг, то результат предыдущей теоремы можно улучшить.

Теорема 2. *Пусть оператор V удовлетворяет условиям* (2)–(4) *с* $\omega(t) = O(\sqrt{t})$ *при* $t \to 0$ *и* $\operatorname{rank} V < \infty$, *тогда точка нуль не является точкой сгущения корней N оператор-функции $M(\lambda)$.*

Доказательство. Предположим, что существует последовательность корней λ_n, монотонно убывающая к точке нуль. Пусть $u_n := \sqrt{\lambda_n}$ и $g_n = g_{\lambda_n}$ — соответствующий корневой вектор. В точках λ_n выполняются условия (13), (14). Умножая скалярно (14) на вектор g_n такой, что $\|g_n\| = 1$, получаем

$$1 + \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{|(g_n, \Phi(t))|^2}{t^2-u_n^2}\,dt = 0. \tag{16}$$

Функция $\psi_n(t) := (g_n, \Phi(t))$, согласно (13), обращается в нуль в точках $\pm u_n$, и поэтому $|\psi_n(t)| \le \omega(|t \mp u_n|)$. Перепишем (16) в следующем виде:

$$1 + \int\limits_{-u_n}^{u_n} \frac{|\psi_n(t)|^2}{t^2-u_n^2}\,dt + \left(\int\limits_{-\infty}^{-u_n} + \int\limits_{u_n}^{+\infty} \right) \frac{|\psi_n(t)|^2}{t^2-u_n^2}\,dt = 0.$$

В последнем выражении отрицательно лишь второе слагаемое, которое оценивается равномерно по n,

$$\left| \int\limits_{-u_n}^{u_n} \frac{|\psi_n(t)|^2}{t^2-u_n^2}\,dt \right| \le 2\int\limits_0^{u_n} \frac{\omega^2(u_n-t)}{(u_n-t)(u_n+t)}\,dt \le C\int\limits_0^{u_n} \frac{dt}{t+u_n} = C\ln 2.[1]$$

А значит, равномерно оценивается и третье слагаемое, так что

$$\text{const} \geq \left(\int_{-\infty}^{-u_n} + \int_{u_n}^{+\infty} \right) \frac{|\psi_n(t)|^2}{t^2 - u_n^2}\, dt \geq \frac{1}{2} \left(\int_{-\infty}^{-u_n} + \int_{u_n}^{+\infty} \right) \frac{|\psi_n(t)|^2}{t^2}\, dt \tag{17}$$

при всех $n \in \mathbb{N}$ одновременно.

По условию $\operatorname{rank} V < \infty$, следовательно, $\dim E = \dim \overline{R(V)} < \infty$ и из последовательности $g_n \in E, \|g_n\| = 1$, можно выбрать подпоследовательность, которая сходится в l_2 к вектору $g \neq 0$. Чтобы не загружать обозначения, считаем, что уже $g_n \to g$ при $n \to \infty$. Для функции $\psi(t) := (g, \Phi(t))$ из (17) получаем, что $(\psi(t)/t) \in L_2(\mathbb{R})$. Также очевидно, что $\psi(0) = \lim_{n\to\infty} \psi_n(u_n) = 0$, так что при малых значениях t будет $|\psi(t)| \leq \omega(|t|)$. Теперь, умножая скалярно равенство (14), в котором $\lambda = \lambda_n \equiv u_n^2$ и $g_\lambda = g_n$, на вектор g, имеем

$$(g_n, g) + \int_{\mathbb{R}} \frac{\psi_n(t)\, \overline{\psi(t)}}{t^2 - u_n^2}\, dt = 0. \tag{18}$$

Покажем, что равенство (18) не может быть выполнено при всех достаточно больших значениях $n \in \mathbb{N}$. Поскольку $(g_n, g) \to 1$ при $n \to \infty$, достаточно показать, что, начиная с некоторого n, вещественная часть интеграла в (18) неотрицательна, т.е.

$$\operatorname{Re} \left(\int_{-\infty}^{0} + \int_{0}^{+\infty} \right) \frac{\psi_n(t)\, \overline{\psi(t)}}{t^2 - u_n^2}\, dt \geq 0.$$

Убедимся, например, что это верно для второго слагаемого (первое оценивается аналогично). Возьмем числа $a > 0$ и $\delta \in (0; 1)$, тогда

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\psi_n(t)\, \overline{\psi(t)}}{t^2 - u_n^2}\, dt = \left(\int_{0}^{(1-\delta)u_n} + \int_{(1-\delta)u_n}^{(1+\delta)u_n} + \int_{(1+\delta)u_n}^{a} + \int_{a}^{+\infty} \right) \frac{\psi_n(t)\, \overline{\psi(t)}}{t^2 - u_n^2}\, dt.$$

[1]Здесь и далее в этом параграфе C обозначает различные оценочные константы.

При любом фиксированном значении a

$$\int_a^{+\infty} \frac{\psi_n(t)\,\overline{\psi(t)}}{t^2-u_n^2}\,dt \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^{+\infty} \frac{|\psi(t)|^2}{t^2}\,dt \geq 0.$$

Для малых значений t выполнены неравенства $|\psi_n(t)| \leq C\sqrt{|t-u_n|}$ и $|\psi(t)| \leq C\sqrt{t}$, поэтому

$$\begin{aligned}
\left|\int_{(1-\delta)u_n}^{(1+\delta)u_n} \frac{\psi_n(t)\,\overline{\psi(t)}}{(t-u_n)(t+u_n)}\,dt\right| &\leq C \int_{(1-\delta)u_n}^{(1+\delta)u_n} \frac{1}{\sqrt{|t-u_n|}}\,\frac{\sqrt{t}}{t+u_n}\,dt \\
&\leq C\,\frac{\sqrt{(1+\delta)u_n}}{u_n} \int_{(1-\delta)u_n}^{(1+\delta)u_n} \frac{dt}{\sqrt{|t-u_n|}} \leq \frac{C}{\sqrt{u_n}} \int_0^{\delta u_n} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} \\
&\leq C\sqrt{\delta}.
\end{aligned}$$

Последнее выражение можно сделать сколь угодно малым, выбирая δ достаточно близким к 0. В то же время

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^{(1-\delta)u_n} \frac{\psi_n(t)\,\overline{\psi(t)}}{(t-u_n)(t+u_n)}\,dt\right| &\leq C \int_0^{(1-\delta)u_n} \frac{1}{\sqrt{u_n-t}}\,\frac{|\psi(t)|}{t}\,dt \\
&\leq C\left(\int_0^{(1-\delta)u_n} \frac{dt}{u_n-t}\right)^{1/2} \cdot \left(\int_0^{(1-\delta)u_n} \left|\frac{\psi(t)}{t}\right|^2 dt\right)^{1/2} \\
&\leq C\left(\ln\frac{1}{\delta}\right)^{1/2} \cdot \left(\int_0^{u_n} \left|\frac{\psi(t)}{t}\right|^2 dt\right)^{1/2} \to 0
\end{aligned}$$

при $n \to \infty$ и любом фиксированном δ. Далее заметим, что при значениях $t \geq (1+\delta)u_n$

$$\frac{1}{t-u_n} - \frac{1}{t} = \frac{u_n}{(t-u_n)t} \leq \frac{1}{\delta t},$$

так что

$$\frac{1}{t-u_n} \le \frac{1}{t}\Big(1+\frac{1}{\delta}\Big) \le \frac{2}{\delta}\cdot\frac{1}{t}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
\left|\int\limits_{(1+\delta)u_n}^{a} \frac{\psi_n(t)\,\overline{\psi(t)}}{t^2-u_n^2}\,dt\right| &\le \frac{2}{\delta}\int\limits_{(1+\delta)u_n}^{a} \frac{|\psi_n(t)|}{t}\cdot\frac{|\psi(t)|}{t}\,dt \\
&\le \frac{2}{\delta}\Bigg(\int\limits_{(1+\delta)u_n}^{a} \left|\frac{\psi_n(t)}{t}\right|^2 dt\Bigg)^{1/2}\cdot\Bigg(\int\limits_{(1+\delta)u_n}^{a} \left|\frac{\psi(t)}{t}\right|^2 dt\Bigg)^{1/2} \\
&\le \frac{2}{\delta}\Bigg(\int\limits_{u_n}^{+\infty} \left|\frac{\psi_n(t)}{t}\right|^2 dt\Bigg)^{1/2}\cdot\Bigg(\int\limits_{0}^{a} \left|\frac{\psi(t)}{t}\right|^2 dt\Bigg)^{1/2},
\end{aligned}$$

что, принимая во внимание равномерную по n оценку (17) и включение $(\psi(t)/t) \in L_2(\mathbb{R})$, можно сделать сколь угодно малым для любого фиксированного δ, выбирая значение a достаточно близко к нулю. Теорема доказана.

Следующий результат говорит нам, что у оператора $\mathcal{L}$ при условии $V \ge 0$ не может быть собственного значения в точке нуль.

Теорема 3. *Пусть операторы $A \ge 0$ и $B \ge 0$ действуют в некотором гильбертовом пространстве. Утверждается, что если точка 0 не является собственным значением одного из этих операторов, то она не является собственным значением и их суммы.*

Доказательство. Предположим, что $0 \in \sigma_{\mathrm{p}}(A+B)$. Тогда соответствующая собственная функция v удовлетворяет уравнению

$$Av + Bv = 0. \tag{19}$$

Умножив (19) на вектор v, получим $(Av, v) + (Bv, v) = 0$. В силу неотрицательности операторов A и B будет $(Av, v) = 0$ и $(Bv, v) = 0$, т.е. $A^{1/2}v = 0$ и $B^{1/2}v = 0$, а значит, $0 \in \sigma_{\mathrm{p}}(A)$ и $0 \in \sigma_{\mathrm{p}}(B)$. •

Как уже отмечалось в §2, вне любой окрестности точки нуль структура сингулярного спектра оператора $\mathcal{L} = t^2 \cdot +V$ такая же, как и у оператора $L = t \cdot +V$. А значит, вне любой окрестности точки нуль достаточным условием „тривиальности" $\sigma_{\text{sing}}(\mathcal{L})$ (так же как и $\sigma_{\text{sing}}(L)$) является требование $\omega(t) = O(\sqrt{t})$ при $t \to 0$. Поэтому с учетом предложения 2 при выполнении условий теоремы 1 или 2 сингулярный спектр оператора $\mathcal{L}$ состоит не более чем из конечного числа собственных значений конечной кратности, расположенных на интервале вещественной оси $(0, +\infty)$. При этом отмеченный факт конечной кратности собственных значений является следствием того, что для компактного оператора T_λ количество решений уравнения $T_\lambda g = g$ конечно, а также следствием явного вида собственных функций оператора $\mathcal{L}$, доставляемого приводимой ниже леммой.

Лемма 1. *Для того чтобы $\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(\mathcal{L})$ и функция $v_\lambda(t)$ являлась соответствующей собственной функцией оператора $\mathcal{L}$, определяемого формулами* (1)–(4), *необходимо и достаточно, чтобы $\lambda \in N$, $v_\lambda(t) \in L_2(\mathbb{R})$ и при п.в. $t \in \mathbb{R}$ $v_\lambda(t) = (g, \Phi(t))\,/(t^2 - \lambda)$, где $g \in l_2$, $g \neq 0$, $T_\lambda g = g$.*

Доказательство. Достаточно в лемме 1 из работы [8] произвести замену оператора $L = t \cdot +V$ на оператор $\mathcal{L} = t^2 \cdot +V$. •

Замечание. Легко показать, что множество корней N при выполнении условий (2)–(4) ограничено. Действительно, пусть $\lambda \in N$ и f — соответствующий корневой вектор, $\|f\| = 1$, тогда

$$\mathrm{Re}(M(\lambda)f, f) \equiv 1 + \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{|(f, \Phi(t))|^2}{t^2 - \lambda}\, dt = 0.$$

Однако это равенство не может выполняться при больших значениях $\lambda > 0$, поскольку, полагая $u := \sqrt{\lambda}$, для отрицательной части последнего интеграла легко получить оценку сверху

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{-u}^{u} \frac{|(f,\Phi(t))|^2}{(u-t)(u+t)}\,dt \\
&\quad = \int\limits_{-(u-1)}^{u-1} \frac{|(f,\Phi(t))|^2}{(u-t)(u+t)}\,dt + \left(\int\limits_{-u}^{-(u-1)} + \int\limits_{u-1}^{u}\right)\frac{|(f,\Phi(t))|^2}{(u-t)(u+t)}\,dt \\
&\quad \le \frac{2}{u}\int\limits_{\mathbb{R}} \|\Phi(t)\|^2\,dt + \frac{2}{u}\int\limits_{0}^{1} \frac{\omega^2(t)}{t}\,dt \to 0, \quad u \to +\infty,
\end{aligned}$$

а значит, $\mathrm{Re}\,(M(\lambda)f,f) \ge 1/2$ при больших значениях λ.

§5. О точности условия конечности сингулярного спектра для возмущений бесконечного ранга. Контрпример

Основная теорема, доказываемая в этом параграфе, говорит, что в случае возмущения бесконечного ранга ($\mathrm{rank}\,V = \infty$) граница конечности сингулярного спектра оператора $\mathcal{L}$ действительно проходит через константу C в условии $\omega(t) = C\,t^{1/2}$, $t \to 0$ (см. теорему 1), т.е. результат теоремы 2 не может быть распространен на случай возмущения V бесконечного ранга. Именно, теорема 1 точна в следующем смысле.

Теорема 4. *Для значения* $C = (2/\ln 4)^{1/2}$ *можно построить оператор* V, $\mathrm{rank}\,V = \infty$, *удовлетворяющий условиям* (2)–(4) *с* $\omega(t) = Ct^{1/2}$, *такой, что точка нуль есть точка накопления собственных значений оператора* $\mathcal{L} = t^2 \cdot + V$.

Доказательство. Зададим две монотонные последовательности неотрицательных чисел $\lambda_n \to 0$ и $\epsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$. Пусть $\sum_1^\infty \lambda_n < \infty$, $u_n := \sqrt{\lambda_n}$ и $\epsilon_n < (u_n - u_{n+1})/2$. Построим оператор V, для которого точки λ_n будут собственными значениями. Обозначая через c_n положительные постоянные, собственные функции $\varphi_n(t)$ этого оператора зададим следующим образом:

$$\varphi_n(t) := \begin{cases} 0, & t \in [0;+\infty) \setminus [u_{n+1}; u_n - \epsilon_n], \\ c_n(t - u_{n+1})^{1/2}, & t \in [u_{n+1}; \frac{u_{n+1}+u_n-\epsilon_n}{2}], \\ c_n(u_n - \epsilon_n - t)^{1/2}, & t \in [\frac{u_{n+1}+u_n-\epsilon_n}{2}; u_n - \epsilon_n], \\ \varphi_n(-t), & t < 0. \end{cases}$$

Поскольку носители функций φ_n не пересекаются, эти функции ортогональны. Константы c_n, входящие в определение φ_n, определим из условия нормировки. Пусть $\delta_n := (u_n - \epsilon_n - u_{n+1})/2$, тогда

$$1 = \int_{\mathbb{R}} |\varphi_n(t)|^2\, dt = 4 \int_{u_{n+1}}^{u_{n+1}+\delta_n} c_n^2 (t - u_{n+1})\, dt = 2c_n^2 \cdot \delta_n^2,$$

т.е.

$$c_n^2 = \frac{1}{2\delta_n^2}. \tag{20}$$

В качестве корневых векторов g_n, отвечающих точкам λ_n, возьмем стандартный базис в l_2, т.е. $(g_n)_k = \delta_{nk}$ — символ Кронекера. (Заметим, что так выбранная последовательность g_n некомпактна, в то же время при доказательстве теоремы 2 условие $\operatorname{rank} V < \infty$ использовалось лишь при установлении компактности множества корневых векторов).

Для того чтобы точки λ_n являлись собственными значениями оператора $\mathcal{L}$, согласно лемме 1, достаточно установить, что $\lambda_n \in N$, т.е. выполняются условия (13) и (14), и функция $v_{\lambda_n} := (g_n, \Phi(t))/(t^2 - \lambda_n) \in L_2(\mathbb{R})$. Поскольку $(g_n, \Phi(t)) = \mu_n^{1/2} \cdot \varphi_n(t)$ и функция φ_n по построению финитна и обращается в нуль в окрестности точек $\pm u_n = \pm\sqrt{\lambda_n}$, то условие (13) и требование принадлежности $v_{\lambda_n} \in L_2(\mathbb{R})$ выполнены автоматически. Остается рассмотреть условие (14)

$$g_n + \int_{\mathbb{R}} \frac{(g_n, \Phi(t))\, \Phi(t)}{t^2 - u_n^2}\, dt = 0. \tag{21}$$

Носители функций $\varphi_n(t)$ не пересекаются, поэтому

$$(g_n, \Phi(t))\, \Phi(t) \{\mu_n^{1/2} \varphi_n(t) \mu_i^{1/2} \overline{\varphi_i(t)}\}_{i=1}^{\infty} = \{\mu_n |\varphi_n(t)|^2 \cdot \delta_{ni}\}_{i=1}^{\infty}.$$

Следовательно, равенство (21) в нашем случае эквивалентно скалярному равенству

$$0 = 1 + \int_{\mathbb{R}} \frac{\mu_n \varphi_n^2(t)}{t^2 - u_n^2}\, dt = 1 - 2\mu_n \int_{u_{n+1}}^{u_n - \epsilon_n} \frac{\varphi_n^2(t)}{u_n^2 - t^2}\, dt, \tag{22}$$

которому мы удовлетворим выбором константы $\mu_n > 0$.

Очевидно, что оператор $V = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i^{1/2} (\cdot, \varphi_i) \varphi_i$ неотрицателен. Нужно проверить ядерность V и выяснить гладкость его ядра. Покажем, что константы μ_n убывают достаточно быстро, так что $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n < \infty$, т.е. $V \in \sigma_1$. С этой целью оценим снизу интеграл из выражения (22)

$$\int\limits_{u_{n+1}}^{u_n-\epsilon_n} \frac{\varphi_n^2(t)}{u_n^2 - t^2}\, dt = \left(\int\limits_{u_{n+1}}^{u_{n+1}+\delta_n} + \int\limits_{u_{n+1}+\delta_n}^{u_n-\epsilon_n} \right) \frac{\varphi_n^2(t)}{u_n^2 - t^2}\, dt \equiv I_n^1 + I_n^2.$$

Каждый из интегралов I_n^1 и I_n^2 вычисляется точно.

$$\begin{aligned}
I_n^1 &= \int\limits_{u_{n+1}}^{u_{n+1}+\delta_n} \frac{c_n^2(t - u_{n+1})\, dt}{(u_n - t)(u_n + t)} = c_n^2 \int\limits_{u_{n+1}}^{u_{n+1}+\delta_n} \left(\frac{u_n - u_{n+1}}{u_n^2 - t^2} - \frac{1}{u_n + t} \right) dt \\
&= c_n^2 \frac{u_n - u_{n+1}}{2u_n} \ln \left| \frac{u_n + t}{u_n - t} \right| \Bigg|_{u_{n+1}}^{u_{n+1}+\delta_n} - c_n^2 \ln |u_n + t| \Bigg|_{u_{n+1}}^{u_{n+1}+\delta_n} \\
&= c_n^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{u_{n+1}}{2u_n} \right) \ln \left| \frac{u_n + u_{n+1} + \delta_n}{u_n - u_{n+1} - \delta_n} \cdot \frac{u_n - u_{n+1}}{u_n + u_{n+1}} \right| \\
&\quad - c_n^2 \ln \left| \frac{u_n + u_{n+1} + \delta_n}{u_n + u_{n+1}} \right|.
\end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned}
I_n^2 &= \int\limits_{u_n-\epsilon_n-\delta_n}^{u_n-\epsilon_n} \frac{c_n^2(u_n - \epsilon_n - t)}{(u_n - t)(u_n + t)}\, dt = \int\limits_{u_n-\epsilon_n-\delta_n}^{u_n-\epsilon_n} c_n^2 \left(\frac{1}{u_n + t} - \frac{\epsilon_n}{u_n^2 - t^2} \right) dt \\
&= c_n^2 \left(\ln |u_n + t| \Bigg|_{u_n-\epsilon_n-\delta_n}^{u_n-\epsilon_n} - \frac{\epsilon_n}{2u_n} \ln \left| \frac{u_n + t}{u_n - t} \right| \Bigg|_{u_n-\epsilon_n-\delta_n}^{u_n-\epsilon_n} \right) \\
&= c_n^2 \left(\ln \left| \frac{2u_n - \epsilon_n}{2u_n - \epsilon_n - \delta_n} \right| - \frac{\epsilon_n}{2u_n} \ln \left| \frac{2u_n - \epsilon_n}{\epsilon_n} \cdot \frac{\epsilon_n + \delta_n}{2u_n - \epsilon_n - \delta_n} \right| \right).
\end{aligned}$$

Если последовательности u_n и ϵ_n выбраны таким образом, что при $n \to \infty$ имеем $(u_{n+1}/u_n) \to 0$ и $(\epsilon_n/u_n) \to 0$, то $(\delta_n/u_n) \to 1/2$, а значит,

$$I_n^1/c_n^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+1/2}{1-1/2}\right| - \ln|1+1/2| = \frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}$$

и также

$$I_n^2/c_n^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} \ln\frac{2}{2-1/2} = \ln\frac{4}{3}.$$

Таким образом, переходя при необходимости от первоначально заданных последовательностей u_n и ϵ_n к их некоторым подпоследовательностям, можно считать, что для всякого фиксированного $\epsilon > 0$ при всех значениях $n = 1, 2, \ldots$ выполняются неравенства $I_n^1 + I_n^2 \geq c_n^2(\frac{3}{2}\ln\frac{4}{3} - \epsilon/2)$. Поэтому, согласно (22), можно написать, что $1 \geq \mu_n c_n^2(3\ln\frac{4}{3} - \epsilon)$ или

$$\mu_n c_n^2 \leq \left(3\ln\frac{4}{3} - \epsilon\right)^{-1}. \tag{23}$$

Отсюда, принимая во внимание равенство (20), получаем, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \leq \mathrm{const}\sum \frac{1}{c_n^2} \leq \mathrm{const}\sum \delta_n^2 \leq \mathrm{const}\sum \lambda_n < \infty,$$

что и доказывает ядерность оператора V.

Для проверки гладкости достаточно установить неравенство (6). Рассмотрев возможные случаи взаиморасположения на вещественной оси точек t и $t+h$, убеждаемся, что $|\varphi_n(t+h) - \varphi_n(t)| \leq c_n \cdot |h|^{1/2}$. Далее, нетрудно видеть, что

$$\|\Phi(t+h) - \Phi(t)\|_{l_2}^2 = \sum_n \mu_n|\varphi_n(t+h) - \varphi_n(t)|^2 \leq \sup_n\{\mu_n c_n^2\} \cdot |h|.$$

Последнее неравенство верно, поскольку носители функций φ_n не пересекаются, и поэтому сумма $\sum\limits_n \mu_n \cdot |\varphi_n(t+h) - \varphi_n(t)|^2$ при каждом t либо нуль, либо состоит не более чем из двух слагаемых. При этом если она состоит в точности из двух слагаемых, то, например, если $t, h > 0$, она имеет вид $\mu_m|\varphi_m(t)|^2 + \mu_k|\varphi_k(t+h)|^2$, где $m > k$, что оценивается величиной $\mu_m c_m^2(u_m - t) + \mu_k c_k^2(t + h - u_{k+1})$ и что в свою очередь не превосходит

$\mu_m c_m^2(u_{k+1}-t)+\mu_k c_k^2(t+h-u_{k+1})\le \max\{\mu_m c_m^2,\mu_k c_k^2\}\cdot h$. Окончательно в соответствии с оценкой (23) имеем

$$\|\Phi(t+h)-\Phi(t)\|_{l_2}\le \left(3\ln\frac{4}{3}-\epsilon\right)^{-1/2}\cdot|h|^{1/2}.$$

Для завершения доказательства остается заметить, что $\epsilon>0$ произвольно мало и $1/(3\ln\frac{4}{3})<2/\ln 4$.

§6. Возмущения конечного ранга. Контрпример

Теорема 2, содержащая условие конечности сингулярного спектра $\omega(t)=O(\sqrt{t})$, $t\to 0$, на модуль непрерывности ядра оператора возмущения V, имеющего конечный ранг, точна в классе функций $\omega(t)$, удовлетворяющих дополнительному ограничению $\omega(t_1+t_2)\le\omega(t_1)+\omega(t_2)$. Заметим, что для любой функции $\varphi(t)$ настоящий модуль непрерывности $\widetilde{\omega}(h):=\sup_t|\varphi(t+h)-\varphi(t)|$ всегда удовлетворяет этому условию.

Теорема 5. *Пусть функция $\omega(t)$ удовлетворяет условию (3) и естественному дополнительному ограничению полуаддитивности $\omega(t_1+t_2)\le\omega(t_1)+\omega(t_2)$, причем $\overline{\lim}_{t\to+0}\omega(t)/\sqrt{t}=+\infty$. Тогда существует финитная функция φ, удовлетворяющая неравенству $|\varphi(t+h)-\varphi(t)|\le\omega(|h|)$, такая, что у оператора $\mathcal{L}=t^2\cdot+(\cdot,\varphi)\varphi$ точка нуль есть точка накопления собственных значений.*

Доказательство этой теоремы будет получено в результате комбинации нескольких лемм и теоремы 6 о разрешимости некоторого линейного уравнения в пространстве l_∞.

Лемма 2. *Пусть функция $\varphi\in L_2(\mathbb{R})$. Для того чтобы $\lambda>0$ являлось собственным значением оператора $\mathcal{L}=t^2\cdot+(\cdot,\varphi)\varphi$, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

$$1+\int_{\mathbb{R}}\frac{|\varphi^2(t)|}{t^2-\lambda}\,dt=0, \tag{24}$$

$$\frac{\varphi(t)}{t^2-\lambda}\in L_2(\mathbb{R}), \tag{25}$$

при этом соответствующее собственное подпространство одномерно и имеет вид $\mathrm{const}\cdot\varphi(t)/(t^2-\lambda)$.

Доказательство. Эта лемма является частным случаем леммы 1 применительно к случаю оператора $V=(\cdot,\varphi)\varphi$ и соответственно $\Phi(t)=\varphi(t)$. Однако ее простое доказательство можно получить и непосредственно, разрешив уравнение на собственные значения $\mathcal{L}v=\lambda v$ относительно собственной функции v. Из этого уравнения с необходимостью следует, что $v(t)=C\cdot\varphi(t)/(t^2-\lambda)$. При этом данное выражение действительно будет собственной функцией, если оно из пространства $L_2(\mathbb{R})$ и удовлетворяет уравнению $\mathcal{L}v-\lambda v=0$, т.е.

$$(t^2-\lambda)\frac{C\varphi(t)}{t^2-\lambda}+\varphi(t)\int_{\mathbb{R}}\frac{C|\varphi^2(\tau)|}{\tau^2-\lambda}\,d\tau=0,$$

$$\left(1+\int_{\mathbb{R}}\frac{|\varphi^2(\tau)|}{\tau^2-\lambda}\,d\tau\right)\cdot\varphi(t)=0,$$

что и доказывает высказанное утверждение. •

Пусть $\{u_n\}_1^\infty$ — последовательность вещественных чисел, монотонно убывающая к нулю и удовлетворяющая условию $u_{n+1}<u_n/4$. На вещественной оси следующим образом определим последовательность функций $\varphi_n(t)$:

$$\varphi_n(t):=\begin{cases}\omega(|t-u_n|), & t\in[\frac{3}{4}u_n;u_n],\\ \omega(|t-u_n/2|), & t\in[u_n/2;\frac{3}{4}u_n],\\ 0, & t\notin[u_n/2;u_n].\end{cases}\tag{26}$$

Покажем, что можно так подобрать последовательность u_n и ограниченную последовательность неотрицательных чисел $\{c^n\}_1^\infty$, что точки $\lambda_n=\left(\frac{9}{8}u_n\right)^2$ будут являться собственными значениями оператора $\mathcal{L}=t^2\cdot+(\cdot,\varphi)\varphi$ с функцией $\varphi(t):=\sum_{n=1}^{+\infty}(c^n)^{1/2}\varphi_n(t)$.

Опираясь на свойство полуаддитивности функции $\omega(t)$, нетрудно показать, что $|\varphi_n(t+h)-\varphi_n(t)|\le\omega(|h|)$. Поскольку, кроме того, носители функций $\varphi_n(t)\ge 0$ не пересекаются, то получаем, что

$$|\varphi(t+h)-\varphi(t)|\le\sup_n(c^n)^{1/2}\cdot\omega(|h|).$$

По построению функция $\varphi(t)$ финитна, ограничена и обращается в нуль около точки λ_n, следовательно, условие (24) выполнено при любых $n = 1, 2\ldots$ Подставляя для каждого λ_n выражение для функции $\varphi(t)$ в равенство (24), получаем систему уравнений для неизвестных c^n:

$$\sum_{k=1}^{n-1}(-d_{nk}\, c^k) + d_{nn}\, c^n + \sum_{k=n+1}^{+\infty}(d_{nk}\, c^k) = 1, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{27}$$

коэффициенты которой $d_{nk} := \int\limits_{u_k/2}^{u_k} \frac{\varphi_k^2(t)}{|t^2 - \lambda_n|}\, dt$.

Лемма 3. *Для коэффициентов d_{nk} системы уравнений (27) с некоторой константой $\alpha \geq 1$ справедливы следующие оценки:*

$$d_{nn} \geq \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\omega^2(u_n/4)}{u_n/4}, \tag{28}$$

$$d_{nk} \leq \frac{\omega^2(u_k/4)}{u_k/4}, \quad k = 1, \ldots, n-1, \tag{29}$$

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} d_{nk} \leq \omega^2(u_{n+1})/u_n. \tag{30}$$

Доказательство. Элементарные оценки с очевидной заменой переменных $u_n - t =: \tau$ показывают, что это так. Действительно,

$$\begin{aligned} d_{nn} &\geq \int\limits_{\frac{3}{4}u_n}^{u_n} \frac{\omega^2(u_n - t)\, dt}{\left(\frac{9}{8}u_n - t\right)\left(\frac{9}{8}u_n + t\right)} \\ &\geq \frac{1}{\frac{9}{8}u_n + u_n} \int\limits_0^{u_n/4} \frac{\omega^2(\tau)}{\tau + u_n/8}\, d\tau \geq \frac{8}{17u_n} \int\limits_{u_n/8}^{u_n/4} \frac{\omega^2(\tau)}{2\tau}\, d\tau \\ &\geq \frac{4}{17u_n}\omega^2(u_n/8) \cdot \ln 2 = \frac{\ln 2}{17} \cdot \frac{\omega^2(u_n/8)}{u_n/4}. \end{aligned}$$

И для завершения доказательства неравенства (28) остается учесть, что функция $\omega(t)$ полуаддитивна и, значит, $\omega^2(u_n/4) \leq (2\omega(u_n/8))^2$.

Далее, по условию $u_n \le u_k/4$, $k = 1, \ldots, n-1$, так что

$$
\begin{aligned}
d_{nk} &= \int\limits_{u_k/2}^{3u_k/4} \frac{\omega^2(t - u_k/2)}{(t - \frac{9}{8}u_n)(t + \frac{9}{8}u_n)}\,dt + \int\limits_{3u_k/4}^{u_k} \frac{\omega^2(u_k - t)}{(t - \frac{9}{8}u_n)(t + \frac{9}{8}u_n)}\,dt \\
&\le \frac{\omega^2(u_k/4)}{u_k/2} \int\limits_{u_k/2}^{3u_k/4} \frac{dt}{t - \frac{9}{8}\frac{u_k}{4}} + \frac{\omega^2(u_k/4)}{3u_k/4} \int\limits_{3u_k/4}^{u_k} \frac{dt}{t - \frac{9}{8}\frac{u_k}{4}} \\
&\le \frac{\omega^2(u_k/4)}{u_k/4}.
\end{aligned}
$$

Аналогично проверяется и неравенство (30)

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=n+1}^{+\infty} d_{nk} &\le 2 \sum_{k=n+1}^{+\infty} \int\limits_{3u_k/4}^{u_k} \frac{\omega^2(u_k - t)\,dt}{(\frac{9}{8}u_n - t)(\frac{9}{8}u_n + t)} \\
&\le \frac{2}{9u_n/8} \cdot \int\limits_{0}^{u_{n+1}} \frac{\omega^2(u_{n+1} - t)}{(\frac{9}{8}u_n - t)}\,dt \le \frac{2}{9u_n/8} \cdot \frac{\omega^2(u_{n+1}) \cdot u_{n+1}}{(\frac{9}{8}u_n - u_{n+1})} \\
&\le \frac{\omega^2(u_{n+1})}{u_n} \cdot \frac{16}{9} \cdot \frac{u_n/4}{\frac{9}{8}u_n - u_n/4} \le \frac{\omega^2(u_{n+1})}{u_n}.
\end{aligned}
$$

Лемма 3 доказана.

Будем считать, что последовательность u_n выбрана из условия, что $\omega^2(u_n/4)/(u_n/4) \to +\infty$ строго монотонно при $n \to \infty$. Переходя при необходимости от последовательности u_n к некоторой ее подпоследовательности (для которой мы сохраним прежнее обозначение), потребуем удовлетворения при всех $n = 1, 2, \ldots$ следующих неравенств:

$$\omega^2(u_{n+1})/u_n \le 1/2, \tag{31}$$

$$\frac{\omega^2(u_n/4)}{u_n/4} \ge (2\alpha)^n. \tag{32}$$

Лемма 4. *Для коэффициентов d_{nk} системы уравнений* (27) *при всех $n = 1, 2, \dots$ выполняются следующие соотношения:*

$$\frac{d_{nk}}{d_{kk}} \le \alpha, \quad k = 1, \dots, n-1, \tag{33}$$

$$\frac{(2\alpha)^{n-1}}{d_{nn}} \le 1/2, \tag{34}$$

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} d_{nk} \le 1/2. \tag{35}$$

Доказательство. Соотношение (33) следует из неравенств (28) и (29), (35) является следствием (30) и (31), а (34) получается из (28) и (32).

Теперь, после того как лемма доказана, справедливость теоремы 5 немедленно следует из приводимой ниже теоремы 6 о разрешимости системы линейных уравнений специального вида.

Теорема 6. *Если выполнены условия* (33)–(35), *то решение системы уравнений* (27) $c = (c^1, c^2, \dots)$ *существует и единственно, все его компоненты c^n, $n \in \mathbb{N}$, неотрицательны и справедливо неравенство $\sup c^n \le 1/2$. Это решение может быть получено методом итераций.*

Замечание. Нетрудно видеть, что неравенства (28)–(30) позволяют так выбрать последовательность u_n, что коэффициенты d_{nk} системы уравнений (27) будут образовывать бесконечную матрицу с диагональным преобладанием, т.е. при всех $n = 1, 2, \dots$ справедливо соотношение $d_{nn} > (1-\epsilon) \sum\limits_{k:\, k \ne n} d_{nk}$, $\epsilon \in (0; 1)$. Как хорошо известно (см., например, [8, лемма 6, §2]), такая система уравнений разрешима единственным образом в банаховом пространстве ограниченных последовательностей l_∞. Однако при этом нам не гарантируется неотрицательность получаемых неизвестных c^n, $n = 1, 2, \dots$

Доказательство теоремы 6 будет разбито на несколько лемм.

Систему уравнений (27)

$$\begin{cases} d_{11}c^1 = \sum\limits_{k=2}^{+\infty}(-d_{1k}c^k) + 1, \\ \sum\limits_{k=1}^{n-1}(-d_{nk}c^k) + d_{nn}c^n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} -d_{nk}c^k + 1, \quad n = 2, 3, \dots \end{cases} \tag{36}$$

запишем в матричном виде в пространстве l_∞

$$A\,c = B\,c + f, \tag{37}$$

в котором вектора-столбцы $c = (c^1, c^2, \dots)^T$ и $f = (1, 1, \dots)^T$, а бесконечные матрицы A и B имеют матричные элементы

$$A_{nk} = \begin{cases} -d_{nk}, & k < n, \\ d_{nn}, & k = n, \\ 0, & k > n, \end{cases} \qquad B_{nk} = \begin{cases} 0, & k \le n, \\ -d_{nk}, & k > n. \end{cases}$$

Рассмотрим в l_∞ уравнение $Ay = x$, $x, y \in l_\infty$.

Лемма 5. *Пусть* $y = (y^1, \dots, y^n, \dots)^T$ *и* $Ay = x$, *тогда утверждается, что для любого* $n = 1, 2, \dots$

$$|y^n| \le \|x\|_\infty \cdot \frac{(2\alpha)^{n-1}}{d_{nn}}. \tag{38}$$

Доказательство проведем по индукции. При $n = 1$ имеем $d_{11}y^1 = x^1$. Далее, предполагая справедливость неравенства (38) при всех $n \le m-1$, покажем, что оно верно и при $n = m$. Из уравнения $Ay = x$ имеем, что

$$\sum_{k=1}^{m-1} -d_{mk}\, y^k + d_{mm}\, y^m = x^m.$$

Откуда

$$|y^m| \le \frac{\|x\|_\infty}{d_{mm}} + \frac{1}{d_{mm}} \sum_{k=1}^{m-1} d_{mk}\, |y^k|.$$

Теперь используем индуктивное предположение и неравенство (33)

$$\begin{aligned} |y^m| &\leqslant \frac{\|x\|_\infty}{d_{mm}} \Big(1 + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{d_{mk}}{d_{kk}} (2\alpha)^{k-1}\Big) \\ &\leqslant \frac{\|x\|_\infty}{d_{mm}} \alpha^{m-1} \Big(1 + \sum_{k=1}^{m-1} 2^{k-1}\Big) = \frac{\|x\|_\infty}{d_{mm}} (2\alpha)^{m-1}. \end{aligned}$$

Следствие. $\|A^{-1}\|_\infty \le 1/2$.

Доказательство. Согласно (38) $\|A^{-1}\| \le \sup_n\{(2\alpha)^{n-1}/d_{nn}\}$, что по неравенству (34) не превосходит 1/2.

Перепишем уравнение (37) в виде

$$c = A^{-1}Bc + A^{-1}f. \tag{39}$$

Норма $\|A^{-1}B\| \le \|A^{-1}\| \cdot \|B\| \le \frac{1}{2} \cdot \sup\limits_n \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} d_{nk} \le 1/4$ в соответствии с неравенством (35). Поэтому решение уравнения (39), как хорошо известно, существует и единственно и, что важно для дальнейшего, может быть получено методом итераций: $c = \lim\limits_{s\to\infty} c_s$, где $c_1 := 0, c_{s+1} := A^{-1}Bc_s + A^{-1}f$, $s = 1,2,\dots$ Или же, возвращаясь к прежней записи уравнения (37),

$$\begin{aligned} Ac_{s+1} &= Bc_s + f, \quad s = 1,2,\dots, \\ c_1 &= 0. \quad \bullet \end{aligned} \tag{40}$$

Лемма 6. *При всех $s = 1,2,\dots$ компоненты вектора $c_s = (c_s^1, c_s^2, \dots)$ неотрицательны и для них выполняется неравенство*

$$c_s^n \le \frac{(2\alpha)^{n-1}}{d_{nn}}, \quad n = 1,2,\dots \tag{41}$$

Доказательство леммы проведем по индукции по s и по n. Поскольку $c_1 = (0,0,\dots)$, то для $s = 1$ утверждение леммы справедливо при всех $n = 1,2,\dots$ Предположим, что $0 \le c_l^n \le (2\alpha)^{n-1}/d_{nn}$ при $l \le s-1$ и всех $n = 1,2,\dots$, тогда из (40) с учетом (36) следует, что

$$c_s^n = \frac{1}{d_{nn}} + \frac{1}{d_{nn}} \sum_{k=1}^{n-1} d_{nk}\, c_s^k - \frac{1}{d_{nn}} \sum_{k=n+1}^{\infty} d_{nk}\, c_{s-1}^k, \tag{42}$$

и, так как по нашему предположению $c_{s-1}^k \ge 0$, получаем неравенство

$$c_s^n \le \frac{1}{d_{nn}} + \frac{1}{d_{nn}} \sum_{k=1}^{n-1} d_{nk}\, c_s^k.$$

Далее проводим доказательство индукцией по n. Если $n = 1$, то, как видно из предыдущего, $c_s^1 \leq 1/d_{11}$, так что оценка (41) в данном случае имеет место. Теперь предполагаем, что $c_s^k \leq (2\alpha)^{k-1}/d_{kk}$ при $k \leq n-1$. Тогда

$$\begin{aligned} c_s^n &\leq \frac{1}{d_{nn}} + \frac{1}{d_{nn}} \sum_{k=1}^{n-1} d_{nk} c_s^k \leq \frac{1}{d_{nn}} + \frac{1}{d_{nn}} \sum_{k<n} \frac{d_{nk}}{d_{kk}} (2\alpha)^{k-1} \\ &\leq \frac{1}{d_{nn}} \left(1 + \sum_{k<n} \alpha \cdot (2\alpha)^{k-1}\right) \\ &\leq \frac{(2\alpha)^{n-1}}{d_{nn}} \end{aligned}$$

и, значит, неравенство (41) доказано.

Перейдем к доказательству неотрицательности c_s^n при всех $n = 1, 2, \ldots$ С этой целью покажем, что величины

$$g_s^n := \frac{1}{d_{nn}} - \frac{1}{d_{nn}} \sum_{k=n+1}^{\infty} d_{nk} c_{s-1}^k$$

положительны при всех $n = 1, 2, \ldots$ Действительно, так как, согласно индуктивному предположению, неравенство (41) справедливо при $l \leq s-1$, мы получаем, что

$$\begin{aligned} g_s^n &\geq \frac{1}{d_{nn}} - \frac{1}{d_{nn}} \sum_{k=n+1}^{\infty} d_{nk} \frac{(2\alpha)^{k-1}}{d_{kk}} \\ &\geq \frac{1}{d_{nn}} - \frac{1}{d_{nn}} \cdot \sup_{k>1} \frac{(2\alpha)^{k-1}}{d_{kk}} \cdot \sum_{k=n+1}^{\infty} d_{nk}. \end{aligned}$$

Вместе с (34) и (35) это приводит к оценке

$$g_s^n \geq \frac{1}{d_{nn}} - \frac{1}{d_{nn}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \frac{1}{d_{nn}} > 0.$$

Если теперь $n = 1$, то из (42) видно, что

$$c_s^1 = \frac{1}{d_{11}} - \frac{1}{d_{11}} \sum_{k>1} d_{1k} c_{s-1}^k \equiv g_s^1 > 0.$$

Предполагая, что $c_s^k \geq 0$ при всех $k \leq n-1$, вновь из (42) получаем, что

$$c_s^n \geq \frac{1}{d_{nn}} - \frac{1}{d_{nn}} \sum_{k>1} d_{nk} c_{s-1}^k \equiv g_s^n > 0.$$

Лемма доказана.

Разумеется, утверждение леммы остается верным и для $c = \lim_{s\to\infty} c_s$. Таким образом, мы показали, что решение системы уравнений (36) неотрицательно. К тому же из неравенства (41) следует, что

$$\|c\|_\infty \leq \sup_n \{(2\alpha)^{n-1}/d_{nn}\} \leq 1/2$$

согласно (34). Поэтому

$$|\varphi(t+h) - \varphi(t)| \leq \sup_n (c^n)^{1/2} \cdot \omega(|h|) < \omega(|h|).$$

Тем самым доказательство теоремы 6 завершено.

Список литературы

[1] Фаддеев Л. Д., *О модели Фридрихса в теории возмущений непрерывного спектра*, Тр. Мат. ин-та АН СССР **73** (1964), 292–313.

[2] Павлов Б. С., Петрас С. В., *О сингулярном спектре слабо возмущенного оператора умножения*, Функц. анал. и его прил. **4** (1970), № 2, 54–61.

[3] Naboko S. N., *Uniqueness theorems for operator-valued functions with positive imaginary part, and the singular spectrum in the selfadjoint Friedrichs model*, Ark. Mat. **25** (1987), no. 1, 115–140.

[4] Микитюк Я. В., *О сингулярном спектре самосопряжённых операторов*, Докл. АН СССР **303** (1988), № 1, 33–36.

[5] Яковлев С. И., *О возмущениях сингулярного спектра в самосопряженной модели Фридрихса*, Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат. мех. астроном. **1990**, вып. 1, 116–117.

[6] Яковлев С. И., *О структуре сингулярного спектра в самосопряженной модели Фридрихса*, Л., 1991 (рукопись деп. в ВИНИТИ № 2050-В от 17.05.91).

[7] Набоко С. Н., Яковлев С. И., *Об условиях конечности сингулярного спектра в самосопряженной модели Фридрихса*, Функц. анал. и его прил. **24** (1990), № 4, 88–89.

[8] Дынькин Е. М., Набоко С. Н., Яковлев С. И., *Граница конечности сингулярного спектра в самосопряженной модели Фридрихса*, Алгебра и анализ **3** (1991), № 2, 77–90.

[9] Рид М., Саймон Б., *Методы современной математической физики.* Т. 4. *Анализ операторов*, Мир, М., 1982.

[10] Набоко С. Н., Яковлев С. И., *О точечном спектре дискретного оператора Шрёдингера*, Функц. анал. и его прил. **26** (1992), № 2, 85–88.

[11] Набоко С. Н., Яковлев С. И., *Дискретный оператор Шрёдингера. Точечный спектр, лежащий на непрерывном*, Алгебра и анализ 4 (1992), № 3, 183–195.

[12] Привалов И. И., *Граничные свойства аналитических функций*, ГИТТЛ, М., 1950.

[13] Яковлев С. И., *Спектральный анализ самосопряженных операторов модели Фридрихса (сингулярный спектр)*, Дис. на соиск. учен. степени канд. физ.-мат. наук, СПб, 1991.

С.-Петербургский университет
аэрокосмического приборостроения
190000, Санкт-Петербург
ул. Большая Морская, 67
E-mail: yakovlev@amath.usr.saai.ru

Поступило 11 июля 1997 г.