О. В. Васильев, Н. В. Надежкина, Об одном классе обратных задач оптимального управления, *Изв. вузов. Матем.*, 1996, номер 3, 14–20

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1996 МАТЕМАТИКА № 3 (406)

УДК 517.977

О.В. ВАСИЛЬЕВ, Н.В. НАДЕЖКИНА

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ [1)]

Рассматривается задача выбора таких функциональных параметров в управляемой динамической системе, при которых заданный допустимый процесс является оптимальным. Предлагается алгоритм решения этой задачи.

§ 1. Постановка задачи

Пусть управляемый процесс

$$(y, u; x) = \{y=y(t),\ y(t)\in E^m,\ u=u(t),\ u(t)\in E^r,\ x=x(t),\ x(t)\in E^n,\ t\in T=[t_0, t_1]\}$$

описывается задачей Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(y, x, u, t), \quad x(t_0) = x^0. \tag{1.1}$$

Здесь $x=x(t, y, u)$ – состояние процесса, т.е. решение задачи Коши (1.1), зависящее от выбранных функций $y=y(t)$, $u=u(t)$, $u=u(t)$ – внутреннее (эндогенное) управление, $y=y(t)$ – внешние (экзогенные) функции или функциональные параметры системы.

Под классом допустимых управлений и функциональных параметров будем понимать измеримые функции, стесненные прямыми ограничениями

$$u(t)\in U, \quad y(t)\in Y, \tag{1.2}$$

где $U\subset E^r$, $Y\subset E^m$ – компактные множества.

Качество допустимого процесса определяется функционалом

$$J(y, u) = \varphi(x(t_1)) + \int_T F(y, x, u, t)dt. \tag{1.3}$$

Здесь вектор-функция f и скалярные функции φ, F непрерывны по совокупности своих переменных вместе с частными производными по x, вектор-функция f удовлетворяет неравенству Липшица с одной максимальной константой для любых $y\in Y$, $u\in U$, $t\in T$:

$$\|f(y, x+\Delta x, u, t)-f(y, x, u, t)\| \leq L\|\Delta x\|.$$

Предположим, что задано некоторое допустимое управление $u^*=u^*(t)$, которое желательно нам по каким-то соображениям. Требуется найти такие функциональные параметры $y^*=y^*(t)$ из своего класса допустимых, т.е. так настроить систему (1.1), чтобы заданное управление $u^*=u^*(t)$ в задаче (1.1)-(1.3) было оптимальным:

$$y^*\in Y: J(y^*, u^*) = \min_{u\in U} J(y^*, u). \tag{1.4}$$

Задача (1.4) является одним из вариантов обратных задач оптимизации [1] в функциональных пространствах.

[1)] Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 94-01-01559.

§ 2. Первая вспомогательная задача

Предположим, что для любой допустимой функции $y=y(t)$, $t \in T$, мы всегда можем найти наименьшее значение нашего функционала по допустимым управлениям:

$$\overline{u} = \overline{u}(t, y) : J(y, \overline{u}(y)) = \min_{u \in U} J(y, u). \tag{2.1}$$

Задача (2.1) является широко известной основной задачей оптимального управления, для которой разработаны достаточно надежные итерационные процессы принципа максимума (см., напр., [2], [3]). В общем случае с помощью этих методов ищется сильный локальный минимум, но если задача (2.1) линейно выпуклая, то последовательность управлений $\{u^k\}$, генерируемая этими методами, является минимизирующей в глобальном смысле. Напомним, что линейно выпуклый вариант задачи (2.1) имеет структуру

$$\dot{x} = A(y, t)x+f^{(1)}(y, u, t), \quad x(t_0) = x^0, \tag{2.2}$$

$$J(y, u) = \varphi(x(t_1)) + \int_T [F_1(y, x, t)+F_2(y, u, t)]dt, \tag{2.3}$$

где $\varphi(x)$ выпукла по x, $F_1(y, x, t)$ выпукла по x для всех $y \in Y$, $t \in T$.

Отметим, что система вида (2.2) представляет собой наиболее типичный пример технической проблемы настройки коэффициентов матрицы $A(y, t)$ под заданный оптимальный режим. Причем в этой ситуации довольно часто функциональные коэффициенты $y=y(t)$ должны быть гладкими функциями, ограниченными по амплитуде. Этот вариант будет также исследован в статье.

§ 3. Алгоритм решения обратной задачи

Учитывая возможность решения первой вспомогательной задачи, построим неотрицательный функционал

$$\Phi(y) = J(y, u^*)-J(y, \overline{u}(y)) \geq 0, \quad y \in Y, \tag{3.1}$$

который непрерывен по y (см., напр., [4], с.143).

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.1. *Если при каком-то* $y^* \in Y$ $\Phi(y^*)=0$, *то* y^* *– решение обратной задачи* (1.4), *и наоборот.*

Результат утверждения следует из определения обратной задачи (1.4), вида функционала (3.1) и первой вспомогательной задачи (2.1).

СЛЕДСТВИЕ 3.1.

$$y^* \in Y_* = \{y \in Y : \Phi(y) = \min_{z \in Y} \Phi(z)=0\}. \tag{3.2}$$

Заметим, что решение задачи (3.2) затруднено отсутствием гладкости функционала $\Phi(y)$ по y, хотя для ее решения существуют определенные подходы [4]. Мы организуем вычислительный процесс решения задачи (3.2), в котором используются только аналитические свойства функционала $J(y, u)$ по y и u.

Для произвольного $y \in Y$ решим задачу (2.1), зафиксируем $\overline{u}(y) \in U$ и построим функционал

$$\Phi_y(z) = J(z, u^*)-J(z, \overline{u}(y)), \quad z \in Y. \tag{3.3}$$

Этот функционал имеет те же аналитические свойства по z, что и функционал $J(y, u)$ по y при фиксированном u. Кроме того, очевидно, что

$$\Phi_y(y) = \Phi(y). \tag{3.4}$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.2. *Для каждого* $y \in Y$ *выполняется*

$$\Phi_y(z) \le \Phi(z), \quad z \in Y. \tag{3.5}$$

Действительно,

$$\Phi_y(z) = J(z, u^*) - J(z, \overline{u}(y)) \le J(z, u^*) - \min_{u \in U} J(z, u) = \Phi(z), \quad z \in Y.$$

Теперь для каждого $y \in Y$ определим множество "нулей" функционала $\Phi_y(z)$:

$$\overline{Z}(y) = \{\overline{z} \in Y : \Phi_y(\overline{z}) = 0\}.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.3. *Если* $Y_* \ne \varnothing$ *и* $\overline{Z}(y) \ne \varnothing$ *для каждого* $y \in Y$, *то* $Y_* \subset \overline{Z}(y)$, $y \in Y$.

При сформулированных предположениях о существовании решения обратной задачи и существовании нулей функции $\Phi_y(z)$ для каждого $y \in Y$ результат утверждения следует из непрерывности функционалов $\Phi(z)$, $\Phi_y(z)$ и утверждения 3.2.

АЛГОРИТМ.

ШАГ 0. $y^0(t) \in Y$, $k=0$. Решаем первую вспомогательную задачу (2.1) известными итерационными методами [2], [3]. Находим $\overline{u}^k(t) = \overline{u}(t, y^k)$.

ШАГ 1. Вычисляем значение функционала $\Phi(y^k)$ по формуле (3.1). Если $\Phi(y^k) > 0$, то переход на шаг 2, если $\Phi(y^k) = 0$, то переход на шаг 4.

ШАГ 2. Формируем аппроксимирующий функционал $\Phi_{y^k}(y) = \Phi_k(y)$ по формуле (3.3), где $\Phi_k(y^k) = \Phi(y^k) > 0$. Осуществляем спуск по функционалу до его нулевого значения

$$y^{k+1} : \Phi_k(y^{k+1}) = 0. \tag{3.6}$$

Процедура спуска представляет собой вторую вспомогательную задачу, решение которой будет описано ниже.

ШАГ 3. $y^{k+1} = y^k$, $k = k+1$, переход на шаг 0.

ШАГ 4. $y^*(t) = y^k$, стоп.

Слабая сходимость алгоритма заключена в утверждении 3.3. Действительно, если существует решение обратной задачи и для каждого $k=0,1,2,\ldots$ существует решение второй вспомогательной задачи (3.3), то $\{y^k\} \subset \overline{Z}(y)$. Отсюда при выборе таких решений задачи (3.6), которые не ведут к зацикливанию процесса, $\Phi(y^k) \to 0$, $k \to \infty$.

Теперь осталось построить метод решения второй вспомогательной задачи (3.6). Прежде всего заметим, что для каждого $k=0,1,2,\ldots$ это задача минимизации по $y(t) \in Y$ функционала

$$\Phi_k(y) = J(y, u^*) - J(y, \overline{u}(y^k))$$

в системе (1.1). Причем итерационный процесс минимизации начинается с $y = y^k$, $\Phi_k(y^k) > 0$, и обрывается, как только значение функционала $\Phi_k(y)$ достигает нуля.

Используя стандартную методику вывода формулы приращения [2], получим эту формулу для функционала $\Phi_k(y)$. Предварительно введем следующие обозначения. Пусть заданы произвольные допустимые функции $y(t) \in Y$ и $\widetilde{y}(t) = y(t) + \Delta y(t) \in Y$ и пусть

$$x^* = x(t, y, u^*), \quad \widetilde{x}^* = x^* + \Delta x^* = x(t, \widetilde{y}, u^*),$$

$$x^k = x(t, y, \overline{u}^k), \quad \widetilde{x}^k = x^k + \Delta x^k = x(t, \widetilde{y}, \overline{u}^k)$$

– решения задач Коши (1.1) при (y, u^*), $(\tilde{y}, u^*)$, $(y, \overline{u}^k)$, $(\tilde{y}, \overline{u}^k)$, $\overline{u}^k = \overline{u}(t, y^k)$. Тогда формула приращения примет вид

$$\Delta\Phi_k(y) = \Phi_k(\tilde{y}) - \Phi_k(y) = -\int_T \Delta_{\tilde{y}} H(\psi^*, y, x^*, u^*, t)dt +$$

$$+ \int_T \Delta_{\tilde{y}} H(\psi^k, y, x^k, \overline{u}^k)dt + o_\varphi(\|\Delta x^*(t_1)\|) - o_\varphi(\|\Delta x^k(t_1)\|) - \int_T o_H(\|\Delta x^*(t)\|)dt +$$

$$+ \int_T o_H(\|\Delta x^k(t)\|)dt - \int_T \left\langle \Delta_{\tilde{y}} \frac{\partial H(\psi^*, y, x^*, u^*, t)}{\partial x}, \Delta x^*(t) \right\rangle dt +$$

$$+ \int_T \left\langle \Delta_{\tilde{y}} \frac{\partial H(\psi^k, y, x^k, \overline{u}^k, t)}{\partial x}, \Delta x^k(t) \right\rangle dt, \tag{3.7}$$

где

$$H(\psi, y, x, u, t) = \langle \psi(t), f(y, x, u, t) \rangle - F(y, x, u, t),$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$, $\|\cdot\|$ – скалярное произведение и норма в E^n; o_φ, o_H – остатки от разложений приращений $\Delta_{\tilde{x}} H$, $\Delta\varphi$ в ряд Тейлора до первого слагаемого: $o(\alpha)/\alpha \to 0$, $\alpha \to 0$; $\Delta_{\tilde{x}}$, $\Delta_{\tilde{y}}$ – частные приращения по x, y; $\psi^* = \psi^*(t)$, $\psi^k = \psi^k(t)$ – решения сопряженной задачи

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial H(\psi, y, x, u, t)}{\partial x}, \quad \psi(t_1) = -\frac{\partial \varphi(x(t_1))}{\partial x} \tag{3.8}$$

при (x^*, u^*), $(x^k, \overline{u}^k)$ соответственно. Кроме того, при сделанных предположениях на параметры задачи справедливы оценки

$$\|\Delta x^*(t)\| \leqslant K \int_T \|\Delta_{\tilde{y}} f(y, x^*, u^* t)dt, \quad \|\Delta x^k(t)\| \leqslant K \int_T \|\Delta_{\tilde{y}} f(y, x^k, \overline{u}^k, t)dt. \tag{3.9}$$

Отсюда на стандартной игольчатой вариации

$$\Delta_\varepsilon y(t) = \begin{cases} \overline{y} - y(t), \ \overline{y} \in Y, \ t \in (\tau - \varepsilon, \tau] \subset T; \\ y(t), \ t \in T \setminus (\tau - \varepsilon, \tau], \end{cases}$$

$$\Delta_\varepsilon \Phi_k(y) = \Phi_k(y + \Delta_\varepsilon y) - \Phi_k(y) = -\Delta_{\overline{y}} [H(\psi^*, y, x^*, u^*, \tau) - H(\psi^*, y, x^k, \overline{u}^k, \tau)] \cdot \varepsilon + o(\varepsilon). \tag{3.10}$$

На основании формулы (3.10) легко формулируется необходимое условие оптимальности в виде условия максимума по y функции

$$\mathscr{H}(\psi^*, \psi^k, x^*, x^k, u^*, \overline{u}^k, y, t) = H(\psi^*, y, x^*, u^*, t) - H(\psi^k, y, x^k, \overline{u}^k, t).$$

Далее относительно функции $\mathscr{H}$ строится итерационный процесс, аналогичный процессам [2], [3], на котором

$$\Phi_k(y^{k_0}) > \Phi_k(y^{k_1}) > \ldots; \quad \Phi_k(y^{k_0}) = \Phi_k(y^k) > 0.$$

При решении второй вспомогательной задачи (3.6) предложенным способом функциональные параметры $y = y(t)$ системы (1.1), как и управления $u = u(t)$, находятся в классе кусочно-непрерывных (в общем случае измеримых) вектор-функций. Для управлений этот класс функций вполне естественен. Однако во многих реальных системах автоматического регулирования функциональные параметры или коэффициенты настройки системы на заданный оптимальный режим по техническим условиям должны быть не только непрерывными, но и гладкими функциями, которые ограничены по амплитуде своего изменения: $y(t) \in [a, b]$, $t \in T$. Отсюда представляется интересным рассмотреть эту ситуацию, которая в процессе реализации предложенного алгоритма отразится только на решении второй вспомогательной задачи (3.6). Получение алгоритма ее решения в условиях гладкости функций $y(t) \in Y$ оказалось возможным на основе использования идеи внутренней вариации [5].

§ 4. Внутренняя вариация

Внесем дополнительные условия на параметры исследуемой задачи (1.4). Пусть вектор-функции $y=y(t)$ удовлетворяют прямым ограничениям (1.3), где Y – выпуклый компакт. Кроме того, функции $y=y(t)$ выбираются из класса гладких и таких, что $y(t) \not\equiv \text{const}$, $t \in T_0 \subset T$, $\text{mes}\, T_0 > 0$. Пусть также функции f, F, $\partial F/\partial x$, $\partial f/\partial x$ дифференцируемы по y.

Введем обозначение

$$\|a(\cdot)\| = \int_T \|a(t)\| dt. \tag{4.1}$$

С учетом этого обозначения и дополнительных условий на параметры задачи (1.4) из оценок (3.9) следуют оценки

$$\{\Delta x^*(t), \Delta x^k(t)\} \leq K \|\Delta y(\cdot)\|. \tag{4.2}$$

Формула приращения (3.7) примет следующий вид:

$$\Delta\Phi_k(y) = -\int_T \left\langle \frac{\partial H(\psi^*, y, x^*, u^*, t)}{\partial y} - \frac{\partial H(\psi^k, y, x^k, \bar{u}^k, t)}{\partial y}, \Delta y(t) \right\rangle dt + o(\|\Delta y(\cdot)\|). \tag{4.3}$$

Относительно базовых допустимых функций $y=y(t)$ варьируемые функции $\tilde{y}=\tilde{y}(t)$ построим по формуле

$$\tilde{y} = y_\varepsilon = y(t+\varepsilon\delta(t)), \quad \varepsilon \in [0, 1], \tag{4.4}$$

где $\delta=\delta(t)$, $t \in T$ – скалярная, непрерывная функция, удовлетворяющая условию

$$t_0 - t \leq \delta(t) \leq t_1 - t, \quad t \in T. \tag{4.5}$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.1. *Если* $y(t) \in Y$, *то для всех функций* $\delta(t)$, *удовлетворяющих неравенствам* (4.5), *функция* $y_\varepsilon(t)$, *построенная по формуле* (4.4), *допустима*: $y_\varepsilon(t) \in Y$, $t \in T$.

Утверждение следует из того, что $t+\varepsilon\delta(t)=t_\varepsilon$, $t_\varepsilon \in T$, и, следовательно,

$$y(t+\varepsilon\delta(t)) = y(t_\varepsilon) \in Y,$$

т.к. $t_\varepsilon \in T$. Очевидно также, что при $\varepsilon \to 0$, $y_\varepsilon \to y$. Так как

$$\Delta_\varepsilon y(t) = y(t+\varepsilon\delta(t)) - y(t) = \varepsilon \cdot \delta(t) \cdot \dot{y}(t) + \hat{o}(\varepsilon),$$

то на основании оценки (4.2) $\Delta_\varepsilon x^*(t) \sim \varepsilon$, $\Delta_\varepsilon x^k(t) \sim \varepsilon$. Тогда формула приращения (4.3) на паре (y, y_ε) примет вид

$$\Delta_\varepsilon \Phi_k(y) = \Phi_k(y_\varepsilon) - \Phi_k(y) = -\varepsilon \int_T \omega_k(y, t) \cdot \delta(t) dt + o(\varepsilon), \quad \varepsilon \in [0, 1], \tag{4.6}$$

где

$$\omega_k(y,t) = \left\langle \frac{\partial H(\psi^*, y, x^*, u^*, t)}{\partial y} - \frac{\partial H(\psi^k, y, x^k, u^k, t)}{\partial y}, \dot{y}(t) \right\rangle. \tag{4.7}$$

Отсюда необходимое условие локального минимума функционала $\Phi_k(y)$ будет иметь смысл равенства $\omega_k(y, t)=0$, $t \in T$. Если же $\omega_k(y^k, t) \neq 0$, $\Phi_k(y^k) > 0$, то на основании формулы приращения (4.6), (4.7) выбором функции $\delta=\delta(t)$, удовлетворяющей условию (4.5), и параметра $\varepsilon \in (0, 1]$ всегда можно получить допустимую функцию $y_\varepsilon = y_\varepsilon(t)$, при которой

$$\Phi_k(y_\varepsilon) < \Phi_k(y^k). \tag{4.8}$$

Для обеспечения возможно более глубокой релаксации (4.8) функцию $\delta=\delta(t)$ нужно выбирать из условия

$$\delta_k(t) : \int_T \omega_k(y, t)\delta(t) dt \longrightarrow \max, \quad t_0 - t \leq \delta(t) \leq t_1 - t. \tag{4.9}$$

Тогда $\int_T \omega_k(y^k, t)\cdot\delta_k(t)dt=N_k>0$ и в силу (4.6)

$$\Phi_k(y_\varepsilon)-\Phi_k(y^k) = -\varepsilon\left(N_k-\frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon}\right), \quad \varepsilon\in(0,1].$$

Отсюда следует существование $\varepsilon_0\in(0,1]$, при котором $\Phi_k(y_{\varepsilon_0}) < \Phi_k(y^k)$. Функцию $\delta_k(t)$ можно, например, выбрать в виде

$$\delta_k(t) = \frac{(t-t_0)(t_1-t)}{M_k}\omega_k(y^k, t), \tag{4.10}$$

где $M_k>0$ – весовой коэффициент, обеспечивающий выполнение условий (4.5). Легко проверить, что $M_k=(t_1-t_0)\max\limits_{t\in T}|\omega_k(y^k, t)|$.

В заключение работы приведем иллюстративные примеры.

Пример 4.1.

$$\dot x = A(t)x+f^{(1)}(y,t)+f^{(2)}(u,t), \quad x(t_0) = x^0,$$
$$u(t)\in U, \quad y(t)\in Y,$$
$$J(y,u) = \langle c, x(t_1)\rangle.$$

Здесь на основе принципа максимума Л.С.Понтрягина решение первой вспомогательной задачи (2.1) находится по формуле

$$\overline{u}(t,y):\langle\psi(t), f^{(2)}(u,t)\rangle \longrightarrow \max, \quad u\in U, \ t\in T,$$

и не зависит от $y:\overline{u}(t,y)=\overline{u}(t)$, т.к. решение сопряженной задачи

$$\dot\psi = -A(t)'\psi, \quad \psi(t_1) = -c \tag{4.11}$$

не зависит от y.

Функционал (3.1) представим в форме

$$\Phi(y) = \langle c, x(t_1,y,u^*)-x(t_1,y,\overline{u})\rangle = \langle c, z(t_1)\rangle,$$
$$\dot z = A(t)z+f^{(2)}(u^*,t)-f^{(2)}(\overline{u},t), \ z(t_0) = 0,$$

т.е. также не зависит от y.

Тогда, если $u^*(t)=\overline{u}(t)$, то $u^*=u^*(t)$ есть решение обратной задачи при любой функции $y=y(t)$. В противном случае решение обратной задачи не существует.

Пример 4.2.

$$\dot x = A(t)x+f(y,u,t), \quad x(t_0) = x^0,$$
$$u(t)\in U, \quad y(t)\in Y$$
$$J(y,u) = \langle c, x(t_1,y,u)\rangle.$$

Здесь решение первой вспомогательной задачи (2.1) также находится из условия максимума

$$\overline{u}(t,y):\langle\psi(t), f(y,u,t)\rangle \longrightarrow \max, \quad u\in U, \ t\in T,$$

где $\psi=\psi(t)$ удовлетворяет системе (4.11).

Функционал (3.1) имеет вид

$$\Phi(y) = \langle c, x(t_1,y,u^*)-x(t_1,y,\overline{u}(t,y))\rangle.$$

В этом случае обратная задача оптимального управления может быть переформулирована так: найти функцию $y^*(t)\in Y$ такую, что заданное оптимальное управление $u^*(t)\in U$ будет решением следующей задачи:

$$\langle\psi(t), f(y^*, u^*, t)\rangle = \max_{u\in U}\langle\psi(t), f(y^*, u, t)\rangle, \quad t\in T. \qquad (4.12)$$

Условие (4.12) во многих случаях допускает простое решение.

Пример 4.2.1.

$$\dot{x}_1 = yu, \quad x_1(0) = 0,$$
$$\dot{x}_2 = x_1, \quad x_2(0) = 0,$$
$$|u(t)| \leqslant 1, \quad |y(t)| \leqslant 1,$$
$$J(y, u) = x_1(1)+x_2(1).$$

Здесь $\psi_1(t)=t-2<0$ для любого допустимого $u^*=u^*(t)$, условие (4.12) разрешимо в виде

$$y^*(t) = -\alpha(t)\operatorname{sign} u^*(t), \quad \alpha(t)>0,$$

и $\alpha(t)=0$ в точках, где $u^*(t)=0$.

Пример 4.2.2.

$$\dot{x}_1 = x_2+y\cdot u_1, \quad x_1(0) = 1,$$
$$\dot{x}_2 = y\cdot u_2, \quad x_2(0) = 1,$$
$$|u_i(t)| \leqslant 1, \quad i=1,2,$$
$$J(y, u) = x_1(5)+x_2(5).$$

Здесь $\psi_1(t)\equiv-1$, $\psi_2(t)=t-6<0$, $t\in T$. Пусть $u_1^*\equiv+1$, $u_2^*(t)\equiv-1$. Тогда условие максимума (4.12) для любой функции $y=y(t)$ противоречиво

$$-y(t) > 0, \quad (1-6)y(t) < 0, \quad t\in T.$$

Это означает, что в данном примере решение обратной задачи не существует ни при какой функции $y=y(t)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Обратные задачи математического программирования* // Сб. научн. трудов. – М.: Изд-во ВЦ РАН, 1992. – 155 с.

2. Васильев О.В. *Методы последовательных приближений, основанные на необходимых условиях оптимальности типа принципа максимума* // Методы решения задач матем. программирования и оптимального управления. – Новосибирск: Наука, 1984. – С.161–199.

3. Васильев О.В., Бельтюков Н.Б., Терлецкий В.А. *Алгоритмы оптимизации динамических систем, основанные на принципе максимума* // Вопр. кибернетики. – М.: Наука, 1991. – С.17–38.

4. Демьянов В.Ф., Васильев П.В. *Недифференцируемая оптимизация.* – М.: Наука, 1981. – 384 с.

5. Забелло Л.Е. *Об условиях оптимальности в нелинейных инерционных управляемых системах с запаздыванием* // Дифференц. уравнения. – 1990. – Т.26. – № 8. – С.1309–1315.

Иркутский государственный университет

Поступила
16.10.1995