1998. Т. 34, № 9. С. 1284 — 1285

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.983

ОБ ОДНОМ ЛИНЕЙНОМ НЕОДНОРОДНОМ УРАВНЕНИИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С СИНГУЛЯРНОСТЬЮ

А. В. Глушак

В работе [1] вопросы стабилизации решения задачи Коши

$$v'(t) = \mathbb{A}v(t), \quad v(0) = v_0 \tag{1}$$

в банаховом пространстве $\mathbb{E}$ исследовались путем сужения класса операторов $\mathbb{A}$ с множества генераторов полугрупп до множества операторов, с которыми равномерно корректна задача Коши для уравнения Эйлера — Пуассона — Дарбу $y''(t) + (k/t)y'(t) = \mathbb{A}y(t)$. Сужение класса операторов позволило получить интегральное представление для решения задачи (1) и на основании этого представления установить необходимое и достаточное условия стабилизации решения.

В настоящей работе интегральное представление получается не за счет сужения класса операторов, а путем введения в уравнение (1) дополнительного сингулярного слагаемого.

В банаховом пространстве $\mathbb{E}$ рассмотрим задачу отыскания решения неоднородного уравнения

$$v'(t) + (k/t)v(t) = \mathbb{A}v(t) + (k/t)f, \quad t > 0, \tag{2}$$

где $k \in \mathbb{R}$, $\mathbb{A}$ — генератор полугруппы $\mathbb{T}(t)$ класса $\mathbb{C}_0$.

Обозначим через $v_k(t, f)$ решение уравнения (2) и установим связь между решениями этого уравнения при значении параметров $k = 0$ и $k > 0$.

Теорема 1. *Пусть $\mathbb{A}$ — генератор полугруппы класса $\mathbb{C}_0$. Тогда для $f \in \mathbb{D}(\mathbb{A})$ имеет место представление*

$$v_k(t, f) = k \int_0^1 (1-s)^{k-1} \mathbb{T}(ts) f \, ds. \tag{3}$$

При этом $v_k(0, f) = f$, и если $t \in [0, t_0]$, $t_0 > 0$, то $\lim\limits_{k \to 0} v_k(t, f) = \mathbb{T}(t)f$.

Формула (3) допускает следующее обобщение.

Теорема 2. *Пусть уравнение (2) имеет решение при $k = m > -1$. Тогда для $k > m$ функция*

$$v_k(t, f) = \frac{1}{\mathrm{B}(m+1, k-m)} \int_0^1 s^m (1-s)^{k-m-1} v_m(ts, f) \, ds, \tag{4}$$

где $\mathrm{B}(\cdot, \cdot)$ — бета-функция, является решением уравнения (2), при этом $v_k(0, f) = v_m(0, f)$.

Теорема 2 позволяет установить связь поведений прм $t \to \infty$ решений уравнения (2) при различных значениях k.

Теорема 3. *Пусть при некотором $m > -1$ существует предел $\lim\limits_{t \to \infty} v_m(t, f) = \ell$. Тогда при $k > m$ решение $v_k(t, f)$, определяемое равенством (4), также стремится к ℓ при $t \to \infty$.*

Замечание 1. Если $f \in \mathbb{D}(\mathbb{A}^2)$, то легко убедиться, что решение уравнения (2), т.е. функция $v_k(t, f)$, при $k > 0$ будет решением дифференциального уравнения второго порядка $w''(t) + ((k+1)/t)w'(t) = \mathbb{A}w'(t) + (1/t)\mathbb{A}w(t)$.

Устанавливают связь решения уравнения (2) с другими решениями следующие теоремы.

Теорема 4. *Пусть $k > 0$, $f \in \mathbb{D}(\mathbb{A})$ и при некотором $p \geq 0$ $y_p(t)$ — решение задачи $y''(t) + (p/t)y'(t) = \mathbb{A}y(t)$, $y(0) = f$, $y'(0) = 0$. Тогда функция*

$$v_k(t, f) = \frac{\Gamma(k+1)}{2^p \Gamma(p/2 + 1/2) t^{p/2+1/2}} \int_0^\infty s^p \exp\left(\frac{-s^2}{4t}\right) \Psi\left(k, \frac{p}{2} + \frac{1}{2}; \frac{s^2}{4t}\right) y_p(s) \, ds,$$

где $\Psi(\cdot)$ — вырожденная гипергеометрическая функция, а $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция, является решением уравнения (2).

Теорема 5. *Пусть выполнены условия теоремы 4 и $u_m(t)$ — решение задачи $u''(t) + (m/t)u'(t) + (c/t^2)u(t) = Au(t) + (c/t^2)f$, $u(0) = f$, $u'(0) = 0$, определяемое формулой*

$$u_m(t) = \frac{2\Gamma(k+1)\Gamma(q+1)}{\Gamma(k/2+1/2)\Gamma(m/2-k/2)} \int\limits_0^1 (1-s^2)^{m/2-k/2-1} s^k {}_2F_1\left(k, q; \frac{m}{2} - \frac{k}{2}; 1-s^2\right) y_k(ts)\, ds,$$

где ${}_2F_1(\cdot)$ *— гипергеометрическая функция,* $c \le (m-1)^2/4$, k *и* q *— действительные корни уравнения* $x^2 + ((1-m)/2)x + c/4 = 0$ *такие, что* $m > k > 0$, $q > -1$. *Тогда функция*

$$v_k(t, f) = \frac{1}{\Gamma(q+1)} \int\limits_0^\infty s^q \exp(-s) u_m(2\sqrt{ts})\, ds$$

является решением уравнения (2).

Теорема 6. *Пусть выполнены условия теоремы 4 и* $z_p(t)$ *— решение задачи* $z''(t) + ((p/t)\mathbb{I} - 2t(\mathbb{A} + 2\mathbb{I}))z'(t) - 2((p - 2t^2 + 2)\mathbb{A} + (1 + p - 2t^2)\mathbb{I})z(t) = 0$, $z(0) = f$, $z'(0) = 0$, *определяемое формулой*

$$z_p(t) = \frac{2\exp(t^2)}{\Gamma(p/2+1)} \int\limits_0^\infty s^{p+1} \exp(-s^2) y_p(2st)\, ds.$$

Тогда функция

$$v_k(t, f) = 2k \int\limits_0^1 s(1-s^2)^{k-1} \exp(-ts^2) z_p(s\sqrt{t})\, ds$$

является решением уравнения (2).

Применим теперь найденную $v_k(t, f)$ для отыскания решения уравнения (2), удовлетворяющего начальному условию

$$\lim_{t\to 0}(t^k v(t)) = v_0. \tag{5}$$

Теорема 7. *Если оператор* $\mathbb{A}$ *является генератором* $\mathbb{C}_0$*-полугруппы* $\mathbb{T}(t)$, $f, v_0 \in \mathbb{D}(\mathbb{A})$ *и* $k > 0$, *то функция*

$$v(t) = v_k(t, f) + t^{-k}\mathbb{T}(t)v_0, \tag{6}$$

где $v_k(t, f)$ *определяется формулой (3), является единственным решением задачи (2), (5).*

Замечание 2. С точки зрения стабилизации задача (2), (5) при $k > 0$ лучше, чем при $k = 0$, поскольку если есть стабилизация при $k = 0$, т.е. если $\mathbb{T}(t)v_0 \to \ell$ при $t \to \infty$, то в силу теоремы 3 и равенства (6) решение $v(t)$ задачи (2), (5) при $k > 0$ и $f = v_0$ также стремится к ℓ. Обратное, вообще говоря, не верно.

Как отмечено в замечании 1, решение некоторых классов сингулярных уравнений второго порядка может быть сведено к решению неоднородных сингулярных уравнений первого порядка. Укажем один из таких классов.

Теорема 8. *Пусть оператор* $\mathbb{A}$ *является генератором* $\mathbb{C}_0$*-полугруппы* $\mathbb{T}(t)$, $k > 0$, $0 < b \le 1$ *и* $f \in \mathbb{D}(\mathbb{A}^2)$. *Тогда функция* $w_{k,b}(t, f)$, *определяемая при* $0 < b < 1$ *равенством*

$$w_{k,b}(t, f) = \frac{1}{\mathrm{B}(b, k+1-b)} \int\limits_0^1 (1-s)^{k-b} s^{b-1} \mathbb{T}(ts) f\, ds$$

и $w_{k,1}(t, f) = v_k(t, f)$, *является единственным решением задачи*

$$w''(t) + ((k+1)/t)w'(t) = \mathbb{A}w'(t) + (b/t)\mathbb{A}w(t), \quad w(0) = f, \tag{7}$$

при этом

$$\|w_{k,b}(t, f)\| \le M \exp(\omega t)\|f\|, \tag{8}$$

где числа M *и* ω *определяются полугруппой* $\mathbb{T}(t)$.

Замечание 3. Если в задаче (7) параметр $b > 1$, то

$$w(t) = \frac{k\Gamma(k)}{\Gamma(b)\Gamma(n+k+1-b)} \frac{d^n}{dt^n}\left(t^n \int\limits_0^1 (1-s)^{k-b+n} s^{b-k-1} {}_2F_1(k, k+1-b; k+1-b+n; 1-1/s)\mathbb{T}(ts) f\, ds\right), \tag{9}$$

где $n = [b]$, является единственным решением задачи (7), но, вообще говоря, при $b > 1$ нарушается равномерная корректность рассматриваемой задачи, так как наличие производных в формуле (9) приводит к потере оценки (8).

Литература

1. *Глушак А.В., Репников В.Д.* // Докл. АН СССР. 1992. Т. 326, № 2. С. 224 — 226.

Воронежский государственный технический университет

Поступила в редакцию 9 декабря 1996 г.