НЕРВЫ ГРУПП КОКСТЕРА

А. А. Гайфуллин

Системой Кокстера называется пара (W,S), где $S=\{s_1,s_2,\dots,s_m\}$ – конечное множество, W – группа, задаваемая системой образующих S и соотношениями $s_i^2=1$, $i=1,\dots,m$, $(s_is_j)^{n_{ij}}=1$, $i,j=1,\dots,m$, $i\neq j$, где $n_{ij}\in\{2,3,\dots,\infty\}$, $n_{ij}=n_{ji}$ ($n_{ij}=\infty$ означает отсутствие соответствующего соотношения). Группа W, имеющая такую систему образующих, называется *группой Кокстера*. Система Кокстера (W,S) называется конечной, если группа W конечна. Для любого подмножества $B\subset S$ обозначим через W_B подгруппу группы W, порожденную образующими из множества B.

Нервом системы Кокстера (W,S) называется симплициальный комплекс $N(W,S)$ на множестве вершин S, симплексы которого задаются множествами σ такими, что группа W_σ конечна.

Целью этой статьи является описание систем Кокстера, нервы которых являются псевдомногообразиями или горенштейновыми* комплексами и одновременно обладают довольно высокой степенью смежностности (определения см. ниже, а детали в [1]).

Симплициальный комплекс L размерности n называется *горенштейновым**, если $H_*(\operatorname{Lk}\sigma)=H_*(S^{n-\dim\sigma-1})$ для любого $\sigma\in L$ (мы полагаем, что $\operatorname{Lk}\varnothing=L$ и $\dim\varnothing=-1$). Симплициальный комплекс L называется *k-смежностным*, если любое подмножество из не более чем k его вершин задает симплекс этого комплекса. *Графом Кокстера* системы Кокстера (W,S) называется граф $\Gamma(W,S)$ на множестве вершин S, в котором вершины s_i и s_j $(i\neq j)$ соединены $(n_{ij}-2)$ ребрами (в графе допускаются кратные ребра, но не может быть ребер, у которых совпадают начало и конец).

Теорема 1. *Нерв системы Кокстера (W,S) является 5-смежностным псевдомногообразием тогда и только тогда, когда система (W,S) представляется в виде прямого произведения конечного числа систем Кокстера таких, что граф Кокстера каждой из них имеет не менее 6 вершин и совпадает с одним из графов, изображенных на рис.* 1, а–ж.

Теорема 2. *Нерв системы Кокстера (W,S) является 4-смежностным горенштейновым* комплексом тогда и только тогда, когда система (W,S) представляется в виде прямого произведения конечного числа систем Кокстера таких, что граф Кокстера каждой из них имеет не менее 5 вершин и совпадает с одним из графов, изображенных на рис.* 1.

Замечание. Нерв системы Кокстера (W,S) является 9-смежностным комплексом тогда и только тогда, когда система (W,S) представляется в виде прямого произведения конечного числа систем Кокстера таких, что граф Кокстера каждой из них либо имеет не менее 10 вершин и изоморфен одному из графов, изображенных на рис. 1, а–г, либо изоморфен графу Кокстера конечной системы Кокстера.

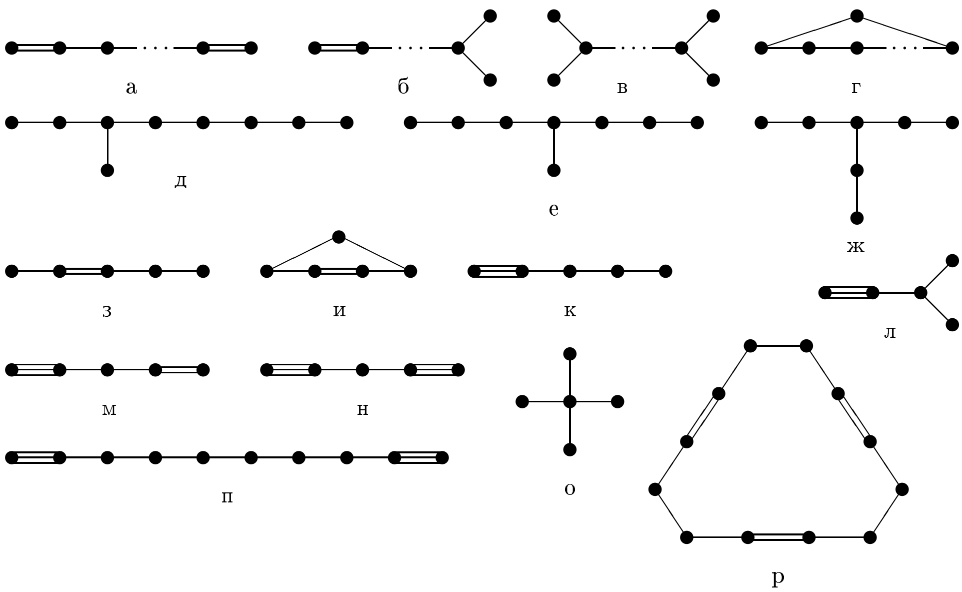
Список всех связных графов, являющихся графами Кокстера конечных систем Кокстера, приведен в [2]. Система Кокстера конечна тогда и только тогда, когда ее граф Кокстера является несвязным объединением графов из этого списка. Графы, изображенные на рис. 1, а–о, – в точности все связные графы, имеющие не менее 5 вершин, не изоморфные графам Кокстера конечных систем Кокстера, но такие, что все их собственные полные подграфы изоморфны графам Кокстера конечных систем Кокстера. Поэтому нервы систем Кокстера с графами Кокстера, изображенными на рис. 1, а–о, изоморфны границам симплексов. Легко проверить, что нерв системы Кокстера с графом Кокстера, изображенным на рис. 1, п, изоморфен комплексу $\partial\Delta^4*\partial\Delta^4$.

Пусть N – нерв системы Кокстера с графом Кокстера, изображенным на рис. 1, р. Тогда N – 4-смежностный комплекс, не являющийся соединением нескольких границ симплексов, но изоморфный границе 9-мерного выпуклого симплициального многогранника с 12 вершинами. Например, можно взять многогранник с вершинами $(1,0,0,0,0,0,0,0,0)$, $(0,1,0,0,0,0,0,0,0)$, $\dots$, $(0,0,0,0,0,0,0,0,1)$, $(2,2,5,4,5,9,3,4,4)$, $(3,4,4,2,2,5,4,5,9)$, $(4,5,9,3,4,4,2,2,5)$.

Нерв прямого произведения систем Кокстера изоморфен соединению их нервов. Таким образом, из теорем 1 и 2 получаем:

Следствие 1. 5-*смежностное псевдомногообразие является нервом какой-нибудь системы Кокстера тогда и только тогда, когда оно является соединением нескольких границ симплексов.*

Следствие 2. 4-*смежностный горенштейнов* комплекс является нервом некоторой системы Кокстера тогда и только тогда, когда он является соединением нескольких комплексов, каждый из которых изоморфен либо границе симплекса, либо комплексу N. В частности, любой такой комплекс изоморфен границе выпуклого симплициального многогранника.*



Пусть система Кокстера (W,S) является прямым произведением систем Кокстера с графами Кокстера, изображенными на рис. 1. Тогда ее граф Кокстера $\Gamma(W,S)$ – несвязное объединение графов, изображенных на рис. 1. Обозначим через $k_j(W,S)$ количество компонент связности графа $\Gamma(W,S)$, имеющих ровно j вершин и изоморфных одному из графов на рис. 1, а–о, через $k^*_{10}(W,S)$ и $k^*_{12}(W,S)$ – количества компонент связности графа $\Gamma(W,S)$, изоморфных графам на рис. 1, п, и на рис. 1, р, соответственно.

Теорема 3. *Две системы Кокстера (W,S) и (W',S'), каждая из которых является прямым произведением нескольких систем Кокстера с графами Кокстера, изображенными на рис. 1, имеют изоморфные нервы тогда и только тогда, когда $k_j(W,S)=k_j(W',S')$, $j\geqslant 6$, $k_5(W,S)+2k^*_{10}(W,S)=k_5(W',S')+2k^*_{10}(W',S')$ и $k^*_{12}(W,S)=k^*_{12}(W',S')$.*

Я благодарен моему научному руководителю В. М. Бухштаберу за постоянное внимание к моей работе, а также Н. Э. Добринской, Т. Е. Панову и Г. И. Шарыгину за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[**1**] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов // УМН. 2000. Т. 55. №5. С. 3–106. [**2**] Н. Бурбаки. Группы и алгебры Ли. М.: Мир, 1972.

Московский государственный
университет им. М.В. Ломоносова

Принято редколлегией
24.03.2003