Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

И. И. Скрыпник, Асимптотическое поведение решений нелинейных эллиптических задач с неоднородными граничными условиями,
Дифференц. уравнения, 1995, том 31, номер 3, 542–546

https://www.mathnet.ru/de8595

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.9.169
11 декабря 2025 г., 12:58:32

МАРТ 1995 г., ТОМ 31, № 3

УДК 517.95

И. И. СКРЫПНИК

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С НЕОДНОРОДНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Пусть Ω — ограниченная область в R^n, $\{G_s\}$ — последовательность открытых множеств, содержащихся в R^n, $\Gamma_s = G_s \cap \partial\Omega$. Рассмотрим задачу

$$-\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i} a_i\left(x, \frac{\partial u_s}{\partial x}\right) = f(x), \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

$$u_s(x) = 0, \quad x \in \Gamma_s, \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\left(x, \frac{\partial u_s}{\partial x}\right) \cos(\nu, x_i) = 0, \quad x \in \partial\Omega \setminus \Gamma_s. \tag{3}$$

Здесь ν — внешняя нормаль к $\partial\Omega$.

Подобные задачи для линейных уравнений при некоторых геометрических предположениях рассматривались в [1, 2] (подробные ссылки имеются в [2]). В случае квазилинейных уравнений при «правильном» распределении множеств аналогичная задача рассматривалась в [3].

Предполагаем, что $a_i(x, \xi)$, $i = 1, \dots, n$, — функции, определенные при $x \in \Omega$, $\xi \in R^n$, удовлетворяют условию Каратеодори и выполнены неравенства при $2 \leqslant p < \infty$ с положительными постоянными c_0, c_1:

$$\sum_{i=1}^{n} [a_i(x, \xi) - a_i(x, \zeta)] \ (\xi_i - \zeta_i) \geqslant c_0 |\xi - \zeta|^p,$$

$$|a_i(x, \xi) - a_i(x, \zeta)| \leqslant c_1 (|\xi| + |\zeta|)^{p-2} |\xi - \zeta|.$$

При $1 < p < 2$ предполагаем выполненными неравенства

$$\sum_{i=1}^{n} [a_i(x, \xi) - a_i(x, \zeta)] (\xi_i - \zeta_i) \geqslant c_0 (|\xi| + |\zeta|)^{p-2} |\xi - \zeta|^2,$$

$$|a_i(x, \xi) - a_i(x, \zeta)| \leqslant c_1 |\xi - \zeta|^{p-1},$$

при $x \in \Omega$, ξ, $\zeta \in R^n$, $i = 1, \dots, n$. Кроме того, предполагаем выполненным следующее условие: $a_i(x, t\xi) = |t|^{p-2} t a_i(x, \xi)$, $x \in \Omega$, $t \in R^1$, $\xi \in R^n$, при этом $|t|^{p-2} t = 0$ для $t = 0$ и $1 < p < 2$. Пусть $W_p^1(\Omega)$ — обычное пространство С. Л. Соболева, $[W_p^1(\Omega)]^*$ — сопряженное пространство. Через $W_p^1(\Omega, \Gamma_s)$ обозначим пространство функций, полученных замыканием пространства $C^\infty(\Omega)$, обращающихся в нуль в окрестности Γ_s, по норме

$$\|u\|_{W_p^1(\Omega)} = \left\{ \int_\Omega \left(|u|^p + \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \right) dx \right\}^{1/p}.$$

Если μ — положительная мера на $\bar{\Omega}$, то через $L_p(\bar{\Omega}; \mu)$ обозначим пространство измеримых функций с конечной нормой

$$\|u\|_{L_p(\bar{\Omega}; \mu)} = \left\{ \int_{\bar{\Omega}} |u|^p d\mu \right\}^{1/p}.$$

Говорим, что утверждение $P(x)$ выполнено квази всюду на множестве E, если существует множество $N \subset E$, $C_p(N) = 0$ такое, что $P(x)$ выполнено для всех $x \in E \setminus N$.

Множество $A \subset \Omega$ назовем квази открытым, если для любого $\varepsilon > 0$ существует открытое подмножество $U_\varepsilon \subset \Omega$ такое, что $C_p(U_\varepsilon) < \varepsilon$ и $A \cup U_\varepsilon$ открыто. Здесь $C_p(U)$ — p-емкость множества U.

Под радоновой мерой будем понимать непрерывный линейный функционал на $C(\Omega)$. Через M_0^p обозначим пространство положительных борелевских мер μ на $\bar{\Omega}$ таких, что

1) $\mu(E)=0$ для любого борелевского множества E, такого, что $C_p(E)=0$;

2) $\mu(E)=\inf \mu(A)$, A квази открыто, $E\subseteq A$, для любого борелевского множества $E\subseteq\bar{\Omega}$.

Подобные классы мер были введены в [4] (подробные библиографические ссылки см. там же).

Для любого множества $E\subseteq\bar{\Omega}$ через ∞_E обозначим меру, принадлежащую M_0^p и определенную следующим образом:

$$\infty_E(B)=\begin{cases} 0, \text{ если } C_p(E\cap B)=0, \\ +\infty, \text{ если } C_p(E\cap B)>0. \end{cases}$$

Далее говорим, что радонова мера λ на $\bar{\Omega}$ принадлежит $[W_p^1(\Omega)]^*$, если существует $f\in [W_p^1(\Omega)]^*$ такая, что

$$\langle f, \varphi\rangle = \int_\Omega \varphi d\lambda \tag{4}$$

для любой $\varphi\in C^\infty(\Omega)$.

Для любого положительного функционала $f\in[W_p^1(\Omega)]^*$ существует положительная радонова мера λ такая, что выполнено (4). Известно, что любая положительная радонова мера, которая принадлежит $[W_p^1(\Omega)]^*$, принадлежит также M_0^p (см. [5, гл. 4]).

Пусть $\mu_s\in M_0^p$, $f\in[W_p^1(\Omega)]^*$, рассмотрим следующую задачу: найти $u_s\in W_p^1(\Omega)\cap L_p(\bar{\Omega};\mu_s)$, удовлетворяющую

$$\sum_{i=1}^n \int_\Omega a_i\left(x, \frac{\partial u_s}{\partial x}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx+\int_{\bar{\Omega}}|u_s|^{p-2}u_s\varphi d\mu_s=\int_\Omega f\varphi dx \tag{5}$$

для любой функции $\varphi\in W_p^1(\Omega)\cap L_p(\bar{\Omega};\mu_s)$.

Аналогичные задачи были рассмотрены в [4, 6—12]. В данной работе используется метод, разработанный в [4].

Аналогично [13, 14] можно показать, что если $u_s\in W_p^1(\Omega,\Gamma_s)$, $\Gamma_s\subset\partial\Omega$, то $u_s=0$ квази всюду в окрестности Γ_s.

Поэтому справедлива

Теорема 1. *Пусть $\mu_s=\infty_{\Gamma_s}$. Функция $u_s\in W_p^1(\Omega,\Gamma_s)$ является решением задачи (5) тогда и только тогда, когда u_s — решение задачи (1)—(3).*

Аналогично работе [15] доказывается

Теорема 2. *Пусть $f\in[W_p^1(\Omega)]^*$, $\{\lambda_s\}$ — последовательность радоновых мер, $u_s\in W_p^1(\Omega)$ — решение уравнения*

$$-\sum_{i=1}^n \frac{d}{dx_i}a_i\left(x, \frac{\partial u_s}{\partial x}\right)=f+\lambda_s, \quad x\in\Omega.$$

Пусть u_s сходится слабо к u в $W_p^1(\Omega)$, λ_s удовлетворяет условию: для любого компакта K существует постоянная C_K такая, что $|\lambda_s|(K)\leqslant C_K$ для всех s. Тогда u_s сходится к u сильно в $W_r^1(\Omega)$ для всех $r<p$.

Справедлива следующая

Лемма 1. *Пусть $\mu_s\in M_0^p$, $f\in[W_p^1(\Omega)]^*$, пусть $u_s\in W_p^1(\Omega)\cap L_p(\bar{\Omega};\mu_s)$ — решение задачи (5). Пусть λ_s — элемент, принадлежащий $[W_p^1(\Omega)]^*$, определенный следующим образом: $-\sum_{i=1}^n \frac{d}{dx_i}a_i\left(x, \frac{\partial u_s}{\partial x}\right)+\lambda_s=f$. Тогда λ_s — радонова мера и для любого компакта K выполнена оценка*

$$|\lambda_s|(K)\leqslant 2[C_p(K)]^{1/p}[c_1\|\partial u_s/\partial x\|_{L_p(\Omega)}^{p-1}+\|f\|_{[W_p^1(\Omega)]^*}].$$

Лемма 1 доказывается аналогично утверждению 1.11 работы [4].

Таким образом, из теоремы 2 и леммы 1 заключаем, что u_s сходится сильно к u в $W_r^1(\Omega)$, $r<p$.

Определим $w_s\in W_p^1(\Omega)\cap L_p(\bar{\Omega};\mu_s)$ как решение задачи

$$\sum_{i=1}^n \int_\Omega a_i\left(x, \frac{\partial w_s}{\partial x}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx+\int_{\bar{\Omega}}|w_s|^{p-2}w_s\varphi d\mu_s=\int_\Omega \varphi dx. \tag{6}$$

Можем предположить, что w_s сходится слабо к w в $W_p^1(\Omega)$.

Справедлива следующая

Теорема 3. *Пусть $\{\mu_s\}$ — последовательность мер из M_0^p, $f\in L_\infty(\Omega)$. Пусть u_s, w_s — решения задач (5), (6) и сходятся слабо к u, w соответственно в $W_p^1(\Omega)$. Тогда справедливо следующее асимптотическое разложение:*

$$\partial u_s/\partial x_i=\partial u/\partial x_i+P_s^{(i)}(x,u)+R_s^{(i)}(x) \quad \text{п. в. в } \Omega,\ i=1,\dots,n,$$

$$P_s^{(i)}(x, u) = \begin{cases} (u/w)\,\{\partial w_s/\partial x_i - \partial w/\partial x_i\}, & \text{если } w > 0, \\ 0, & \text{если } w = 0. \end{cases}$$

При этом $R_s^{(i)}(x)$ сходится сильно к нулю в $L_p(\Omega)$.

Теорема 3 доказывается аналогично [4], сформулируем лемму, из которой следует теорема 3.

Для любого $\varepsilon > 0$ рассмотрим множества

$$U_\varepsilon = \{w > \varepsilon\} \cap \{|u| > \varepsilon w\},\ V_\varepsilon = \{w < \varepsilon\},\ W_\varepsilon = \{w > \varepsilon\} \cap \{|u| < \varepsilon w\}.$$

Лемма 2. *Пусть выполнены все условия теоремы 3, для любого $\varepsilon > 0$ положим $u_s^\varepsilon = u w_s / w^\varepsilon$, $r_s^\varepsilon = u_s - u_s^\varepsilon$, $w^\varepsilon = \max\{w, \varepsilon\}$. Тогда u_s^ε, $r_s^\varepsilon \in W_p^1(\Omega) \cap L_p(\bar\Omega;\ \mu_s)$ и*

$$\lim_{s\to\infty} \left(\int_{U_\varepsilon} \left| \frac{\partial}{\partial x} r_s^\varepsilon \right|^p dx + \int_{U_\varepsilon} |r_s^\varepsilon|^p d\mu_s \right) = 0,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \lim_{s\to\infty} \left(\int_{V_\varepsilon} \left| \frac{\partial}{\partial x} u_s \right|^p dx + \int_{V_\varepsilon} |u_s|^p d\mu_s \right) = 0,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \lim_{s\to\infty} \left(\int_{W_\varepsilon} \left| \frac{\partial}{\partial x} u_s \right|^p dx + \int_{W_\varepsilon} |u_s|^p d\mu_s \right) = 0.$$

Определение. Пусть $\mu_s \in M_0^p$, $\mu \in M_0^p$, скажем, что μ_s γ-сходится к μ, если для любой $f \in [W_p^1(\Omega)]^*$ решение $u_s \in W_p^1(\Omega) \cap L_p(\bar\Omega;\ \mu_s)$ задачи (5) сходится слабо в $W_p^1(\Omega)$ к функции $u(x) \in W_p^1(\Omega) \cap L_p(\bar\Omega;\ \mu)$, которая является решением задачи

$$\sum_{i=1}^n \int_\Omega a_i\left(x, \frac{\partial u}{\partial x}\right) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx + \int_{\bar\Omega} |u|^{p-2} u \varphi d\mu = \int_\Omega f \varphi dx \tag{7}$$

для любой функции $\varphi \in W_p^1(\Omega) \cap L_p(\bar\Omega;\ \mu)$.

Подобная γ сходимость была рассмотрена в работах [4, 8, 16].

Пусть $\{\mu_s\}$ — последовательность мер из M_0^p, $\mu \in M_0^p$, $w_s \in W_p^1(\Omega) \cap L_p(\bar\Omega;\ \mu_s)$, $w \in W_p^1(\Omega) \cap L_p(\bar\Omega;\ \mu)$ — решения задач

$$\sum_{i=1}^n \int_\Omega a_i\left(x, \frac{\partial w_s}{\partial x}\right) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx + \int_{\bar\Omega} |w_s|^{p-2} w_s \varphi d\mu_s = \int_\Omega \varphi dx$$

для любой функции $\varphi \in W_p^1(\Omega) \cap L_p(\bar\Omega;\ \mu_s)$,

$$\sum_{i=1}^n \int_\Omega a_i\left(x, \frac{\partial w}{\partial x}\right) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx + \int_{\bar\Omega} |w|^{p-2} w \varphi d\mu = \int_\Omega \varphi dx$$

для любой функции $\varphi \in W_p^1(\Omega) \cap L_p(\bar\Omega;\ \mu)$.

Справедлива

Теорема 4. *Следующие два условия эквивалентны: а) w_s слабо сходится к w в $W_p^1(\Omega)$; б) μ_s γ-сходится к μ.*

При этом если $\Gamma_s \subset \partial\Omega$, $\mu_s = \infty_{\Gamma_s}$, то $\operatorname{supp} \mu \subset \partial\Omega$.

Доказательство. Пусть

$$\varphi_\varepsilon(t) = \begin{cases} |t|^{p-2} t & \text{при } |t| > \varepsilon, \\ (\varepsilon)^{p-2} t & \text{при } |t| < \varepsilon. \end{cases}$$

Пусть $v_\varepsilon(x) = \varphi_\varepsilon(u/w^\varepsilon)$, $\beta \geqslant |p-2| + 1$. Подставляя в (5) $\varphi = w_s^\beta \psi$, в (7) $\varphi = v_\varepsilon w_s^\beta \psi$, где $\psi \in W_p^1(\Omega) \cap L_\infty(\bar\Omega)$, и вычитая из одного полученного равенства другое, имеем

$$I_s \equiv \sum_{i=1}^n \int_\Omega a_i\left(x, \frac{\partial u_s}{\partial x}\right) \frac{\partial}{\partial x_i} (w_s^\beta \psi)\, dx -$$

$$- \sum_{i=1}^n \int_\Omega a_i\left(x, \frac{\partial w_s}{\partial x}\right) \frac{\partial}{\partial x_i} (v_\varepsilon w_s^\beta \psi)\, dx +$$

$$+ \int_{\bar\Omega} |u_s|^{p-2} u_s w_s^\beta \psi d\mu_s - \int_{\bar\Omega} v_\varepsilon w_s^{\beta+p-1} \psi d\mu_s -$$

$$- \int_\Omega f w_s^\beta \psi dx + \int_\Omega v_\varepsilon w_s^\beta \psi dx = 0.$$

Аналогично [4] получаем

$$I_s=\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}a_i\left(x,\ \frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial x_i}(w^{\beta}\psi)dx-$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}a_i\left(x,\ \frac{\partial w}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial x_i}(v_{\varepsilon}w^{\beta}\psi)dx-$$

$$-\int_{\Omega}fw^{\beta}\psi dx+\int_{\Omega}v_{\varepsilon}w^{\beta}\psi dx+E_s^{\varepsilon}, \tag{8}$$

где $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\lim\limits_{s\to\infty}E_s^{\varepsilon}=0$. Переходя к пределу при $s\to\infty$ в (8), получаем

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}a_i\left(x,\ \frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial x_i}(w^{\beta}\psi)dx-$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}a_i\left(x,\ \frac{\partial w}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial x_i}(v_{\varepsilon}w^{\beta}\psi)dx=$$

$$=\int_{\Omega}fw^{\beta}\psi dx-\int_{\Omega}v_{\varepsilon}w^{\beta}\psi dx+E^{\varepsilon}, \tag{9}$$

где $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}E^{\varepsilon}=0$.

Положим $\nu=1+\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{d}{dx_i}a_i\left(x,\ \frac{\partial w}{\partial x}\right)$. Можно показать, что ν — положительная радонова мера. Определим

$$\mu(E)=\begin{cases}\int\limits_E\frac{d\nu}{w^{p-1}}, & \text{если } C_p(\{w=0\}\cap E)=0,\\ +\infty, & \text{если } C_p(\{w=0\}\cap E)>0.\end{cases}$$

Подобно [4] доказывается, что $\{w^{\beta}\psi:\psi\in W_p^1(\Omega)\cap L_{\infty}(\Omega)\}$ плотно в $W_p^1(\Omega)\cap L_p(\bar{\Omega};\mu)$, поэтому из (9), переходя к пределу при $\varepsilon\to 0$, получим

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}a_i\left(x,\ \frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx+\int_{\bar{\Omega}}|u|^{p-2}u\varphi d\mu=\int_{\Omega}f\varphi dx$$

для любой $\varphi\in W_p^1(\Omega)\cap L_p(\bar{\Omega};\mu)$. Если $\mu_s=\infty_{\Gamma_s}$, то для любой функции $\varphi\in \mathring{W}_p^1(\Omega)$ имеем

$$\int_{\Omega}\varphi d\nu=\int_{\Omega}\varphi dx-\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}a_i\left(x,\ \frac{\partial w}{\partial x}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx=$$

$$=\lim_{s\to\infty}\left\{\int_{\Omega}\varphi dx-\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}a_i\left(x,\ \frac{\partial w_s}{\partial x}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx\right\}=$$

$$=\lim_{s\to\infty}\int_{\Omega}|w_s|^{p-1}w_s\varphi d\infty_{\Gamma_s}=0$$

в силу определения ∞_{Γ_s}, поэтому $\operatorname{supp}\nu\subset\partial\Omega$, а значит, $\operatorname{supp}\mu\subset\partial\Omega$.

Следствие. *Из определения γ-сходимости и теоремы 4 заключаем, что предельная функция $u(x)$ для последовательности решений задачи (1)—(3) является решением задачи*

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dx_i}a_i\left(x,\ \frac{\partial u}{\partial x}\right)=f(x),\ x\in\Omega,$$

$$\sum_{i=1}^{n}a_i\left(x,\ \frac{\partial u}{\partial x}\right)\cos(\nu,x_i)+|u|^{p-2}u\mu=0,\ x\in\partial\Omega,$$

с некоторой мерой μ, $\operatorname{supp}\mu\subset\partial\Omega$.

Литература

1. Oleinik O. A., Chechkin G. A. On asymptotics of solutions and eigenvalues of an elliptic problem with rapidly alternating type of boundary conditions. Second Workshop on Compos. Media and Homogemisation, 1993.

2. Чечкин Г. А. // Мат. сб. 1993. Т. 184, № 6. С. 99—150.
3. Скрыпник И. И. // Укр. мат. журн. 1994 (в печати).
4. Dal. Maso G., Murat F. Asymptotic behaviour and correctors for Dirichlet problems in perforated domains with homogeneous monotone operators. Preprint SISSA, 1994 (to appear).
5. Ziemer W. P. Weakly differentiale functions. Berlin, 1989.
6. Attouch H. Variotional convergence for functions and operators. London, 1984.
7. Attouch H., Picard C. // J. Funct. Anal. 1983. Vol. 50. P. 329—386.
8. Buttazzo G., Dal. Maso G., Mosco U. // Partial Diff. Equat. and the Calcul. of Variat. Boston, 1989. P. 193—249.
9. Dal. Maso G., Malusa A. // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. (to appear).
10. Dal. Maso G., Mosco U. // Arch. Rat. Mech. Anal. 1986. Vol. 95. P. 345—387.
11. Dal. Maso G., Mosco U. // Appl. Math. Optim. 1987. Vol. 15. P. 15—63.
12. Notarantanio L. Asymptotic behaviour of Dirichlet problems on a Riemannian maniford. Ricerche Mat. (to appear).
13. Hedberg L. I. // Math. Z. 1979. Vol. 129. P. 299—319.
14. Bagby T. // J. Funct. Anal. 1972. Vol. 10. P. 259—268.
15. Boccardo L., Murat F. // Nonlinear Anal. 1992. Vol. 19. P. 581—597.
16. Dal. Maso G. // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. 1987. Vol. 14, N 4. P. 423—464.

Институт прикладной математики и механики
Национальной АН Украины

Поступила в редакцию
10 октября 1994 г.