

## ПРОСТРАНСТВА ШТЕЙНА

*А. Л. Онищик*

В конце 50-х — начале 60-х годов в теории функций многих комплексных переменных был получен ряд фундаментальных результатов. Прежде всего, в работе Серра [114] было впервые четко сформулировано понятие комплексного пространства. Комплексные пространства, т. е. грубо говоря, комплексные многообразия с особыми точками, являются в настоящее время основным объектом исследования в рассматриваемой теории. Более общее, чем у Серра, понятие комплексного пространства, подсказанное алгебраической геометрией, ввел Грауэрт [66]. Были выделены некоторые классы комплексных пространств, естественные с точки зрения теории и представляющие наибольший интерес для применений. Настоящий обзор посвящен одному из этих классов — голоморфно полным пространствам, которые представляют собой наиболее естественное многомерное обобщение областей комплексной плоскости, рассматриваемых в теории функций одного комплексного переменного. Голоморфно полные комплексные пространства называют также пространствами Штейна, а голоморфно полные многообразия — многообразиями Штейна — по имени Штейна, впервые рассмотревшего в 1951 г. этот класс многообразий. Алгебраическим аналогом пространств Штейна являются аффинные алгебраические многообразия.

Пространства Штейна исследовались с разных точек зрения — геометрической, гомологической, теоретико-функциональной, в результате чего были открыты различного рода характеристики этих пространств. Одна из них связана с так называемой проблемой Леви, которая была поставлена и решена для комплексных пространств Грауэртом [65] и Нарасимханом [97, 98]. Развитые при этом методы оказали большое влияние на дальнейшее развитие всей теории комплексных пространств.

В настоящем обзоре рассматриваются работы, прореферированные в Реферативном журнале «Математика» с января 1964 по март 1973 года, вышедшие из печати, как правило,

в 1963—72 гг. Более ранние работы цитируются только в случае, если они содержат основополагающие результаты. Эти результаты мы формулируем в начале каждого параграфа, после чего дается обзор работ по данному разделу теории. § 1 посвящен основным определениям. Заметим, что этот обзор почти не затрагивает некоторых важных разделов теории комплексных пространств, например, теории продолжения аналитических объектов, теории аппроксимации (в частности, пар Рунге), дифференциального исчисления на комплексных пространствах, хотя эти разделы тесно связаны с пространствами Штейна.

## § 1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ПОНЯТИЯ

Пусть  $X$  — топологическое пространство,  $A$  — пучок коммутативных ассоциативных комплексных алгебр с единицами над  $X$ . Тогда пара  $(X, A)$  называется кольцованным (или окольцованным) пространством. Пучок  $A$  называется структурным пучком. Морфизмом кольцованного пространства  $(X, A(X))$  в кольцованное пространство  $(Y, A(Y))$  называется пара  $(\varphi_0, \varphi_1)$ , где  $\varphi_0: X \rightarrow Y$  — непрерывное отображение,  $\varphi_1: \varphi_0^{-1}A(Y) \rightarrow A(X)$  — гомоморфизм пучков (через  $\varphi_0^{-1}A(Y)$  обозначается обратный образ пучка  $A(Y)$ ). Кольцованные пространство и их морфизмы образуют категорию  $\mathcal{E}$ .

Подпространством кольцованного пространства  $(X, A)$  называется кольцованное пространство  $(Y, B)$ , где  $Y \subset X$ , вместе с морфизмом вида  $(1, \varphi_1): (Y, B) \rightarrow (X, A)$ .

Пучок  $A$ -модулей  $F$  на кольцованном пространстве  $(X, A)$  называется когерентным, если для каждой точки  $x \in X$  существует окрестность  $U$ , над которой имеется точная последовательность вида  $(A|U)^p \rightarrow (A|U)^q \rightarrow F|U \rightarrow 0$ . Это означает, что  $F$  порождается над  $U$  конечным числом сечений, пучок соотношений между которыми также порождается конечным числом сечений. Множество непрерывных сечений пучка  $F$  будем, как обычно, обозначать через  $\Gamma(X, F)$ , а группы когомологий — через  $H^p(X, F)$  ( $p=0, 1, 2, \dots$ ).

Рассмотрим кольцованное пространство  $(D, O)$ , где  $D$  — открытое множество в  $\mathbb{C}^n$ ,  $O$  — пучок ростков голоморфных функций в  $D$ . Как известно (теорема Ока, см. [72]), подпучок идеалов  $I \subset O$  является когерентным тогда и только тогда, когда  $I$  локально порождается конечным числом сечений. Подмножество  $X \subset D$  называется аналитическим, если в окрестности каждой точки  $x \in D$  оно определяется конечным числом аналитических уравнений. Каждый когерентный пучок идеалов  $I \subset O$  определяет аналитическое множество  $X \subset D$ , которое называется множеством нулей пучка  $I$  и задается условием:  $X = \{x \in D \mid I_x \neq O_x\}$ . Если в окрестности  $U \subset D$  пучок  $I$  порождается функциями  $f_1, \dots, f_p \in \Gamma(U, I)$ , то  $X \cap U$  задается

уравнениями  $f_i(x) = 0$  ( $i=1, \dots, p$ ). Наоборот, если  $X$  — любое аналитическое множество в  $D$ , то, как показал А. Картан (см. [72]), пучок  $I(X)$  всех ростков голоморфных функций, обращающихся в 0 на  $X$ , является когерентным пучком идеалов в  $O$ .

Пусть  $X$  — аналитическое множество в  $D$ ,  $I \subset O$  — некоторый когерентный пучок идеалов, множеством нулей которого является  $X$ . Кольцованное пространство  $(X, H)$ , где  $H = O/I|X$ , являющееся естественным образом подпространством в  $(D, O)$ , называется локальной моделью. Локальная модель называется приведенной, если  $I = I(X)$ . Кольцованное пространство  $(X, H)$  называется комплексным (или комплексным аналитическим) пространством (в смысле Грауэрта), если  $X$  — хаусдорфово пространство со счетной базой и каждая точка  $x \in X$  обладает такой окрестностью  $U$ , что  $(U, H|U)$  изоморфно локальной модели. Морфизмы комплексных пространств определяются как морфизмы кольцованных пространств т. е. комплексные пространства образуют полную подкатегорию  $\mathcal{A} \subset \mathcal{E}$ . Если рассматривать только приведенные локальные модели, то мы получим понятие приведенного комплексного пространства (или комплексного пространства в смысле Серра). Пространство  $(X, H)$  является приведенным тогда и только тогда, когда стебли  $H_x (x \in X)$  не содержат нильпотентных элементов. В этом случае пучок  $H$  отождествляется с некоторым подпучком пучка ростков непрерывных функций на  $X$ . Если  $(\varphi_0, \varphi_1)$  — морфизм двух приведенных комплексных пространств, то  $\varphi_1$  однозначно определяется по  $\varphi_0$  как обратное отображение функций. В этом случае  $\varphi_0$  называется голоморфным отображением. Для любого комплексного пространства  $(X, H)$  существует однозначно определенное приведенное пространство  $(X, O)$  и гомоморфизм пучков  $\text{red} : H \rightarrow O$ , причем пара  $(1, \text{red})$  является морфизмом. Пространство  $(X, O)$  называется редукцией пространства  $(X, H)$ .

Если  $f \in \Gamma(X, H)$ , то можно говорить о значении, принимаемом  $f$  в точке  $x \in X$  (оно совпадает со значением голоморфной функции  $\text{red} f$  на  $(X, O)$ ). Поэтому алгебру  $\mathfrak{A} = \Gamma(X, H)$  и в неприведенном случае часто называют алгеброй голоморфных функций на  $(X, H)$ .

Пучки  $H$ -модулей на комплексном пространстве  $(X, H)$  называются также аналитическими пучками.

Если  $(X, H)$  — комплексное пространство, то каждое открытое  $U \subset X$  определяет открытое подпространство  $(U, H|U)$ . С другой стороны, можно ввести понятие аналитического подпространства в  $(X, H)$ , которое обязательно замкнуто. Множество  $Y \subset X$  называется аналитическим, если в окрестности каждой точки  $x \in X$  оно определяется конечным числом голоморфных уравнений. С таким множеством связан когерентный пучок идеалов  $I(Y) \subset H$ , состоящий из ростков, равных 0

на  $Y$ . Обратно, каждый когерентный пучок идеалов  $I \subset H$  определяет аналитическое множество  $Y \subset X$ . Пара  $(Y, H/I|_Y)$  является комплексным пространством и называется аналитическим подпространством в  $(X, H)$ ; имеется естественный морфизм  $(1, \varphi_1) : (Y, H/I|_Y) \rightarrow (X, H)$ . Примером аналитического подпространства в пространстве  $(X, H)$  служит его редукция.

Пусть  $\mathfrak{m}_x$  — максимальный идеал в локальном кольце  $H_x$  ( $x \in X$ ). Положим  $\text{em dim}_x X = \dim \mathfrak{m}_x / \mathfrak{m}_x^2$ ,  $\text{em dim } X = \sup_{x \in X} \text{em dim}_x X$ . Число  $\text{em dim}_x X$  является наименьшим из та-

ких  $n$ , что  $(X, H)$  в окрестности точки  $x$  вкладывается в окрестность нуля пространства  $\mathbb{C}^n$  в виде аналитического подпространства.

Пусть  $F$  — когерентный аналитический пучок на  $(X, H)$ . Глубиной (или когомологической коразмерностью) пучка  $F$  в точке  $x \in X$  называется число  $\text{rg } \hat{f}_x F$ , равное максимуму длин таких последовательностей  $a_1, \dots, a_r \in \mathfrak{m}$ , что  $a_i$  не является делителем нуля в  $F_x / \sum_{j=1}^{i-1} a_j F_x$  ( $i=1, \dots, r$ ). Положим  $\text{prof } F = \inf_{x \in X} \text{prof}_x F$ .

Приведенное комплексное пространство  $(X, O)$  называется нормальным, если каждое  $O_x$  ( $x \in X$ ) целозамкнуто в своем поле частных. Геометрическая характеристика нормальных пространств была дана Грауэртом и Реммертом [69]. С каждым приведенным пространством  $(X, O)$  связано нормальное пространство — его нормализация.

Пусть  $(X, O)$  — комплексное пространство в смысле Грауэрта,  $\mathfrak{A} = \Gamma(X, O)$ . Пространство  $(X, O)$  называется голоморфно выпуклым, если для всякого компакта  $K \subset X$  множество  $\hat{K} = \{x \in X \mid |f(x)| \leq \sup_K |f| \text{ (} f \in \mathfrak{A} \text{)}\}$  компактно. Это условие равносильно тому, что для всякого бесконечного дискретного подмножества  $M \subset X$  существует функция  $f \in \mathfrak{A}$ , не ограниченная на  $M$ .

Пространство  $(X, O)$  называется  $K$ -полным, если для всякой точки  $x \in X$  существуют такие функции  $f_1, \dots, f_n \in \mathfrak{A}$ , что  $x$  является изолированной точкой слоя  $f^{-1}(f(x))$ , где  $f : X \rightarrow \mathbb{C}^n$  — отображение, определенное формулой  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ .

Пространство  $(X, O)$  называется пространством Штейна (или голоморфно полным), если оно голоморфно выпукло и  $K$ -полно. Как показал Грауэрт [62], в этом определении условие  $K$ -полноты можно заменить требованием, чтобы функции из  $\mathfrak{A}$  разделяли точки пространства  $X$  (голоморфная отделимость), а также условием конечности компактных аналитических подмножеств.

Отметим некоторые примеры пространств Штейна. Область  $D \subset \mathbb{C}^n$  является многообразием Штейна тогда и только тогда, когда она является областью голоморфности, т. е. когда в  $D$  существует голоморфная функция, не продолжаемая в большую область (теорема Каргана—Туллена) [79]. Всякое аналитическое подпространство пространства Штейна является штейновым. В частности, всякое аффинное алгебраическое многообразие над  $\mathbb{C}$  является пространством Штейна.

Если  $(X, O)$  — пространство Штейна и  $f$  — голоморфная функция на  $X$ , то открытое подпространство  $\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$  является штейновым. Симха [116] доказал, что если  $X$  — нормальное двумерное пространство Штейна и  $Y$  — одномерное аналитическое множество в  $X$ , то  $X \setminus Y$  — пространство Штейна.

Нарасимхан [99] доказал, что приведенное комплексное пространство является штейновым тогда и только тогда, когда его нормализация штейнова. Образ штейнова пространства при собственном голоморфном отображении является штейновым.

С другой стороны, известно [124], что аналитическое накрытие пространства Штейна является пространством Штейна. Заметим, что Дюкуртью [41] дал классификацию аналитических накрытий пространства Штейна  $(X, O)$  в терминах алгебраических расширений поля мероморфных функций на  $(X, O)$ .

Пусть  $(X, O)$  — голоморфно выпуклое комплексное пространство. Тогда существуют пространство Штейна  $(\tilde{X}, \tilde{O})$  и собственный сюръективный морфизм  $(\varphi_0, \varphi_1) : (X, O) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{O})$  со связными слоями, изоморфно отображающий алгебру  $\Gamma(\tilde{X}, \tilde{O})$  на  $\Gamma(X, O)$ . Эта теорема была сначала доказана Реммертом и Карганом [34] для приведенных пространств, а затем Вигман [133] перенес ее на общий случай. В частности,  $(X, O)$  называется пространством конечного типа, если  $\varphi_0$  биективно вне некоторого компактного аналитического подмножества, т. е. если  $X$  получается из  $\tilde{X}$  «раздуванием» конечного числа точек.

## § 2. КОГЕРЕНТНЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ ПУЧКИ НА ПРОСТРАНСТВАХ ШТЕЙНА И ИХ КОГОМОЛОГИИ

Пусть  $(X, O)$  — пространство Штейна,  $F$  — когерентный аналитический пучок на  $X$ . Справедливы следующие теоремы А. Каргана:

- А) Пучок  $F$  порождается своими глобальными сечениями;
- В)  $H^p(X, F) = 0$  ( $p \geq 1$ ).

Карган доказал эти теоремы для многообразий Штейна (это доказательство изложено в [5]). Доказательства для

приведенных пространств Штейна были опубликованы Ганнинггом [71] и Андреотти и Везентини [13]. Сю [118] заметил, что теорема А легко выводится из теоремы В и предложил новый вариант доказательства [119], основанный на этом наблюдении. В случае, когда  $X$  — многообразие Штейна, имеется также доказательство Хёрмандера [79], основанное на следующем утверждении: на строго псевдовыпуклом многообразии  $X$  (см. § 5) всякая  $\bar{\partial}$ -замкнутая гладкая форма типа  $(0, p)$  ( $p > 0$ ) является  $\bar{\partial}$ -точной, т. е.  $H^p(X, O) = 0$  ( $p > 0$ ). Это утверждение выводится автором из  $L^2$ -оценок для решений уравнения  $\bar{\partial}\alpha = \beta$ . Наконец, отметим, что сведение общего случая к приведенному было сделано еще в 1960 г. Грауэртом [66].

В [72, 16] изложены простейшие свойства пространств Штейна, вытекающие из теорем А и В. Бэникэ и Стэншилэ [20] доказали разрешимость проблемы Пуанкаре на приведенных пространствах Штейна (для многообразий это ранее сделал Серр).

В связи с теоремами А и В возникает вопрос о характеристизации пространств Штейна в терминах когомологий когерентных пучков. Хорошо известно, что свойство В может быть принято за определение пространства Штейна [72] (на самом деле  $(X, O)$  является штейновым, если  $H^p(X, I) = 0$  ( $p > 0$ ), для любого когерентного пучка идеалов  $I \subset O$ ). Изучался также вопрос, в какой мере свойство А характеризует пространства Штейна.

Вакабаяси [130] показал, что нормальное комплексное пространство, удовлетворяющее условию А для любого когерентного пучка идеалов,  $K$ -полно. Отсюда следует, что если  $(X, O)$  нормально, удовлетворяет условию А для любого когерентного  $F \subset O$  и алгебра  $\Gamma(X, O)$  изоморфна алгебре  $\Gamma(X', O')$  для некоторого приведенного голоморфно полного пространства  $(X', O')$ , то  $(X, O)$  голоморфно полно. Аналогичный результат получили Бэникэ и Стэншилэ [25] в случае, когда  $O(x \in X)$  и  $O'_y(y \in X')$  — области целостности. Там же доказано, что если  $(X, O)$  — область наложения над  $n$ -мерным многообразием Штейна, то эквивалентны следующие условия:  $X$  — многообразие Штейна,  $X$  удовлетворяет условию А,  $H^p(X, O) = 0$  ( $1 \leq p \leq n-1$ ). В той же ситуации Сю доказал [117], что для штейновости многообразия  $X$  достаточно, чтобы  $\dim H^p(X, O)$  ( $1 \leq p \leq n-1$ ) были не более чем счетными; это условие на самом деле равносильно конечности, так как группы  $H^p(Y, F)$  для когерентного аналитического пучка  $F$  на многообразии  $Y$ , являющемся объединением счетного числа компактов, не могут иметь счетную размерность (см. также [110]). Условие  $\dim H^p(X, O) < \infty$  ( $1 \leq p \leq n-1$ ) было введено Лауфером [93], который на-

кладывал на  $X$  дополнительное условие голоморфной отделимости, оказавшееся излишним. Бэникэ и Стэншилэ [17, 25] приводят ряд других достаточных условий штейновости.

Пусть  $F$  — когерентный аналитический пучок на приведенном комплексном пространстве  $(X, O)$ . Коэн [35] доказал, что если  $Y$  — аналитическое подмножество в открытом множестве пространства  $X$  и пучок  $F|_Y$  порожден сечениями пучка  $F$  над  $X$ , причем все  $F_y (y \in Y)$  имеют  $\leq q$  образующих, то  $F|_Y$  порождается  $q(\dim Y + 1)$  сечениями (в случае, когда  $Y$  — точка, этот факт отметил также Сю [118]). В частности, если  $X$  и  $F$  удовлетворяют условию А, то  $F$  порождается  $q(n+1)$  сечениями, где  $n = \dim X$ , если все  $F_x (x \in X)$  имеют  $\leq q$  образующих. Крипке [92] уточнил этот результат, показав, что системы образующих пучка  $F$  составляют множество второй категории в  $\Gamma(X, F)^{q(n+1)}$ .

Из теоремы В легко следует, что если  $F$  — когерентный аналитический пучок на пространстве Штейна  $(X, O)$  и  $s_1, \dots, s_m \in \Gamma(X, F)$  порождают пучок  $F$ , то  $s_1, \dots, s_m$  порождают модуль  $\Gamma(X, F)$  над  $\Gamma(X, O)$ . Поэтому перечисленные выше результаты дают оценки для числа образующих модуля  $\Gamma(X, F)$ . Остановимся теперь на результатах Форстера и Рамшпота, которые получили более точные оценки для этого числа.

Топологическая алгебра  $\mathfrak{A}$  над  $\mathbb{C}$  называется штейновой [47], если она изоморфна алгебре голоморфных функций на пространстве Штейна (не обязательно приведенном). Категории пространств Штейна и алгебр Штейна являются двойственными друг другу [49]. Более того, если  $(X, O_x)$  — пространство Штейна с  $\dim X < \infty$ , то множество всех морфизмов произвольного комплексного пространства  $(Y, O_Y)$  в  $(X, O_x)$  находится в естественном взаимно однозначном соответствии с множеством непрерывных гомоморфизмов  $\Gamma(X, O_x) \rightarrow \Gamma(Y, O_Y)$  [19]. Форстер [48] доказал (другое доказательство см. в [21]), что для пространства Штейна  $(X, O_x)$  с  $\dim X < \infty$  любой гомоморфизм алгебр  $\Gamma(X, O_x) \rightarrow \Gamma(Y, O_Y)$  непрерывен. В частности, топология в алгебре  $\Gamma(X, O_x)$  полностью определяется ее алгебраической структурой.

Топологический модуль над штейновой алгеброй  $\mathfrak{A}$  называется штейновым, если он изоморфен модулю непрерывных сечений некоторого когерентного аналитического пучка на соответствующем  $\mathfrak{A}$  пространстве Штейна. При этом проективные модули соответствуют локально свободным пучкам, т. е. пучкам ростков голоморфных векторных расслоений. Форстер доказал [49], что всякий замкнутый максимальный идеал  $\mathfrak{m}$  штейновой алгебры  $\mathfrak{A}$  порожден  $k$  элементами, где  $k = \dim \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ . Далее, идеал  $\mathfrak{S}(Y)$  голоморфных функций на  $n$ -мерном многообразии Штейна  $X$ , обращающихся в 0 на аналитическом множестве  $Y \subset X$ , допускает  $n$  образующих

(это означает, что  $Y$  можно задать  $n$  уравнениями) [53, 49]. Проективный штейнов модуль над  $\Gamma(X, \mathcal{O})$ , где  $X$  —  $n$ -мерное многообразие Штейна, допускает  $d + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$  образующих, где  $d$  — размерность слоя соответствующего векторного расслоения [53]. Форстер и Рамшпott [58] показали также, что эта оценка является точной. Для пространств Штейна соответствующая оценка числа образующих проективного модуля имеет вид  $d + \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$ . В той же работе доказана следующая теорема. Пусть  $D$  — голоморфный дивизор на  $n$ -мерном пространстве Штейна и  $c_1(D)$  — соответствующий 1-й класс Чжэня. Если  $\mathfrak{Z}(D)$  допускает  $q$  образующих, то  $c_1(D)^q = 0$ , а при  $q=1$  или  $n \leq 2q$  верно и обратное. В цикле работ Форстера, Рамшпotta и Шнайдера, которые мы рассмотрим в § 6, подробно исследован случай, когда  $\mathfrak{Z}(Y)$  допускает  $k$  образующих, где  $k = \text{codim } Y$ .

Вигман [135] исследовал комплексные подструктуры в комплексном пространстве  $(X, \mathcal{O})$ , т. е. такие подпучки локальных подалгебр  $A \subset \mathcal{O}$ , что  $(X, A)$  — комплексное пространство. Он показал, что  $(X, A)$  — пространство Штейна тогда и только тогда, когда  $(X, \mathcal{O})$  — пространство Штейна. Для пространства Штейна комплексные подструктуры находятся в естественном взаимно однозначном соответствии с замкнутыми подалгебрами в  $\mathfrak{A} = \Gamma(X, \mathcal{O})$ , спектр замкнутых максимальных идеалов которых совпадает с  $X$ .

Отметим также два результата Сю, относящиеся к штейновым алгебрам. В [120] доказано, что для алгебры Штейна теорема Гильберта о нулях, вообще говоря, неверна, но она верна для простых идеалов, имеющих непустые множества нулей. Если  $(X, \mathcal{O})$  — пространство Штейна, то компакт  $K \subset X$  называется штейновым в случае, когда он обладает базисом открытых штейновых окрестностей. Это свойство равносильно равенству  $\hat{K} = K$  (см. § 1). В [122] доказывается, что для штейнова компакта  $K$  алгебра  $\Gamma(K, \mathcal{O})$  нётерова тогда и только тогда, когда  $K \cap Y$  имеет конечное число связных компонент для всякого аналитического множества  $Y$  в окрестности компакта  $K$ .

Перейдем теперь к результатам о когомологиях с компактными носителями. Пусть  $D$  — открытое множество в пространстве Штейна  $(X, \mathcal{O})$  и  $N \geq 0$  — целое число. Сю [121] доказал, что если  $F$  — когерентный аналитический пучок на  $D$  и  $H_c^p(D, F) = 0$  ( $p \leq N$ ), то  $\text{rgof}_x F \geq N+1$  ( $x \in D$ ). Далее, если  $F$  — когерентный аналитический пучок на  $X$  и  $H_c^p(D, F) = 0$  ( $p > N$ ), то  $\dim(D \cap \text{Supp } F) \leq N$ . Связь между когомологиями  $H_c^p(X, \mathcal{O})$  и числом  $\text{rgof } F$  была уточнена в работах Бэникэ и Стэншилэ [18, 24] (подробное изложение

см. в [14]). Пусть  $K$  — штейнов компакт в  $X$ ,  $F$  — когерентный аналитический пучок на  $X$  и  $N \geq 0$  — целое число. Имеем  $H_K^p(X, F) = 0$  ( $p \leq N$ ) тогда и только тогда, когда  $\text{prgf}_x F \geq N + 1$  ( $x \in K$ ). Далее,  $\dim H_K^p(X, F) < \infty$  ( $p \leq N$ ) тогда и только тогда, когда существует такая окрестность  $U \supset K$ , что  $\text{prgf}_x F \geq N + 1$  ( $x \in U \setminus K$ ). Отсюда выводится эквивалентность следующих трех условий:  $\text{prgf} F \geq N + 1$ ;  $H_K^p(X, F) = 0$  ( $q \leq N$ ) для всех штейновых компактов  $K \subset X$ ;  $H_c^p(X, F) = 0$  ( $q \leq N$ ). Кроме того,  $\dim H_c^p(X, F) < \infty$  ( $p \leq N$ ) тогда и только тогда, когда существует такое конечное множество  $A \subset X$  что  $\text{prgf}(F|_{X \setminus A}) \geq N + 1$ , и  $\dim H_c^p(X, F)$  не более чем счетны ( $p \leq N$ ), если существует дискретное  $A \subset X$  с этим свойством. В [14] содержится ряд приложений этих результатов, из которых отметим следующую теорему. Если  $K$  — штейнов компакт в  $X$  и  $F$  — когерентный аналитический пучок на  $X \setminus K$  причем  $\text{prgf}_x F \geq 3$  для  $x \in X \setminus K$ , достаточно близких к  $K$ , то  $F$  единственным образом продолжается до когерентного пучка  $\hat{F}$  на  $X$ , удовлетворяющего условию  $\text{prgf}_x \hat{F} \geq 2$  ( $x \in K$ ) [23, 14].

Кроме того, в работах [24, 14] содержатся следующие теоремы двойственности. Пусть  $F$  — когерентный аналитический пучок на  $n$ -мерном многообразии Штейна  $(X, O)$ ,  $\Omega^n$  — пучок ростков голоморфных  $n$ -форм на  $X$ . Тогда  $\text{Ext}_O^{n-p}(X; F, \Omega^n)$  обладает структурой пространства Фреше, причем топологически двойственное пространство алгебраически изоморфно  $H_c^p(X, F)$ . Аналогично, если  $K$  — штейнов компакт в  $X$ , то  $\text{Ext}_O^{n-p}(K; F, \Omega^n)$  обладает структурой индуктивного предела пространств Фреше, причем топологически двойственное пространство алгебраически изоморфно  $H_K^p(X, F)$ .

Перечислим теперь некоторые отдельные результаты о когерентных пучках и когомологиях. Удзава [129] доказал, что если  $(X, O)$  — связное  $n$ -мерное многообразие Штейна,  $A$  —  $r$ -мерное аналитическое множество в  $X$  ( $r \leq n - 1$ ,  $r \neq n - 2$ ), то  $H^1(X \setminus A, O) = 0$ , так что в  $X \setminus A$  разрешима 1-я проблема Кузена. Если  $\dim A = n - 2$  и  $A$  задается двумя голоморфными уравнениями, то  $H^1(X \setminus A, O) \neq 0$ .

Бэникэ [15] доказал, что если  $(X, O)$  — пространство Штейна,  $K \subset X$  — штейнов компакт,  $F$  — когерентный аналитический пучок на  $X$ , то пространства  $H^p(X \setminus K, F)$ , снабженные естественной топологией, отделимы. Заметим, что если  $\text{prgf}_x O \geq 3$  ( $x \in K$ ), то  $H^1(X \setminus K, O) = 0$ .

Бэникэ и Стэншилэ [22] показали, что любой когерентный аналитический пучок на пространстве Штейна может быть представлен в виде двойного индуктивного предела пучков, допускающих глобальные свободные резольвенты.

Пусть  $(X, O)$  — комплексное многообразие,  $K$  — пучок ростков мероморфных функций на  $X$ . Если  $\alpha, \beta \in K_x$ ,  $\alpha \neq \beta$ , то определено линейное преобразование  $\chi_{\alpha, \beta}(f) = \frac{f - \alpha}{\beta - \alpha}$  ( $f \in K_x$ ).

Открытое подмножество  $S \subset K$  называется когерентным пучком  $L$ -идеалов, если для каждой  $x \in X$  существует окрестность  $U$  и пара  $\alpha \neq \beta$  мероморфных функций в  $U$ , такая, что  $\chi_{\alpha, \beta}(S|U)$  — когерентный пучок идеалов в  $O|U$ . Сато [112] доказал, что для любого когерентного пучка  $L$ -идеалов  $S$  на многообразии Штейна  $(X, O)$  существует глобальный интегрализатор, т. е. пара мероморфных функций  $\alpha \neq \beta$  на  $X$ , такая, что  $\chi_{\alpha, \beta}(S) \subset O$ . Отсюда следует, что для когерентных пучков  $L$ -идеалов справедливы аналоги теорем А и В.

В заключение отметим некоторые бесконечномерные обобщения теорем А и В. Пусть  $(X, O)$  — приведенное пространство Штейна,  $E$  — голоморфное векторное расслоение над  $X$ , слоем которого является пространство Фреше,  $O(E)$  — пучок ростков его голоморфных сечений,  $F$  — когерентный аналитический пучок на  $X$ . Положим  $F^E = F \otimes O(E)$  Бишоп [29] и Бунгарт [31] доказали теорему В для пучков  $F^E$  в случае, когда  $E$  — тривиальное расслоение. Затем Бунгарт [32] доказал, что она верна в случаях, когда  $F = O$  и когда  $F$  — пучок идеалов аналитического подпространства. Наконец, А. А. Панков [4] доказал теорему В для любого пучка  $F$  и банахова расслоения  $E$ . С другой стороны, Силиси [115] доказал теоремы А и В для когерентных пучков в окрестности компактного полицилиндра счетного прямого произведения комплексных прямых.

### § 3. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПРОСТРАНСТВ ШТЕЙНА

Пусть  $X$  — многообразие Штейна,  $\Omega^p$  — пучок ростков голоморфных  $p$ -форм на  $X$ . Как легко следует из теоремы В, последовательность  $0 \rightarrow C \rightarrow \Omega^0 \xrightarrow{d} \Omega^1 \xrightarrow{d} \dots$  является ациклической резольвентой пучка  $C$ , откуда  $H^p(X, C) \cong \text{Ker } d \cap \Gamma(X, \Omega^p) / d(\Gamma(X, \Omega^{p-1}))$  ( $p \geq 0$ ) («голоморфная теорема де Рама»). Суччи [125, 126] доказал относительный вариант этой теоремы. Пусть  $A$  — аналитическое множество в  $X$ , причем каждая точка  $y \in A$  обладает фундаментальной системой окрестностей  $V_i$  в  $X$ , каждая из которых аналитически стягивается в точку  $y$  так, что при этом  $V_i \cap A$  стягивается по себе. Тогда группы  $H^p(X \bmod A, C)$  изоморфны группам когомологий комплекса голоморфных форм на  $X$ , равных 0 на  $A$ . Феррари [42] получил обобщение этих результатов на приведенные пространства Штейна, удовлетворяющие условию локальной стягиваемости, которое аналогично рассмотренному выше. Результаты Феррари связаны с вопросом о разумном опреде-

лении дифференциальных форм на комплексном пространстве, который мы не будем затрагивать в настоящем обзоре.

Отметим еще результат Лунгулеску [94], который, используя «голоморфную теорему де Рама», показал, что для многообразия  $X \subset \mathbb{C}^n$ , заданного уравнением  $z_1^{a_1} + z_2^{a_2} + \dots + z_n^{a_n} = 1$ , имеем  $\dim H^{n-1}(X, \mathbb{C}) = (a_1 - 1) \dots (a_n - 1)$ .

Другой способ вычисления когомологий многообразия Штейна с помощью дифференциальных форм указали Френкель, Норге [59] и Эппли [9]. Пусть  $A^{p,q}$  — пространство всех гладких форм типа  $(p, q)$  на многообразии  $X$ . Положим  $V^{p,q} = \text{Ker}(\partial\bar{\partial}) \cap A^{p,q}/\partial A^{p-1,q} + \bar{\partial} A^{p,q-1}$ ,  $\Lambda^{p,q} = \text{Ker} d \cap A^{p,q}/\partial\bar{\partial} A^{p-1,q-1}$  ( $p, q \geq 1$ ). Если  $X$  — многообразие Штейна, то  $V^{p,q} \cong H^{p+q+1}(X, \mathbb{C})$ ,  $\Lambda^{p,q} \cong H^{p+q}(X, \mathbb{C})$ . Можно определить также группы  $V_c^{p,q}$ ,  $\Lambda_c^{p,q}$  с компактными носителями, причем на  $n$ -мерном многообразии Штейна имеем  $V_c^{p,q} = 0$  ( $p + q < n$ ),  $\Lambda_c^{p,q} = 0$  ( $p + q \leq n$ ). Группы  $V^{p,q}$ ,  $\Lambda^{p,q}$ ,  $V_c^{p,q}$ ,  $\Lambda_c^{p,q}$  встречаются в ряде вопросов теории комплексных многообразий и получили название групп Эппли (изложение теории этих групп см. в [26]).

Эппли [8, 9] применил указанные выше результаты к изучению определяющих множеств  $D$  в многообразии Штейна  $X$ , т. е. таких открытых множеств  $D \subset X$ , что всякая голоморфная в  $D$  функция однозначно продолжается на  $X$ . Если это верно для всех голоморфных форм, то  $D$  называется формоопределяющим. Оказывается, что если  $C_1(X) = 0$ , то всякое определяющее множество является и формоопределяющим. Далее, если  $D$  — определяющее множество, то  $\pi_1(D) \rightarrow \pi_1(X)$  — эпиморфизм. Отметим в связи с этим результат Ройдена [111], который показал, что для оболочки голоморфности  $X$  области  $D \subset \mathbb{C}^n$  естественное отображение  $H^1(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(A, \mathbb{Z})$  голоморфно. Наконец, для  $q > 1$  отображение  $H^q(X, \mathbb{C}) \rightarrow H^q(D, \mathbb{C})$  для формоопределяющего множества  $D$  не обязано быть мономорфным.

Из «голоморфной теоремы де Рама» следует, в частности, что  $H^p(X, \mathbb{C}) = 0$  ( $p > n$ ) для любого  $n$ -мерного многообразия Штейна  $X$ . Андреотти и Фрэнкл [11] в тех же предположениях доказали, что  $H_p(X, \mathbb{Z}) = 0$  ( $p > n$ ), а  $H_n(X, \mathbb{Z})$  не имеет кручения. Наконец, Кауп [86] доказал, что если  $X$  — любое  $n$ -мерное комплексное пространство,  $A$  — его аналитическое подмножество, а  $G$  — любая абелева группа, то  $H_p(X \bmod A, G) = 0$  ( $p > n$ ) и  $H_n(X \bmod A, G)$  не имеет кручения. Кроме того,  $H^p(X \bmod A, G) = 0$  ( $p > n + 1$ ) и  $H^{n+1}(X \bmod A, G) = 0$ , если  $G$  — конечная, безгранично делимая группа или векторное пространство над телом. Часть этой теоремы (для групп  $H_p(X, \mathbb{Z})$ ) передоказал Нарасимхан [100], который дал также конструкцию областей голо-

морфности  $D \subset \mathbb{C}^n$  с заданными группами  $H_p(D, \mathbb{Z})$  при малых  $p$ .

В. Л. Гутенмахер [3] также указал конструкцию областей голоморфности в  $\mathbb{C}^n$  с нетривиальными группами гомологий, при помощи которой он построил область голоморфности  $D \subset \mathbb{C}^n$  с  $H_n(D, \mathbb{Z}) \neq 0$ .

Заметим еще, что Хиршовиц [76] дал пример стягиваемой области голоморфности в  $\mathbb{C}^2$ , которая не является аналитически стягиваемой.

#### § 4. ВЛОЖЕНИЯ И ПОГРУЖЕНИЯ В $\mathbb{C}^N$

Еще в 1957 г. Реммерт доказал, что всякое многообразие Штейна  $X$  допускает собственное регулярное голоморфное вложение в пространство  $\mathbb{C}^N$  при достаточно большом  $N$ , т. е. изоморфно замкнутому аналитическому подмногообразию в  $\mathbb{C}^N$ . Поскольку каждое замкнутое аналитическое подмногообразие в  $\mathbb{C}^N$  штейново, тем самым была получена характеристика многообразий Штейна как многообразий, допускающих собственные регулярные голоморфные вложения в пространство  $\mathbb{C}^N$ . В дальнейшем этот результат был обобщен на случай комплексных пространств. Кроме того, был получен ряд оценок для размерности  $N$  пространства  $\mathbb{C}^N$ , в которое можно вложить (или погрузить) данное пространство Штейна. В дальнейшем под вложением комплексного пространства  $(X, \mathcal{O})$  в  $\mathbb{C}^N$  мы будем понимать изоморфизм этого пространства на аналитическое подпространство в  $(\mathbb{C}^N, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^N})$ , а под погружением комплексного многообразия — аналитическое погружение. Положим, как и выше,  $\mathfrak{A} = \Gamma(X, \mathcal{O})$ .

В 1960 г. Нарасимхан [96] доказал, что для  $n$ -мерного многообразия Штейна  $X$  множество вложений  $X \rightarrow \mathbb{C}^{2n+1}$  плотно в  $\mathfrak{A}^{2n+1}$ . Если  $X$  — приведенное пространство Штейна,  $n = \dim X$ , то множество голоморфных собственных инъективных отображений  $X \rightarrow \mathbb{C}^{2n+1}$ , регулярных в каждой неособой точке, плотно в  $\mathfrak{A}^{2n+1}$ . Если при этом  $m = \text{em dim } X < \infty$ , то множество вложений  $X \rightarrow \mathbb{C}^{m+n}$  плотно в  $\mathfrak{A}^{m+n}$ . Другой подход к этим теоремам дал Бишоп [27, 28] (см. также [72, 79]). В случае неприведенных пространств Штейна  $(X, \mathcal{O})$  аналогичный результат получил Вигман [132], который показал, что вложения  $(X, \mathcal{O}) \rightarrow \mathbb{C}^N$  плотны в  $\mathfrak{A}^N$  для  $N = \sup\{2n+1, m\}$ , где  $n = \dim X$ ,  $m = \text{em dim } X < \infty$ . Если  $(X, \mathcal{O})$  приведено и  $m \geq n+2$ , то можно взять  $N = n+m-1$  (для неприведенных пространств это неверно). Если же  $(X, \mathcal{O})$  нормально и  $m > n+3$ , то можно взять  $N = n+m-2$ . В случае, когда  $\text{em dim } X < \infty$  (что является необходимым условием для вложения в  $\mathbb{C}^N$ ), Вигман [134] установил соответствие между вложениями пространства Штейна  $(X, \mathcal{O})$  в  $\mathbb{C}^N$  и конечно порожденными плотными подалгебрами в алгебре Штейна  $\mathfrak{A}$ .

В случае, когда  $X$  —  $n$ -мерное многообразие Штейна, оценка  $2n+1$  для числа  $N$  была в дальнейшем сильно снижена. Форстер [51, 52] доказал, что  $X$  всегда допускает вложение в  $\mathbb{C}^{2n}$ , а при  $n \geq 6$  — в  $\mathbb{C}^{2n-k}$ , где  $k = \left\lfloor \frac{n-2}{3} \right\rfloor$ , и что  $X$  всегда допускает погружение в  $\mathbb{C}^{2n-1}$ . В то же время для всякого  $n$  существует  $n$ -мерное многообразие Штейна  $X$ , не допускающее вложения в  $\mathbb{C}^N$  и погружения в  $\mathbb{C}^{N-1}$ , где  $N = n + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ . М. Л. Громов и Я. М. Элиашберг [2] показали, что  $X$  всегда вкладывается в  $\mathbb{C}^N$  и погружается в  $\mathbb{C}^{N-2}$ , где  $N = \left\lfloor \frac{3n}{2} \right\rfloor + 2$ . Заметим, что Стеле [123] дал явную конструкцию вложения единичного круга в  $\mathbb{C}^2$ .

Нарасимхан [101, 102] называет голоморфное отображение  $X \rightarrow \mathbb{C}^N$  сильно собственным, если его проекции на все  $(N-1)$ -мерные координатные подпространства являются собственными. Доказывается, что для  $n$ -мерного многообразия Штейна  $X$  любые два сильно собственных вложения  $X \rightarrow \mathbb{C}^N$ , где  $N \geq 2n+3$ , голоморфно изотопны. Пусть  $X$  связно и  $Y$  — его замкнутое подмногообразие. Тогда каждое сильно собственное вложение  $Y \rightarrow \mathbb{C}^{2n+1}$  продолжается до вложения  $X \rightarrow \mathbb{C}^{2n+1}$ . Множество сильно собственных вложений  $x \rightarrow \mathbb{C}^{2n+2}$  плотно в  $\mathbb{Q}^{2n+2}$ .

## § 5. ПРОБЛЕМА ЛЕВИ

Полунепрерывная сверху вещественная функция в области  $D \subset \mathbb{C}^n$  называется плюрисубгармонической, если ее ограничение на любую аффинную комплексную прямую с  $\mathbb{C}^n$  субгармонично. Функция  $\varphi$  в  $D$  называется строго плюрисубгармонической, если для любой финитной вещественной гладкой функции  $\theta$  в  $D$  существует такое  $\epsilon > 0$ , что  $\varphi + t\theta$  плюрисубгармонична при  $|t| < \epsilon$ . Если  $\varphi$  — вещественная функция класса  $C^2$ , то можно определить эрмитову форму  $L(\varphi)_x = \sum \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_\alpha \partial \bar{z}_\beta}(x) u_\alpha \bar{u}_\beta$  ( $x \in D$ ), которая называется формой Леви.

Оказывается, что  $\varphi$  плюрисубгармонична (строго плюрисубгармонична) тогда и только тогда, когда  $L(\varphi)_x \geq 0$  (соответственно, положительно определена) для всех  $x \in D$ . Плюрисубгармонические функции были введены в рассмотрение Ока и Лелоном 30 лет назад (заметим, что Ока назвал эти функции псевдовыпуклыми, причем этот термин приобретает в последние годы все большее распространение).

Мы будем рассматривать в этом параграфе только приведенные комплексные пространства. Для такого пространства также можно ввести понятие плюрисубгармонической функции. Пусть  $X$  — аналитическое множество в области

$D \subset \mathbb{C}^n$ . Функция  $\varphi$  на  $X$  называется (строго) плюрисубгармонической, если  $\varphi$  в некоторой окрестности  $V$  каждой точки  $x \in X$  продолжается до (строго) плюрисубгармонической функции в  $V$ . Далее, функция  $\varphi$  на приведенном комплексном пространстве называется (строго) плюрисубгармонической, если в некоторой окрестности каждой точки она отождествляется с (строго) плюрисубгармонической функцией на соответствующей локальной модели.

Область  $D$  в приведенном комплексном пространстве называется (строго) псевдовыпуклой, если для всякой точки  $x \in \partial D$  найдутся ее окрестность  $U$  в  $X$  и (строго) плюрисубгармоническая функция  $\varphi$  в  $U$ , такие, что  $D \cap U = \{x \in U \mid \varphi(x) < 0\}$ . Для относительно компактной строго псевдовыпуклой области функция  $\varphi$  может быть задана глобально в некоторой окрестности границы  $\partial D$  [67].

Комплексное пространство  $X$  называется (строго) псевдовыпуклым, если на  $X$  существует такая непрерывная (строго) плюрисубгармоническая функция  $\varphi$ , что множества  $\{x \in X \mid \varphi(x) < c\}$  ( $c \in \mathbb{R}$ ) относительно компактны в  $X$ .

В 1910 г. Леви заметил, что область голоморфности  $D \subset \mathbb{C}^n$  с достаточно гладкой границей является псевдовыпуклой областью в смысле определения, данного выше. Область голоморфности  $D$  является также псевдовыпуклым многообразием в смысле данного выше определения; например, если  $D$  ограничена, то можно положить  $\varphi(x) = -\log d(x)$ , где  $d(x)$  — расстояние от точки  $x$  до  $\partial D$  (см. [1, 5, 72, 79], где рассмотрены различные определения псевдовыпуклой области в  $\mathbb{C}^n$ ). Обратный вопрос — будет ли область в  $\mathbb{C}^n$ , являющаяся псевдовыпуклым многообразием, областью голоморфности — получил название проблемы Леви (некоторые авторы называют его обратной проблемой Гартогса). Утвердительный ответ на этот вопрос был дан только в 1953—54 гг. в работах Ока [105], Норге [104] и Бремермана [30]. На самом деле Ока доказал даже, что если псевдовыпуклое многообразие  $M$  является областью наложения над  $\mathbb{C}^n$ , то  $M$  — область голоморфности и, в частности, многообразие Штейна.

В 1958—1962 гг. аналогичная проблема была поставлена и решена Грауртом [65] и Нарасимханом [97, 98] для комплексных пространств. Их основные результаты состоят в следующем. Пусть  $D$  — относительно компактная строго псевдовыпуклая область в комплексном пространстве  $X$ , определенная в окрестности границы непрерывной строго псевдовыпуклой функцией,  $F$  — когерентный аналитический пучок на  $X$ . Тогда  $\dim H^p(D, F) < \infty$  ( $p > 0$ ). Далее,  $D$  — голоморфно выпуклое пространство конечного типа. Отсюда выводится, что комплексное пространство  $X$  является штейновым тогда и только тогда, когда оно строго псевдовыпукло. Достаточно даже, чтобы  $X$  было псевдовыпуклым и чтобы на  $X$  существо-

вала непрерывная строго псевдовыпуклая функция. Нарасимхан [98] доказал также, что комплексное пространство  $X$  удовлетворяет условию  $\dim H^p(X, F) < \infty$  ( $p > 0$ ) для любого когерентного аналитического пучка  $F$  на  $X$  тогда и только тогда, когда  $X$  конечного типа. При этом  $H^p(X, F) \cong \cong H^p(K, F)$  ( $p > 0$ ), где  $K$  — максимальное компактное аналитическое множество в  $X$ .

Ряд работ в последующие годы был посвящен уточнению перечисленных выше результатов, а также их новым доказательствам. В работе Рихберга [109] доказано, что строго псевдовыпуклую область в паракомпактном комплексном пространстве всегда можно задать в окрестности граничной точки при помощи непрерывной строго плюрисубгармонической функции (в [98] это было доказано в предположении, что определяющая функция удовлетворяет условию Липшица). Это позволяет снять условие непрерывности в сформулированной выше теореме Грауэрта — Нарасимхана о строго псевдовыпуклых областях. Нарасимхан указал пример относительно компактной нестрого псевдовыпуклой области  $D$  с гладкой границей в двумерном комплексном торе  $X$ , не допускающей непостоянных голоморфных функций и потому не голоморфно выпуклой. Грауэрт [68] построил аналогичный пример псевдовыпуклой области  $D \subset X$ , где  $\dim X \geq 3$  и алгебра голоморфных функций на  $D$  не является штейновой. Примеры псевдовыпуклых, но не голоморфно выпуклых областей дал также Кадзивара [80].

С другой стороны, развивались и совершенствовались методы, предложенные Ока для решения проблемы Леви в областях над  $\mathbb{C}^n$ . Уже давно было известно, что псевдовыпуклая область локально (в окрестности каждой точки границы) является штейновой. Основная лемма Ока утверждает, что объединение двух штейновых областей при определенных условиях является штейновой областью. Обобщение этой леммы позволило Нисино [103], а затем Андреотти и Нарасимхану [12] дать доказательства теоремы о штейновости строго псевдовыпуклого комплексного пространства, отличные от доказательства Нарасимхана [98]. Были также выделены некоторые случаи, когда из нестрогой псевдовыпуклости комплексного пространства  $D$  следует его штейновость. Докье и Грауэрт [40] показали, что это верно в случае, когда  $D$  — область наложения над многообразием Штейна, что непосредственно обобщает теорему Ока [105], а Андреотти и Нарасимхан [12] — в случае, когда  $D$  — относительно компактная псевдовыпуклая область с глобально определенной границей в  $K$ -полном пространстве. Фудзита [60] доказал, что на любой некомпактной псевдовыпуклой области наложения  $D$  над проективным пространством  $P^n$  существует непрерывная строго плюрисубгармоническая функция, откуда следует, что

$D$  — многообразие Штейна. Такэути [127] показал, что такой функцией на  $D$  является  $\log d(x)$ , где  $d$  — расстояние до  $\partial D$  в смысле кэлеровой метрики на  $P^n$ . Прямое доказательство того, что область голоморфности над  $P^n$  является многообразием Штейна, дал Хираи [73]. Результат Фудзита и Такэути в случае однолистных областей был переформулирован Кизельманом [87] следующим образом: область  $D \subset P^n$  является многообразием Штейна тогда и только тогда, когда ее прообраз  $\tilde{D} \subset \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$  обладает тем свойством, что  $\tilde{D} \cap H_a$  псевдовыпукла в подпространстве  $H_a = \{\sum a_i \zeta_i = 1\}$  для всех  $a$ ,  $|a| = 1$ . Фудзита [61] доказал, что псевдовыпуклая область наложения над произведением проективных пространств штейнова тогда и только тогда, когда она не содержит одномерных компактных аналитических подмножеств. Хиршовиц [75] изучал с этой точки зрения области наложения над многообразиями Грассмана. Обобщая свой указанный выше результат, Такэути [128] доказал следующую теорему. Пусть  $D$  — некомпактная псевдовыпуклая область наложения над многообразием  $V$ , образ которой относительно компактен в  $V$ . Если  $V$  — кэлерово многообразие, на котором существует строго плюрисубгармоническая функция, то  $D$  — многообразие Штейна. Эти условия, в частности, выполнены, если на  $V$  существует гладкая строго плюрисубгармоническая функция. Заметим в связи с этим, что многообразия в указанных выше примерах Грауэрта и Кадзивары могут быть реализованы как разветвленные области над  $P^n$  и  $\mathbb{C}^n$  соответственно, так что для разветвленных областей проблема Леви решается отрицательно.

С проблемой Леви тесно связано изучение так называемых пар Рунге, т. е. пар  $Y \subset X$ , где  $X$  — комплексное пространство,  $Y$  — его открытое подпространство, обладающих тем свойством, что ограничение алгебры функций  $\mathfrak{A}(X)$  плотно в  $\mathfrak{A}(Y)$ . Пространство  $X$  называется голоморфным растяжением открытого множества  $Y \subset X$ , если существует такое семейство  $\{Y_t\}_{0 < t < 1}$  строго псевдовыпуклых относительно компактных открытых  $Y_t \subset X$ , что  $Y_0 = Y$ ,  $Y_1 = X$ ,  $\bigcup_{t_0 < t < t_0} Y_t = Y_{t_0}$  и  $\bigcap_{t_0 < t} Y_t = \bar{Y}_{t_0}$ ,  $(0 \leq t_0 \leq 1)$ . Согласно Докье и Грауэрту [40], пара многообразий Штейна  $Y \subset X$  есть пара Рунге тогда и только тогда, когда  $X$  является голоморфным растяжением множества  $Y$ . Нарасимхан [98] и Рихберг [109] показали, что если пространство  $X$  является голоморфным растяжением некоторого  $Y$ , то  $X$  — пространство конечного типа и  $Y \subset X$  — пара Рунге. Если при этом  $Y$  штейново, то и  $X$  штейново. Близкий результат получил Ватари [131].

В работах Кона и Хёрмандера к изучению проблемы Леви на комплексных многообразиях были применены методы тео-

при дифференциальных уравнений. Кон [88, 89] рассматривает относительно компактную строго псевдовыпуклую область  $D$  с гладкой границей в многообразии  $M$ . На  $M$  строится эрмитова метрика, кэлерова в окрестности границы  $\partial D$ . Используя эту метрику, автор строит аналог разложения Ходжа для дифференциальных форм на  $D$ , гладких вплоть до границы. В качестве следствий выводится, что  $D$  голоморфно выпукло и что классы  $\bar{\partial}$ -когомологий многообразия  $D$  представляются гармоническими формами. Используя оценки в  $L^2$  для решений уравнения  $\bar{\partial}\alpha = \beta$ , Хёрмандер [78, 79] доказывает, что  $H^p(D, 0) = 0$  ( $p > 0$ ) для любой псевдовыпуклой области  $D \subset \mathbb{C}^n$ , откуда выводится, что  $D$  — область голоморфности. С помощью тех же методов он доказывает [79], что комплексное многообразие  $X$  является многообразием Штейна тогда и только тогда, когда на  $X$  существует такая гладкая строго плюрисубгармоническая функция  $\varphi$ , что множества  $\{x \in X | \varphi(x) < c\}$  ( $c \in \mathbb{R}$ ) относительно компактны.

Заметим еще, что Адиб [7] дал следующую характеристику строго псевдовыпуклых областей. Пусть  $D \subset X$  — область с границей класса  $C^2$ , причем функции, задающие границу, имеют невырожденную форму Леви. Тогда  $D$  строго псевдовыпукла в том и только том случае, когда для каждой  $p \in \partial D$  найдется голоморфная функция  $f$  в окрестности множества  $\bar{D}$ , для которой  $|f(p)| > |f(q)|$  ( $q \in \bar{D}$ ,  $q \neq p$ ).

В последние годы интенсивно изучается проблема Леви для областей в бесконечномерных векторных топологических пространствах. Пусть  $E$  — локально выпуклое векторное топологическое пространство над  $\mathbb{C}$ ,  $D$  — область в  $E$ . Область  $D$  называется псевдовыпуклой, если в  $D$  существует плюрисубгармоническая функция  $\varphi$ , такая, что  $\varphi(x) \rightarrow \infty$ , если  $x \rightarrow x_0 \in \partial D$  (определение плюрисубгармонической функции такое же, как в конечномерном случае [36]). Если  $D$  является областью голоморфности, т. е. в  $D$  существует голоморфная функция, которую нельзя продолжить в большую область, то  $D$  псевдовыпукла [38]. Обратная теорема доказана только для некоторых классов пространств  $E$ . А именно, Хиршовиц [74, 77] доказал ее в случае, когда  $E$  — счетное произведение комплексных прямых. Динин и Хиршовиц [37, 39] положительно решили проблему Леви в случае, когда  $E$  — банахово пространство с базисом, а пересечение области  $D$  с любым конечномерным аффинным подпространством полиномиально выпукло. Затем Динин [38] распространил этот результат на случай, когда  $E$  — пространство Фреше с базисом. Наконец, Груман и Кизельман [70] анонсировали решение проблемы Леви в банаховом пространстве с базисом без предположения полиномиальной выпуклости.

## § 6. ПРИНЦИП ОКА И ГОЛОМОРФНЫЕ РАССЛОЕНИЯ НАД ПРОСТРАНСТВАМИ ШТЕЙНА

Как видно из перечисленных выше результатов теории пространств Штейна, свойства этих пространств во многом аналогичны свойствам гладких многообразий. Например, гладкие многообразия реализуются как гладкие подмногообразия в  $\mathbf{R}^N$ , а многообразия Штейна — как аналитические подмногообразия в  $\mathbf{C}^N$ ; числа Бетти гладкого многообразия можно вычислить при помощи гладких форм, а числа Бетти многообразия Штейна — при помощи голоморфных форм. Эта аналогия часто проявляется и в более конкретном виде. Мы имеем в виду такое положение, когда некоторая задача на многообразии Штейна разрешима в классе аналитических функций в том и только том случае, когда она разрешима в классе гладких или даже непрерывных функций (в этом случае говорят, что данная задача удовлетворяет принципу Ока). Одно из первых наблюдений такого рода относится ко 2-ой проблеме Кузена, препятствие к разрешимости которой на многообразии Штейна является чисто топологическим. Глубоким обобщением этого факта являются результаты Грауэрта о классификации голоморфных расслоений над многообразиями Штейна, к описанию которых мы переходим.

Пусть  $X$  — приведенное комплексное пространство,  $G$  — комплексная группа Ли,  $E$  — голоморфное расслоение с базой  $X$  и слоем  $G$ , структурной группой которого является некоторая группа автоморфизмов группы  $G$ . Тогда пучок ростков голоморфных сечений  $O(E)$  расслоения  $E$  является пучком групп на  $X$ . С  $O(E)$  можно связать группу 0-мерных когомологий или сечений  $H^0(X, O(E)) = \Gamma(X, O(E))$ , совпадающую с группой голоморфных сечений расслоения  $E$ , и пунктированное множество 1-мерных когомологий  $H^1(X, O(E))$ , элементы которого интерпретируются как классы эквивалентных между собой  $E$ -главных голоморфных расслоений с базой  $X$ . Аналогично, пучок  $C(E)$  ростков непрерывных сечений расслоения  $E$  дает группу  $H^0(X, C(E)) = \Gamma(X, C(E))$  всех непрерывных сечений расслоения  $E$  и пунктированное множество  $H^1(X, C(E))$  классов  $E$ -главных топологических расслоений. В случае, когда  $E$  тривиально, мы получаем соответственно группу всех голоморфных или непрерывных отображений  $X \rightarrow G$  и множество классов главных голоморфных или топологических расслоений с группой  $G$ . Вложение пучков  $i: O(E) \rightarrow C(E)$  порождает гомоморфизмы:

$$\begin{aligned} i_0^* &: \Gamma(X, O(E)) \rightarrow \Gamma(X, C(E)) \\ i_1^* &: H^1(X, O(E)) \rightarrow H^1(X, C(E)). \end{aligned}$$

Грауэрт доказал [63, 64], что в случае, когда  $X$  — пространство Штейна,  $i_0^*$  порождает изоморфизм между группами связанных компонент левой и правой частей, а  $i_1^*$  является изомор-

физмом. Это значит, во-первых, что гомотопическая классификация голоморфных сечений совпадает с гомотопической классификацией непрерывных сечений, и, во-вторых, что классификация голоморфных  $E$ -главных расслоений совпадает с классификацией топологических  $E$ -главных расслоений. При этом первый результат остается справедливым, если рассматривать гомотопическую классификацию тех сечений, которые на заданном аналитическом подмножестве  $A \subset X$  совпадают с заданным сечением  $s \in \Gamma(A, O(E|A))$ . Заметим, что усовершенствованное изложение теорем Грауэрта было дано Картаном [33].

Перейдем теперь к обобщениям и некоторым приложениям результатов Грауэрта, которые были получены в последующие годы. Бунгарт [32] обобщил теоремы Грауэрта на случай, когда  $G$  — банахова комплексная группа Ли. Кадзивара и Кадзава [85] получили относительный вариант этого результата. А именно, пусть  $E$  — голоморфное расслоение на банаховы комплексные группы Ли над  $X$ ,  $A$  — аналитическое множество в  $X$ ,  $O(E, A)$  и  $C(E, A)$  — подпучки в  $O(E)$  и  $C(E)$ , состоящие из ростков сечений, равных 1 на  $A$ . Доказывается, что если  $X$  — пространство Штейна, то естественное отображение  $H^1(X, O(E, A)) \rightarrow H^1(X, C(E, A))$  является изоморфизмом. Отсюда следует, что голоморфное сечение расслоения  $E$  над  $A$  продолжается на все  $X$  тогда и только тогда, когда оно продолжается до непрерывного сечения. Случай, когда  $E$  — тривиальное расслоение с абелевым слоем, был рассмотрен одним из авторов ранее [83, 84]. Другой результат Кадзивара [82] утверждает, что если  $D$  — область в  $\mathbb{C}^n$  и  $H^1(D \cap \bar{P}, O(G)) = 0$  для любой комплексной абелевой группы Ли  $G$  и любого одноосязного цилиндра  $P \subset \mathbb{C}^n$ , то  $D$  — область голоморфности.

Рамшпотт [106, 107] обобщил теорему о гомотопической классификации сечений на случай, когда слой является комплексным однородным пространством комплексной группы Ли  $G$ , а структурная группа есть замкнутая комплексная подгруппа Ли в  $G$ . Отметим в связи с этим следующий результат Рамшпотта [108]: если  $X$  — многообразие Штейна, то  $\dim X \leq n$  тогда и только тогда, когда для всякого подмногообразия  $Y \subset X$  голоморфное отображение  $Y \rightarrow Q_n$ , где  $Q_n$  —  $n$ -мерная аффинная комплексная квадратика, продолжается на все  $X$ . Форстер и Рамшпотт [55] выделили класс пар  $F \subset G$  пучков групп на комплексном пространстве, близких по своим свойствам к паре  $O(E) \subset C(E)$  и удовлетворяющих условиям, близким к теоремам Грауэрта (так называемые пары Ока). Найдены условия, достаточные для того, чтобы пара пучков  $F \subset G$  являлась парой Ока.

Эти результаты были применены к решению следующей задачи. Пусть  $X$  — многообразие Штейна,  $Y \subset X$  — подмного-

образе чистой коразмерности  $k$ . Подмногообразие  $Y$  называется полным пересечением, если идеал  $\mathfrak{I}(Y)$  всех голоморфных функций на  $X$ , равных 0 на  $Y$ , порожден  $k$  элементами. Нужно найти условия, при которых  $Y$  будет полным пересечением. Форстер и Рамшпott [56] свели эту задачу к чисто топологическому вопросу о существовании непрерывного сечения в некотором расслоении. Отсюда вытекают следующие результаты. Если  $\dim Y < \frac{1}{2} \dim X$ , то  $Y$  является полным

пересечением тогда и только тогда, когда нормальное расслоение  $N(Y)$  над  $Y$  тривиально. В частности, неособая кривая в многообразии Штейна размерности  $\geq 3$  является полным пересечением (частный случай, когда  $X = \mathbb{C}^n$ , опубликован в [54]). Если  $X = \mathbb{C}^n$  и  $n \leq 6$ , то  $Y$  — полное пересечение тогда и только тогда, когда класс Чжэня  $C_1(Y) = 0$ . При рассмотрении той же задачи Шнейдер [113] ввел новый инвариант  $\beta(Y) \in H^{2h}(X, \mathbb{Z})$  — двойственный к  $Y$  класс когомологий. Если  $Y$  — полное пересечение, то  $\beta(Y) = 0$ . Если  $\dim Y < \frac{1}{3} (2 \dim X - 1)$  и  $H^{q+1}(X, \pi_q(S^{2h-1})) = 0$  ( $q \geq 2k$ ) (напри-

мер, если  $\dim Y = \frac{1}{2} \dim X$ ), то из тривиальности расслоения

$N(Y)$  и класса  $\beta(Y)$  следует, что  $Y$  — полное пересечение. Шнейдер изучал также вопрос, какие классы из  $H^{2h}(X, \mathbb{Z})$  двойственны некоторым подмногообразиям. В частности, он доказал, что при  $k = \frac{1}{2} \dim X$  этим свойством обладают классы, делящиеся на  $(k-1)!$

Форстер доказал [50], что если  $n$ -мерное подмногообразие  $Y \subset \mathbb{C}^N$  является полным пересечением, то  $Y$  параллелизуемо. Обратно, если  $N \geq \frac{3}{2} n + 1$  и  $Y$  параллелизуемо, то

$Y$  — полное пересечение. Отсюда следует, что многообразие Штейна параллелизуемо тогда и только тогда, когда оно вкладывается в некоторое  $\mathbb{C}^N$  как полное пересечение. Если  $\dim X \leq 5$ , то для параллелизуемости многообразия Штейна  $X$  необходимо и достаточно, чтобы  $C_1(X) = C_2(X) = 0$ .

Пусть  $\mathfrak{M}$  — штейнов модуль над алгеброй Штейна  $\mathfrak{A}$ . Форстер и Рамшпott [57] изучали гомотопическую классификацию систем образующих модуля  $\mathfrak{M}$ , имеющих заданную длину  $r$ . Оказывается, что две такие системы гомотопны тогда и только тогда, когда они переводятся друг в друга обратимой квадратной матрицей порядка  $r$  над  $\mathfrak{A}$ , гомотопной единичной матрице. В частности, если  $\mathfrak{M}$  — идеал в  $\mathfrak{A} = \Gamma(\mathbb{C}^n, \mathcal{O})$  и  $r = n - 1$ , то гомотопические классы систем образующих находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами группы  $H^1(Y, \mathbb{Z})$ , где  $Y \subset \mathbb{C}^n$  — множество нулей идеала  $\mathfrak{M}$ .

Остановимся теперь на следующей задаче о голоморфных расслоениях, поставленной 20 лет назад и до сих пор еще не решенной: будет ли пространством Штейна локально тривиальное голоморфное расслоение, база и слой которого штейновы? Мацусима и Моримото [95] доказали, что ответ утвердителен в случае, когда база и слой — многообразия, а структурная группа  $G$  — связная комплексная группа Ли. Фишер [44] переделал эту теорему для комплексных пространств и при этом ослабил условие на структурную группу, воспользовавшись результатом Штейна [124] о том, что накрытие пространства Штейна является пространством Штейна. Условие Фишера состоит в том, что подгруппа элементов из  $G$ , переводящих в себя связную компоненту слоя, должна иметь конечное число связных компонент.

Далее, Фишер [46] ввел следующее новое понятие. Пусть  $Y$  — комплексное пространство,  $G$  — некоторая группа его автоморфизмов. Пространство  $Y$  называется пространством Банаха — Штейна (соответственно Гильберта — Штейна) относительно  $G$ , если в пространстве  $\mathfrak{A}(Y)$  голоморфных функций на  $Y$  существует банахово (гильбертово) подпространство  $E$ , обладающее следующими свойствами:  $E$  разделяет точки пространства  $Y$ ; для любой дискретной последовательности  $M \subset Y$  существует функция из  $E$ , не ограниченная на  $M$ ; вложение  $\tilde{E} \rightarrow \mathfrak{A}(Y)$  непрерывно;  $\varphi^*(E) = E$  и  $\varphi^*|_E$  непрерывно ( $\varphi \in G$ ); если задано голоморфное семейство автоморфизмов  $\Phi: S \rightarrow \text{Aut } Y$ , где  $S$  — комплексное пространство, и  $\Phi(S) \subset G$  то отображение  $s \rightarrow \overline{\Phi(s)}^*|_E$  ( $s \in S$ ) голоморфно. Доказывается [46], что локально тривиальное голоморфное расслоенное пространство с базой  $X$ , слоем  $Y$  и структурной группой  $G$  является пространством Штейна, если  $X$  — пространство Штейна, а  $Y$  — пространство Банаха — Штейна относительно  $G$ . Первоначальное доказательство Фишера [44] относилось к гильбертову случаю, а доказательство в банаховом случае опубликовали также Анкона и Спедер [10]. Фишер [45, 46] доказал также, что ограниченная область голоморфности  $D \subset \mathbb{C}^n$  является пространством Гильберта — Штейна в каждом из следующих случаев: 1)  $n=1$  и  $\pi_1(Y)$  конечно порождена; 2)  $\text{Aut } Y$  компактна; 3)  $Y$  — строго псевдовыпуклая область с гладкой границей; 4)  $Y$  однородна.

Кёнигсбергер [90, 91] рассматривает ту же задачу в случае, когда база — многообразие Штейна, а слой — ограниченная область голоморфности в  $\mathbb{C}^n$ , керифункция которой бесконечна на границе. Он доказывает, что пространство такого расслоения строго псевдовыпукло и, следовательно, штейново (см. § 5).

Отметим еще результат Фишера [43], утверждающий, что линейное расслоенное пространство (в смысле Грауэрта) над пространством Штейна есть пространство Штейна.

## БИБЛИОГРАФИЯ

1. **Владимиров В. С.**, Методы теории функций многих комплексных переменных. М., «Наука», 1964, 411 с. (РЖМат, 1966, 2Б201)
2. **Громов М. Л.**, Элиашберг Я. М., Неособые отображения многообразий Штейна. Функц. анализ и его прилож., 1971, 5, № 2, 82—83 (РЖМат, 1971, 12А725)
3. **Гутенмахер В. Л.**, Конструкция одной области голоморфности. Успехи мат. наук, 1971, 26, № 1, 223—224 (РЖМат, 1971, 7А609)
4. **Панков А. А.**, О некоторых пучках, связанных с голоморфными банаховыми расслоениями. В сб. «Мат. исследования», т. 7. Вып. 1. Кишинев, «Шттинца», 1972, 108—115 (РЖМат, 1972, 6А575)
5. **Фукс Б. А.**, Теория аналитических функций многих комплексных переменных. Ч. I. Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных. М., Физматгиз, 1962, 419 с. (РЖМат, 1963, 12Б219)
6. —, Специальные главы теории аналитических функций многих комплексных переменных. М., Физматгиз, 1963, 427 с. (РЖМат, 1964, 8Б140)
7. **Adib A. F.**, Global characterization of strongly pseudoconvex domains. Proc. Math. and Phys. Soc. UAR, 1967 (1969), № 31, 89—92 (РЖМат, 1970, 12А500)
8. **Aeppli A.**, On determining sets in a Stein manifold. Proc. Conf. Complex Analysis, Minneapolis, 1964. Berlin—Heidelberg—New York, 1965, 48—58 ((РЖМат, 1966, 4А260)
9. —, On the cohomology structure of Stein manifolds. Proc. Conf. Complex Analysis, Minneapolis, 1964. Berlin—Heidelberg—New York, 1965, 58—70 (РЖМат, 1966, 4А261)
10. **Ancona V.**, Speder J.-P., Espaces de Banach—Stein. Ann. Scuola norm. super. Pisa. Sci. fis. e mat., 1971 (1972), 25, № 4, 683—690 (РЖМат, 1972, 8А653)
11. **Andreotti A.**, Frankel T., The Lefschetz theorem on hyperplane sections. Ann. Math., 1959, 69, № 3, 713—717 (РЖМат, 1961, 7А385)
12. —, Narasimhan R., Oka's Heftungslemma and the Levi problem for complex spaces. Trans. Amer. Math. Soc., 1964, 111, № 2, 345—366 (РЖМат, 1965, 1А348)
13. —, Vesentini E., Les théorèmes fondamentaux de la théorie des espaces holomorphiquement complets. Cahiers sémin. topol. et géom. différent. Ch. Ehresmann. Fac. sci. Paris, 1962—1963, 4 (РЖМат, 1965, 9А341)
14. **Bănică C.**, Teoreme de dualitate pe varietăți Stein și coomologie cu suport compact. Stud. și cerc. mat., 1971, 23, № 4, 523—559 (РЖМат, 1972, 1А955)
15. —, Un théorème concernant la séparation de certains espaces de cohomologie. C. r. Acad. sci., 1971, 272, № 12, А782—А785 (РЖМат, 1971, 11А543)
16. —, Dumă A., Stănășilă O., Proprietăți ale spațiilor Stein (Consecințe ale teoremelor A și B). Stud. și cercetări mat. Akad. RSR, 1969, 21, № 6, 877—907 (РЖМат, 1970, 3А687)
17. —, Stănășilă O., Sur les ouverts de Stein dans un espace complexe. C. r. Acad. sci., 1969, 268, № 18, А1024—А1027 (РЖМат, 1970, 2А542)
18. —, —, Sur la profondeur d'un faisceau analytique cohérent sur un espace de Stein. C. r. Acad. sci., 1969, 269, № 15, А636—А639 (РЖМат, 1970, 5А517)
19. —, —, Sur les morphismes dans un espace de Stein. Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1969, 46, № 6, 650—652 (РЖМат, 1970, 10А393)
20. —, —, Problème de Poincaré pour un espace de Stein. Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1969, 47, № 1—2, 25—26 (РЖМат, 1970, 10А394)

21. —, —, A result on section algebras over complex spaces. *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur.*, 1969 (1970), 47, № 5, 233—235 (PЖMar, 1970, 12A503)
22. —, —, A structure theorem for the analytic coherent sheaves. *Boll. Unione mat. ital.*, 1969, 2, № 6, 615—621 (PЖMar, 1970, 11A436)
23. —, —, Sur les germes de faisceaux analytiques cohérents définis autour de la frontière d'un espace de Stein. *C. r. Acad. sci.*, 1970, 270, № 4, A239—A241 (PЖMar, 1970, 7A565)
24. —, —, Sur la cohomologie des faisceaux analytiques cohérents à support dans un compact holomorphe-convexe. *C. r. Acad. sci.*, 1970, 270, № 18, A1174—A1177 (PЖMar, 1970, 10A392)
25. —, —, Quelques conditions pour qu'un espace complexe soit un espace de Stein. *Espaces analytiques. Sémin. Inst. Math. Acad. RSR, Bucarest*, 1971, 159—164 (PЖMar, 1972, 2A824)
26. **Bigolin B.**, Gruppi di Aeppli. *Ann. Scuola norm. super. Pisa. Sci. fis. e mat.*, 1969, 23, № 2, 259—287 (PЖMar, 1970, 4A551)
27. **Bishop E.**, Mappings of partially analytic spaces. *Amer. J. Math.*, 1961, 83, № 2, 203—242 (PЖMar, 1964, 2B223)
28. —, Partially analytic spaces. *Amer. J. Math.*, 1961, 83, № 4, 669—692 (PЖMar, 1964, 9A318)
29. —, Analytic functions with values in a Frechet space. *Pacif. J. Math.*, 1962, 12, № 4, 1177—1192 (PЖMar, 1964, 12B387)
30. **Bremermann H.**, Über die Äquivalenz der pseudokonvexen Gebiete und der Holomorphiegebiete im Raum von  $n$  komplexen Veränderlichen. *Math. Ann.*, 1954, 128, № 1, 63—81 (PЖMar, 1956, 2167)
31. **Bungart L.**, Holomorphic functions with values in locally convex spaces and applications to integral formulas. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1964, 111, № 2, 317—344 (PЖMar, 1965, 4B413); Errata: *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1964, 113, № 3, 547 (PЖMar, 1965, 7B397)
32. —, On analytic fiber bundles. I. Holomorphic fiber bundles with infinite dimensional fibers. *Topology*, 1968, 7, № 1, 55—68 (PЖMar, 1968, 6A563)
33. **Cartan H.**, Espaces fibrés analytiques. *Sympos. internac. Topol. Algebraica. Agosto, 1956, México. México*, 1958, 97—121 (PЖMar, 1961, 3A354)
34. —, Quotients of complex analytic spaces. *Contribs Function Theory, Bombay, Tata Inst. Fundament. Res.*, 1960, 1—15 (PЖMar, 1961, 7B114); Русский перевод: «Комплексные пространства». М., 1965, 29—44
35. **Coen S.**, Sul rango dei fasci coerenti. *Boll. Unione mat. ital.*, 1967, 22, № 3, 373—382 (PЖMar, 1968, 4A477)
36. **Coeur G.**, Fonctions plurisousharmoniques sur les espaces vectoriels topologiques et applications à l'étude des fonctions analytiques. *Ann. Inst. Fourier*, 1970, 20, № 1, 361—432 (PЖMar, 1970, 11B176)
37. **Dineen S.**, Fonctions analytiques dans les espaces vectoriels topologiques localement convexes. *C. r. Acad. sci.*, 1972, 274, № 7, A544—A546 (PЖMar, 1972, 7B573)
38. —, Convexité holomorphe en dimension infinie. *Lect. Notes Math.*, 1972, 275, 177—181 (PЖMar, 1973, 1A595)
39. —, **Hirschowitz A.**, Sur le théorème de Lévi banachique. *C. r. Acad. sci.*, 1971, 272, № 19, A1245—A1247 (PЖMar, 1971, 12A727)
40. **Docquier F.**, **Grauert H.**, Levisches Problem und Rungescher Satz für Teilgebiete Steinscher Mannigfaltigkeiten. *Math. Ann.*, 1960, 140, № 2, 94—123 (PЖMar, 1961, 7B123)
41. **Ducourtieux J.-L.**, Sur les extensions de corps de fonctions méromorphes. *C. r. Acad. sci.*, 1971, 273, № 11, A454—A456 (PЖMar, 1972, 3A576)
42. **Ferrari A.**, Cohomology and holomorphic differential forms on complex analytic spaces. *Ann. Scuola norm. super. Pisa. Sci. fis. e mat.*, 1970, 24, № 1, 65—77 (PЖMar, 1970, 12A494)
43. **Fischer G.**, Lineare Faserräume und kohärente Modulgarben über komplexen Räumen. *Arch. Math.*, 1967, 18, № 6, 609—617 (PЖMar, 1969, 4A496)
44. —, Holomorph-vollständige Faserbündel. *Math. Ann.*, 1969, 180, № 4, 341—348 (PЖMar, 1970, 2A544)

45. —, Hilbert spaces of holomorphic functions on bounded domains. *Manuscr. math.*, 1970, 3, № 3, 305—314 (PЖMar, 1971, 5A645)
46. —, Fibrés holomorphes au-dessus d'un espace de Stein. *Espaces analytiques. Sémin. Inst. Math. Acad. RSR, Bucarest*, 1971, 57—69 (PЖMar, 1972, 2A823)
47. Forster O., Primärzerlegung in Steinschen Algebren. *Math. Ann.*, 1964, 154, № 4, 307—329 (PЖMar, 1964, 9A219)
48. —, Uniqueness of topology in Stein algebras. *Function algebras*, 1966, 157—163
49. —, Zur Theorie der Steinschen Algebren und Moduln. *Math. Z.*, 1967, 97, № 5, 376—405 (PЖMar, 1968, 1A615)
50. —, Some remarks on parallelizable Stein manifolds. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1967, 73, № 5, 712—716 (PЖMar, 1968, 6A560)
51. —, Plongements des variétés de Stein. *Comment. math. helv.*, 1970, 45, № 2, 170—184 (PЖMar, 1970, 12A504)
52. —, Topologische Methoden in der Theorie Steinscher Räume. *Actes Congr. int. mathématiciens*, 1970. T. 2. Paris, 1971, 613—618 (PЖMar, 1972, 3A585)
53. —, Ramspott K. J., Über die Darstellung analytischer Mengen. *Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss. Math.-naturwiss. Kl.* 1963, München, 1964, 89—99 (PЖMar, 1965, 2A515)
54. —, —, Singularitätenfreie analytische Raumkurven als vollständige Durchschnitte. *Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss. München. Math.-naturwiss. Kl.* 1965. München, 1966, 1—10 (PЖMar, 1967, 9A359)
55. —, —, Okasche Paare von Garben nicht-abelscher Gruppen. *Invent. math.*, 1966, 1, № 3, 260—286 (PЖMar, 1967, 3A333)
56. —, —, Analytische Modulgarben und Endromisbündel. *Invent. math.*, 1966, 2, № 2, 145—170 (PЖMar, 1967, 9A360)
57. —, —, Homotopieklassen von Idealbasen in Steinschen Algebren. *Invent. math.*, 1968, 5, № 4, 255—276 (PЖMar, 1969, 8A415)
58. —, —, Moduln. *Arch. Math.*, 1968, 19, № 4, 417—422 (PЖMar, 1969, 12A683)
59. Frenkel J., Norguet F., Sur la cohomologie à coefficients complexes des variétés de Stein. *C. r. Acad. sci.*, 1963, 256, № 14, 2988—2989 (PЖMar, 1963, 10A296)
60. Fujita Reiko, Domaines sans point critique intérieur sur l'espace projectif complexe. *J. Math. Soc. Jap.*, 1963, 15, № 4, 443—473 (PЖMar, 1965, 10B95)
61. —, Domaines sans point critique intérieur sur l'espace produit. *J. Math. Kyoto Univ.*, 1965, 4, № 3, 493—514 (PЖMar, 1966, 9B189)
62. Grauert H., Charakterisierung der holomorph-vollständigen komplexen Räume. *Math. Ann.*, 1955, 129, № 3, 233—259 (PЖMar, 1956, 6543)
63. —, Holomorphe Funktionen mit Werten in komplexen Lieschen Gruppen. *Math. Ann.*, 1957, 133, № 5, 450—472 (PЖMar, 1958, 8762)
64. —, Analytische Faserungen über holomorph-vollständigen Räumen. *Math. Ann.*, 1958, 135, № 3, 263—273 (PЖMar, 1959, 6846)
65. —, On Levi's problem and the imbedding of real-analytic manifolds. *Ann. Math.*, 1958, 68, № 2, 460—472 (PЖMar, 1960, 2864); Русский перевод: *Математика, Период. сб. перев. иностр. статей*, 1958, 4, № 3, 29—40 (PЖMar, 1961, 2B92)
66. —, Ein Theorem der analytischen Garbentheorie und die Modulräume komplexer Strukturen. *Publ. math. Inst. hautes études scient.*, 1960, № 5, 1—64 (PЖMar, 1964, 3A278); Русский перевод: *Комплексные пространства. М.*, 1965, 205—312
67. —, Über Modifikationen und exzeptionelle analytische Mengen. *Math. Ann.*, 1962, 146, № 4, 331—368 (PЖMar, 1963, 1B146); Русский перевод: *Комплексные пространства. М.*, 1965, 45—86
68. —, Bemerkenswerte pseudokonvexe Mannigfaltigkeiten. *Math. Z.*, 1963, 81, № 5, 377—391 (PЖMar, 1965, 2A518)

69. —, Remmert R., Komplexe Räume. Math. Ann., 1958, 136, № 3, 245—318 (ПЖМат, 1960, 13750)
70. Gruman L., Kiselman C. O., Le problème de Lévi dans les espaces de Banach à base. C. r. Acad. sci., 1972, 274, № 17, A1296—A1299 (ПЖМат, 1972, 12A478)
71. Gunning R. C., On Cartan's theorems A and B in several complex variables. Ann. mat. pura ed appl., 1961, 55, 1—11 (ПЖМат, 1962, 11A258)
72. —, Rossi H., Analytic functions of several complex variables. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. Y., USA, 1965, 317 pp. (ПЖМат, 1967, 3Б206); Русский перевод: Аналитические функции многих комплексных переменных. М., 1969
73. Hirai Etuko, Domaine d'holomorphic sur un espace projectif complexe. J. Math. Kyoto Univ., 1970, 10, № 1, 83—102
74. Hirschowitz A., Remarques sur les ouverts d'holomorphic d'un produit dénombrable de droites. Ann. Inst. Fourier, 1969, 19, № 1, 219—229 (ПЖМат, 1970, 5A519)
75. —, Sur la géométrie analytique au-dessus des grassmanniennes. C. r. Acad. sci., 1970, 271, № 23, A1167—A1179 (ПЖМат, 1971, 7A612)
76. —, A propos du principe d'Oka. C. r. Acad. sci., 1971, 272, № 12, A792—A794 (ПЖМат, 1971, 11A544)
77. —, Diverses notions d'ouverts d'analyticité en dimension infinie. Lect. Notes Math., 1971, 205, 11—20 (ПЖМат, 1972, 1B721)
78. Hörmander L.,  $L^2$  estimates and existence theorems for the  $\bar{\partial}$  operator. Acta Math., 1965, 113, № 1—2, 89—152 (ПЖМат, 1966, 3Б312)
79. —, An introduction to complex analysis in several variables. Princeton, 1966; Русский перевод: Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных. М., «Мир», 1968, 279 с. (ПЖМат, 1968, 12Б179)
80. Kajiwara Jōji, Note on the Levi problem. Sci. Repts Kanazawa Univ., 1963, 8, № 2, 259—270 (ПЖМат, 1965, 6A294)
81. —, Relations between domains of holomorphy and multiple Cousin's problems. Kodai Math. Semin. Repts, 1965, 17, № 4, 261—272 (ПЖМат, 1967, 6A294)
82. —, Some extensions of Cartan—Behnke—Stein's theorem. Publ. Res. Inst. Math., Sci., 1966, A2, № 1, 133—156 (ПЖМат, 1967, 9A364)
83. —, Oka's principle for the extension of holomorphic mappings. Kodai Math. Semin. Repts, 1966, 18, № 4, 343—346 (ПЖМат, 1967, 8A371)
84. —, Oka's principle for extension of holomorphic mappings. II. Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ., 1967, A21, № 1, 122—131 (ПЖМат, 1968, 1A618)
85. —, Kazawa Hideaki, Oka's principle for relative cohomology sets. Mem. Fac. sci. Kyushu Univ., 1969, A23, № 1, 33—70 (ПЖМат, 1970, 5A523)
86. Kaup L., Eine topologische Eigenschaft Steinscher Räume. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. Math.-phys. Kl., 1966 (1967), № 8, 213—224 (ПЖМат, 1969, 2A574)
87. Kiselman C. O., On entire functions of exponential type and indicators of analytic functionals. Acta Math., 1967, 117, 1—35 (ПЖМат, 1967, 12Б215)
88. Kohn J. J., Harmonic integrals on strongly pseudo-convex manifolds. I. Ann. Math., 1963, 78, № 1, 112—148 (ПЖМат, 1965, 4A321)
89. —, Harmonic integrals on strongly pseudo-convex manifolds. II. Ann. Math., 1964, 79, № 3, 450—472 (ПЖМат, 1966, 1A613); Русский перевод: Математика, Период. сб. пер. ин. статей, 1964, 8, № 1, 108—141; № 3, 80—101
90. Königsberger K., Über die Holomorphic-Vollständigkeit lokal trivialer Faserräume. Math. Ann., 1970, 189, № 3, 178—184 (ПЖМат, 1971, 5A646)
91. —, Komplexe Faserräume mit 1-dimensionalen Fasern. Math. Ann., 1972, 197, № 4, 319—321 (ПЖМат, 1973, 1A592)
92. Kriptide B., Finitely generated coherent analytic sheaves. Proc. Amer. Math. Soc., 1969, 21, № 3, 530—534 (ПЖМат, 1969, 12A679)

93. **Laufer H. B.**, On sheaf cohomology and envelopes of holomorphy. *Ann. Math.*, 1966, 84, № 1, 102—118 (PЖМат, 1968, 2A499)
94. **Lungulescu B.**, Asupra coomologiei unor varietăți Stein. *Stud. și cerc. mat.*, 1970, 22, № 7, 1049—1053 (PЖМат, 1971, 3A456)
95. **Matsushima Yozō, Morimoto Akihiko**, Sur certains espaces libres holomorphes sur une variété de Stein. *Bull. Soc. math. France*, 1960, 88, № 2, 137—155 (PЖМат, 1961, 11A290)
96. **Narasimhan R.**, Imbedding of holomorphically complete complex spaces. *Amer. J. Math.*, 1960, 82, № 4, 917—934 (PЖМат, 1962, 3B151) Русский перевод: *Математика. Период. сб. пер. ин. статей*, 1964, 8, № 6, 141—156
97. —, The Levi problem for complex spaces. I. *Math. Ann.*, 1961, 142, № 4, 355—365 (PЖМат, 1962, 12B145) Русский перевод: *Комплексные пространства. М.*, 1965, 11—28
98. —, The Levi problem for complex spaces. II. *Math. Ann.*, 1962, 146, № 3, 195—216 (PЖМат, 1963, 8A281)
99. —, A note on Stein spaces and their normalisations. *Ann. Scuola norm. super. Pisa. Sci. fis. e mat.*, 1962, 16, № 4, 327—333 (PЖМат, 1964, 3A277)
100. —, On the homology groups of Stein spaces. *Invent. math.*, 1967, 2, № 5, 377—385 (PЖМат, 1968, 1A623)
101. —, On imbeddings of Stein manifolds. *Publs. Ramanujan Inst.*, 1968—1969, № 1, Ananda Rau Mem. Vol., 155—157 (PЖМат, 1971, 3A467)
102. —, On immersions and imbeddings of Stein manifolds. *Sympos. math. Ist. naz. alta mat.*, 1968. Vol. 2. London—New York, 1969, 297—301 (PЖМат, 1970, 5A518)
103. **Nishino Toshio**, Sur les espaces analytiques holomorphiquement complets. *J. Math. Kyoto Univ.*, 1962, 1, № 2, 247—254 (PЖМат, 1963, 1A326)
104. **Norguet F.**, Sur les domaines d'holomorphic des fonctions uniformes de plusieurs variables complexes. (Passage du local au global). *Bull. Soc. Math. France*, 1954, 82, № 2, 137—159 (PЖМат, 1955, 3173)
105. **Oka Kiyoshi**, Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables. IX. Domaines finis sans point critique intérieur. *Нихон сугаку сюхо, Jap. J. Math.*, 1953, 23, 97—155 (PЖМат, 1957, 5513)
106. **Ramspott K. J.**, Über die Homotopieklassen holomorpher Abbildungen in homogene komplexe Mannigfaltigkeiten. *Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss. Math.-naturwiss. Kl.*, 1962 (1963), 57—62 (PЖМат, 1965, 2A519)
107. —, Stetige und holomorphe Schnitte in Bündeln mit homogener Faser. *Math. Z.*, 1965, 89, № 3, 234—246 (PЖМат, 1966, 5A350)
108. —, Eine Charakterisierung der Dimension Steinscher Mannigfaltigkeiten. *Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss. Math.-naturwiss. Kl.*, 1970, München, 1971, 17—23 (PЖМат, 1972, 3A577)
109. **Richberg R.**, Stetige streng pseudokonvexe Funktionen. *Math. Ann.*, 1968, 175, № 4, 257—286 (PЖМат, 1968, 7A524)
110. **Röhrl H., Diego San**, Über die Kohomologie berechenbarer Fréchet Garben. *Comment. math. Univ. Carolinae*, 1969, 10, № 4, 625—640 (PЖМат, 1970, 8A457)
111. **Royden H. L.**, One-dimensional cohomology in domains of holomorphy. *Ann. Math.*, 1963, 78, № 1, 197—200 (PЖМат, 1965, 5A308)
112. **Sato Shawich**, On ideals of meromorphic functions of several complex variables. *Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ.*, 1962, A16, № 2, 101—113 (PЖМат, 1965, 5A307)
113. **Schneider M.**, Vollständige Durchschnitte in Steinschen Mannigfaltigkeiten. *Math. Ann.*, 1970, 186, № 3, 191—200 (PЖМат, 1970, 11A427)
114. **Serre J.-P.**, Géométrie algébrique et géométrie analytique. *Ann. Inst. Fourier*, 1955—1956 (1956), 6, 1—42 (PЖМат, 1958, 2405)
115. **Silici P.**, Une généralisation des théorèmes A et B de Cartan en dimension infinie. *C. r. Acad. sci.*, 1971, 272, № 10, A665—A668 (PЖМат, 1971, 11A547)
116. **Simha R. R.**, On the complement of a curve on a Stein space of dimension two. *Math. Z.*, 1963, 82, № 1, 63—66 (PЖМат, 1964, 3A276)

117. **Siu Yum-Tong**, Non-countable dimensions of cohomology groups of analytic sheaves and domains of holomorphy. *Math. Z.*, 1967, **102**, № 1, 17—29 (PЖMar, 1968, 7A525)
  118. —, A note on Cartan's theorems A and B. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1967, **18**, № 5, 955—956 (PЖMar, 1968, 4A478)
  119. —, A proof of Cartan's theorems A and B. *Tōhoku Math. J.*, 1968, **20**, № 2, 207—213 (PЖMar, 1969, 2A573)
  120. —, Hilbert Nullstellensatz in global complex-analytic case. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1968, **19**, № 2, 296—298 (PЖMar, 1971, 9A532)
  121. —, Analytic sheaf cohomology with compact supports. *Compos. math.*, 1969, **21**, № 1, 52—58 (PЖMar, 1969, 11A481)
  122. —, Noetherianness of rings of holomorphic functions on Stein compact subsets. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1969, **21**, № 2, 483—489 (PЖMar, 1970, 1A555)
  123. **Stehle J.-L.**, Plongements du disque dans  $C^2$ . *Lect. Notes Math.*, 1972, **275**, 119—130 (PЖMar, 1973, 1A587)
  124. **Stein K.**, Überlagerungen holomorph-vollständiger komplexer Räume. *Arch. Math.*, 1956, **7**, № 5, 354—361 (PЖMar, 1958, 8759)
  125. **Succi F.**, Il teorema di de Rham oloomorfo nel caso relativo. *Nota I. Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur.*, 1967, **42**, № 6, 784—791 (PЖMar, 1968, 12A446)
  126. —, Il teorema di de Rham oloomorfo nel caso relativo. *Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur.*, 1967 (1968), **43**, № 5, 276—280 (PЖMar, 1969, 8A409)
  127. **Takeuchi Akira**, Domaines pseudoconvexes infinis et la métrique riemannienne dans un espace projectif. *J. Math. Soc. Jap.*, 1964, **16**, № 2, 159—181 (PЖMar, 1965, 8B143)
  128. —, Domaines pseudoconvexes sur les variétés kähleriennes. *J. Math. Kyoto Univ.*, 1967, **6**, № 3, 323—357 (PЖMar, 1968, 7B125)
  129. **Uzawa Masakatsu**, On Cousin I problem in a domain excluding an analytic set. *Sci. Repts Tokyo Kyoiku Daigaku*, 1968, **A9**, № 220—231, 189—192 (PЖMar, 1969, 2A582)
  130. **Wakabayashi Isao**, A remark on theorem A for Stein spaces. *J. Math. Soc. Japan*, 1967, **19**, № 4, 489—492 (PЖMar, 1968, 6A559)
  131. **Watari Satoru**, A theorem on continuous strongly convex functions in complex spaces. *Proc. kon. ned. akad. wetensch.*, 1972, **A75**, № 1, 62—67; *Indag. math.*, 1972, **34**, № 1, 62—67 (PЖMar, 1972, 9A459)
  132. **Wiegmann K. W.**, Einbettungen komplexer Räume in Zahlenräume. *Invent. math.*, 1966, **1**, № 3, 229—242 (PЖMar, 1967, 5A454)
  133. —, Über Quotienten holomorph-konvexer komplexer Räume. *Math. Z.*, 1967, **97**, № 4, 251—258 (PЖMar, 1968, 1A619)
  134. —, Einige Eigenschaften endlichdicht-erzeugter holomorpher Algebra. *Rev. roum. math. pures et appl.*, 1970, **15**, № 5, 749—759 (PЖMar, 1970, 12A499)
  135. —, Komplexe Unterstrukturen auf Steinschen Räumen. *Rev. roum. math. pures et appl.*, 1972, **17**, № 1, 143—155 (PЖMar, 1972, 9A460)
-