M. A. Kovalevsky, Asymptotics of some functions generalizing the Euler gamma-function, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1981, Volume 104, 123–129

М.А.Ковалевский

АСИМПТОТИКА ФУНКЦИЙ, ЯВЛЯЮЩИХСЯ ОБОБЩЕНИЕМ ГАММА-ФУНКЦИИ ЭЙЛЕРА.

Введение.

Рассмотрим поведение следующих двух функций:

$$G_j(z)=C_j\int_{\mathcal{L}_j} f_j(t)\exp\{S_j(t,z)\}\,dt, \tag{в.I}$$
$$(S_j(t,z)=(-1)^{j+1}(t+\Psi(t)-z\ln(t)),\ j=1,2),$$

при $|z|\to\infty$. Здесь $C_1=1/(2\pi i)$; $\mathcal{L}_1$ - контур, состоящий из 3-х частей: I) прямой $\arg(t)=\pi$, идущей из ∞ до $t=-R$ 2) окружности $|t|=R$, $-\pi\leq\arg(t)\leq\pi$, проходимой против часовой стрелки; 3) прямой $\arg(t)=\pi$, идущей от $t=-R$ в ∞ а $C_2=1$ и $\mathcal{L}$ - положительная часть вещественной оси.

Пусть область $\mathcal{D}_1$ комплексной плоскости t - это: $R-\varepsilon<|t|<\infty$, где $0<\varepsilon<R$ - некоторое число, а $\mathcal{D}_2$ - это: $0<|t|<\infty$. Полагается, что функции $f_j(t)$ и $\Psi_j(t)$ являются в $\mathcal{D}_j$ аналитическими. Далее, в областях $\mathcal{D}_j$ с разрезом по отрицательной части вещественной оси в качестве аналитических элементов $f_j(t)$ и $\Psi_j(t)$ фиксированы некоторые регулярные ветви этих функций, а в качестве аналитического элемента $\ln(t)$ берется главная ветвь.

Обозначим через $\mathcal{D}_1^{(1)}(\varepsilon_1)$ область: $\varepsilon_1-\varepsilon+R<|t|<\infty$, $|\arg(t)|<3\pi/2$, а через $\mathcal{D}_2^{(1)}(\varepsilon_1)$ - область: $\varepsilon_1<|t|<\infty$, $\gamma^{(-)}<\arg(t)<\gamma^{(+)}$. Здесь $\varepsilon_1>0$ - любое, а $\gamma^{(\pm)}$ - любые числа, удовлетворяющие неравенствам: $-\pi<\gamma^{(-)}<0$, $0<\gamma^{(+)}<\pi$. Теперь полагается, что в $\mathcal{D}_j^{(1)}(\varepsilon_1)$ справедливы следующие неравенства:

$$|f_j(t)|<C(\varepsilon_1)|t|^{\delta};\ |\Psi_j(t)^{1-\rho}<C(\varepsilon_1)|t|^{1-\rho},\ (C(\varepsilon_1)>0,\ 0<\rho<1), \tag{в.2}$$

где δ - некоторое число. Кроме того, при $j=2$ дополнительно полагается, что в области: $0<|t|<\varepsilon_1$ выполняется неравенство:

$$|f_2(t)\exp(-t-\Psi_2(t))|<C^*(\varepsilon_1)\exp(\alpha\ln|t|+\beta\arg(t)) \tag{в.3}$$

Здесь α,β и $C^*(\varepsilon_1)>0$ - некоторые числа, и $-\infty<\arg(t)<\infty$

Можно заметить, что при $f_j(t)\equiv 1$ и $\Psi_j(t)\equiv 0$ справедливы равенства:

$$G_1(z)=1/\Gamma(z), \quad G_2(z)=\Gamma(z+1),$$

где $\Gamma(z)$ - гамма-функция Эйлера. Функция $G_2(z)$ исследовалась ранее во многих работах для частных значений $\Psi_2(t)$, например, в (I,2). Необходимость исследования функции $G_2(z)$ в более общем случае, а также $G_1(z)$, вызвана задачей о построении фундаментальных семейств решений некоторых разностных уравнений. Эти уравнения появляются при решении проблемы связи для линейных дифференциальных уравнений с двумя особыми точками, подобно (3,4). Полученная в предлагаемой работе асимптотика $G_j(z)$ при $|z|\to\infty$ является равномерной для $-\pi+\varepsilon\leqslant \arg(z)\leqslant\pi-\varepsilon$ в случае $j=1$, и для $\gamma^{(-)}+\varepsilon\leqslant\arg(z)\leqslant\gamma^{(+)}-\varepsilon$ в случае $j=2$ ($\varepsilon>0$ - любое малое).

§ I. Нахождение точки перевала и удобного для оценок контура интегрирования.

Для определения точек перевала имеем уравнение

$$[S_j(t,z)]'_t=(-1)^{j+1}[1+\Psi_j'(t)-z/t]=0. \tag{I.I}$$

Пусть теперь область $\mathcal{D}_1^{(T)}(K,\varepsilon)$ - это: $K<|z|<\infty, -\pi+\varepsilon<\arg(z)<\pi-\varepsilon$, а $\mathcal{D}_2^{(T)}(K,\varepsilon)$ - это: $K<|z|<\infty, \gamma^{(-)}+\varepsilon<\arg(z)<\gamma^{(+)}-\varepsilon$; и K,ε - некоторые положительные числа. Справедлива следующая лемма, которая дает решение уравнения (I.I).

ЛЕММА I. Для любого малого $\varepsilon>0$ существует такое $K>0$, что при $|t/z-1|<\varepsilon$ и $z\in\mathcal{D}_j^{(T)}(K,\varepsilon)$ существует и единственно решение уравнения (I.I):

$$t=T_n^{(j)}(z)=z\Big\{1-\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{s!}\frac{d^{s-1}}{d\tau^{s-1}}\big[-\Psi_j'((\tau+1)z)*$$
$$*(\tau+1)\big]^s\Big|_{\tau=0}\Big\}. \tag{I.2}$$

Функция $T_n^{(j)}(z)$ регулярна в $\mathcal{D}_j^{(T)}(K,\varepsilon)$ и при $|z|\to\infty$ в этой области справедливо равенство:

$$T_n^{(j)}(z)=z\,[1+O(|z|^{-\rho})],$$

где $0<\rho<1$ взято из (в.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Совершив в (I.I) замену: $t=(\tau+1)z$, получаем:

$$\tau=-\Psi_j'(z(\tau+1))(\tau+1). \tag{I.3}$$

Т.к. функция $\Psi_j(t)$ является аналитической в $\mathcal{D}_j^{(1)}(\mathcal{E}_1)$, и в этой области для нее выполняется неравенство (в.2), то в $\mathcal{D}_j^{(1)}(\mathcal{E}_1)$ выполняется следующее неравенство:

$$|\Psi_j^{(k)}(t)| < C_k(\mathcal{E}_1)|t|^{1-p-k} \qquad (I.4)$$

Применяя к (I.3) теорему Лагранжа, п.7.32 (5), получаем выражение (I.2) и единственность решения уравнения (I.3) в соответствующей области. Регулярность $T_n^{(j)}(z)$ следует из регулярности $\Psi_j'(t)$ и равномерной сходимости ряда (I.2). Из (I.4) при k =I и (I.2) следует асимптотическое выражение для $T_n^{(j)}(z)$ при $|z| \to \infty$

Для удобства изучения (в.I) приведем эти интеграла к виду, в котором точкой перевала является единица. Это достигается заменой $t = T_n^{(j)}(z)w$. В результате, с учетом (I.I), получаем:

$$G_j(z) = C_j T_n^{(j)} G_j^*(z) \int_{\mathcal{L}_j^*(T_n^{(j)})} f_j(T_n^{(j)} w) * \qquad (I.5)$$
$$* \exp\{T_n^{(j)}(-1)^{j+1}[w - 1 - \ln(w) + Q_j(T_n^{(j)}, w)]\} dw.$$

Здесь $\mathcal{L}_j^*(T_n^{(j)})$ – это контур $\mathcal{L}_j$, который повернут по часовой стрелке на угол $\arg(T_n^{(j)}$ и для $\mathcal{L}_1^*(T_n^{(j)}$ возможно, всилу аналитичности подынтегральных функций, взять R =I. Далее,

$$T_n^{(j)} = T_n^{(j)}(z),\ G_j^*(z) = \exp\{(-1)^{j+1}[T_n^{(j)} + \Psi_j(T_n^{(j)}) - z\ln(T_n^{(j)})]\} \qquad (I.6)$$
$$Q_j(T_n^{(j)}, w) = [\Psi_j(T_n^{(j)}, w) - \Psi_j(T_n^{(j)})]/T_n^{(j)} - \Psi_j'(T_n^{(j)})\ln(w).$$

Следует заметить, что в силу (в.2) функция $Q_j(T_n^{(j)}, w)$ будет в некотором смысле "малым возмущением", которое подобно рассмотренным в гл.4 п.8.3 (2) и (6). Т.о. можно надеяться, что контуром интегрирования в (I.5), удобным для проведения асимптотических оценок, будет тот, что и в случае $Q_j(T_n^{(j)}, w) \equiv 0$ (т.е. $\Psi_j(t) \equiv 0$). Пусть

$$\tau = \tau_j(w) = (-1)^j[w - 1 - \ln(w)], \qquad (I.7)$$

тогда таким контуром будет тот, что проходит через точку перевала $\tau = 0$ и на котором $\mathrm{Re}(-T_n^{(j)}\tau)$ монотонно убывает.

Т.к. контур интегрирования наиболее просто выбрать в плоскости τ, то в (I.5) нужно произвести замену: $w = w_j(\tau)$, где $w_j(\tau)$ – решение уравнения (I.7). Необходимые в дальнейшем свойства этого решения даются в следующих леммах.

ЛЕММА 2. Уравнение (I.7) определяет многозначную аналитическую функцию $w_j(\tau)$, имеющую особые точки: $\tau=\pm 2\pi n i\ (n=0,1,2,\dots)$ В правой полуплоскости существует две регулярных ветви этой функции – $w_j^{(k)}(\tau)\ (k=1,2)$, для которых $w_j^{(k)}(0)=1$. Кроме того, при $|\tau|<2\pi$ справедливо равенство:

$$w_j^{(k)}(\tau)=1-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{(k+1)n}a_n\left(2\exp\{-\pi(-j+2)i/2\}\right)^{n}\tau^{n/2}, \qquad (I.8)$$

где $a_1=1,\ a_2=1/3,\ a_3=1/36,\dots$

Далее, $w_2^{(1)}(\tau)$ вещественна и монотонно возрастает от I до $+\infty$, а $w_2^{(2)}(\tau)$ вещественна и монотонно убывает от I до 0 при $\tau\geq 0$. Подобное же утверждение, только при $\tau\leq 0$, справедливо и для аналитических продолжений $w_1^{(k)}(\tau)$ в область $Re(\tau)<0$ по кривым, пересекающим мнимую ось в точках $0<|Im(\tau)|<2\pi$ и не обходящим 0.

Эта лемме следует из результатов § 25 (7) и изучения поведения функции (I.7) – $\tau_j(w)$, при вещественных w. В дальнейшем еще одна лемма, дающая оценки для $w_j^{(k)}(k)$ в правой полуплоскости.

ЛЕММА 3. В области $Re(\tau)>\varepsilon$ ($\varepsilon>0$ – любое), справедливы неравенства:

$$|w_1^{(k)}(\tau)|<K(\varepsilon)|\tau|\ (k=1,2);\quad |w_2^{(1)}(\tau)|<K(\varepsilon)|\tau|;$$
$$|(w_j^{(k)}(\tau))'|<K(\varepsilon)\ (j=1,2;\ k=1,2); \qquad (I.9)$$

где $K(\varepsilon)>0$, а функции $w_j^{(k)}(\tau)$ описаны в лемме 2.

Кроме того, в этой области имеет место равенство:

$$w_2^{(2)}(\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n-1}\exp(-n)}{n!}\exp(-\tau n). \qquad (I.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (I.7) следуют неравенства:

$$|\tau|\leq|w_j^{(k)}(\tau)|+|\ln|w_j^{(k)}(\tau)||+1+|\arg(w_j^{(k)}(\tau))|,$$
$$|\tau|\geq|w_j^{(k)}(\tau)|-|\ln|w_j^{(k)}(\tau)||-1-|\arg(w_j^{(k)}(\tau))|, \qquad (I.11)$$
$$|\tau|\geq-|w_j^{(k)}(\tau)|+|\ln|w_j^{(k)}(\tau)||-1-|\arg(w_j^{(k)}(\tau))|.$$

Если: I) изучить образы лучей: $w=r\exp(\varphi_i),0<r\leq\infty$ для $-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$ и окружностей: $|w|=R$ для $0<R<\infty$ при отображении (I.7); 2) учесть свойства $w_j^{(k)}(\tau)$, данные в лемме 2; 3) применить теорему о соответствии границ; то можно убедиться, что $|\arg(w_1^{(k)}(\tau))|$

($K = 1, 2$) и $|\arg(w_2^{(1)}(\tau)|$ ограничены при $Re(\tau)>\varepsilon$, где $\varepsilon>0$ – любое. (Следует заметить, что образ прямой: $\tau = r\exp(\varphi_i), 0\le r<\infty$ при $0<|\varphi|<\pi/2$ будет при отображении $w = w_2^{(2)}(\tau)$ спиралью, навивающейся на начало координат, т.е. $|\arg(w_2^{(2)}(\tau))|$ в этом случае не будет ограничен).

Учитывая ограниченность соответствующих модулей аргументов $w_j^{(k)}(\tau)$ и неравенства (I.II) получаем, что при $|\tau|\to\infty$ может быть (для соответствующих j и k) только два случая – либо $|w_j^{(k)}(\tau)|\to\infty$, либо $|w_j^{(k)}(\tau)|\to 0$. Из этого факта, регулярности $w_j^{(k)}(\tau)$ при $Re(\tau)>\varepsilon$ и неравенств (I.II) следуют первые два неравенства (I.9). Последнее неравенство следует из: I) равенства: $(w_j^{(k)}(\tau))' = (-1)^j[1+1/(w_j^{(k)}(\tau)-1)]$; 2) того, что $w_j^{(k)}(\tau)=1$ только при $\tau = \pm 2\pi n i;\ n=0,1,\ldots;$ 3) непрерывности $w_j^{(k)}(\tau)$. Равенство (I.10) следует из результатов, приведенных на с.396(8).

§ 2. Асимптотическое поведение $G_j(z)$ при $|z|\to\infty$.

Введем обозначения:

$$\tilde{Q}_j^{(k)}(\tau,T) = f_j(w_j^{(k)}(\tau)T)(w_j^{(k)}(\tau))'\exp\{(-1)^{j+1}TQ_j(T, w_j^{(k)}(\tau))\},$$

$$d_m^{(j)}(T) = \frac{1}{(2m)!}\left[\frac{d^{2m}(\tilde{Q}_j^{(1)}(\xi^2,T)\xi)}{d\xi^{2m}}\right]_{\xi=0}. \qquad (2.1)$$

Здесь $f_j(t)$ взято из введения, $Q_j(T,w)$ – из (I.6), $w_j^{(k)}(\tau)$ – из леммы 2. Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА. В области $\mathcal{D}_j^{(T)}(K,\varepsilon)$ (она определена в § I) имеет место равенство:

$$G_j(z) = G_j(T_n^{(j)})^{1/2}\exp\{(-1)^{j+1}(T_n^{(j)} + \Psi_j(T_n^{(j)}) - z\ln(T_n^{(j)})\} *$$

$$* \left\{\sum_{m=0}^{M-1} 2\Gamma(m+1/2)\, d_m^{(j)}(T_n^{(j)})/(T_n^{(j)})^m + R_M^{(j)}(T_n^{(j)})\right\},$$

где $T_n^{(j)} = T_n^{(j)}(z)$ дана в лемме I, $K>0$ – некоторое число, $\varepsilon>0$ – любое малое. Далее, $M\ge 1$ – любое целое, функции $d_m^{(j)}(T)$ приведены в (2.I), и при $z\in\mathcal{D}_j^{(T)}(K,\varepsilon)$ справедливо неравенство:

$$|R_M^{(j)}(T_n^{(j)})| < C_M|z|^{-\rho M+\delta}$$

Здесь C_M – некоторое положительное число, а остальные обозначения взяты из введения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства теоремы продеформируем в интеграле (I.8) контур $\mathcal{L}_j^*(T_n^{(j)})$ в такой, на котором наиболее просто получить оценки остаточных членов в асимптотическом разложении функции $G_j(z)$. Как следует из рассуждений, приведенных в параграфе 2, в плоскости τ таким контуром при $|arg(z)|\leq \pi/2-\varepsilon$ $(0<\varepsilon<\pi/2$ – любое) будет положительная часть вещественной оси, проходимая дважды. Именно в этот контур переходит положительная часть вещественной оси w при отображении (I.7) для $j=2$.

Для данных значений $arg(z)$ контур $\mathcal{L}_j^*(T_n^{(j)})$ можно, используя условия из введения, продеформировать в плоскости w в контур $\mathcal{L}_j^*(|T_n^{(j)}|)$. Теперь, изучая образ последнего при отображении (I.7) и деформируя его в плоскости τ в положительную часть вещественной оси, проходимую дважды, (это возможно всилу лемм 2 и 3) получаем из (I.5) при $|arg(z)|\leq\pi/2-\varepsilon$ равенство:

$$G_j(z)=C_jT_n^{(j)}G_j^*(z)\left\{\varkappa\int_0^\infty Q_j^{(1)}(\varkappa\tau,T_n^{(j)})\exp\{-T_n^{(j)}\varkappa\tau\}d\tau-\varkappa\int_0^\infty Q_j^{(2)}(\varkappa\tau,T_n^{(j)})\exp\{-T_n^{(j)}\varkappa\tau\}d\tau.\right. \qquad (2.2)$$

Здесь $\varkappa=1$.

Для исследования же функции $G_j(z)$ при $\pi/2-\varepsilon<|arg(z)|<\pi$ будем использовать их аналитическое продолжение, которое можно получить с помощью представления (2.2). В случае а) $\pi/2-\varepsilon<arg(z)<\pi$ контуры интегрирования в (2.2) следует для этого продеформировать в луч: $arg(\tau)=-\pi/2+\varepsilon$, а в случае б) $-\pi<arg(z)<-\pi/2+\varepsilon$ – в луч: $arg(\tau)=\pi/2-\varepsilon$. Подобная деформация контуров возможна в силу лемм 2 и 3, условий (в.2-3) и применения теоремы о соответствии границ к отображению (I.7). Итак, при $\pi/2-\varepsilon<|arg(z)|<\pi$ имеет место равенство (2.2), в котором $\varkappa=\exp\{(-\pi/2+\varepsilon)i\}$ для случая а), и $\varkappa=\exp\{(\pi/2-\varepsilon)i\}$ для случая б). Разлагая теперь функции $\tilde{Q}_j^{(k)}(\varkappa\tau,T_n^{(j)})$ в ряды по степеням $\tau^{1/2}$ с помощью (I.8), и производя необходимые оценки, получаем утверждения теоремы.

Литература

I. Д е Б р е й н Н.Г. Асимптотические методы в анализе. М., ИЛ, 196I.

2. Ф е д о р ю к М.В. Метод перевала. М., 1977.

3. K o h n o M. A two point connection problem for general linear ordinary differential equations. Hiroshima Math.J., vol.4, N 2, p.293-338.
4. К о в а л е в с к и й М.А. Асимптотическое поведение голоморфных в нуле решений некоторого линейного дифференциального уравнения. Вестник ЛГУ, сер.мат., мех., астр., 1978, № 1, с.34-39.
5. У и т е к к е р Э.Т., В а т с о н Дж.Н. Курс современного анализа. М., т.I, 1962, с.342.
6. Е в г р а ф о в М.А. Асимптотика интегралов со сливающимися точками перевала. М.,(Ин-т прикл.мат.АН СССР. Препринт № 12); 1977, с.67.
7. К о п с о н Э. Асимптотические разложения. М., 1966, с.159.
8. Л а в р е н т ь е в М.А., Ш а б а т Б.В. Методы теории функций комплексного переменного, М., 1958, с.678.

Kovalevsky M.A. Asymptotics of some functions generalizing the Euler gamma-function.

Asymptotic behavior of two classes of functions defined by some integrals is considered. The functions $\frac{1}{\Gamma(z)}$ and $\frac{1}{\Gamma(z+1)}$ are examples of functions of this classes. The problem of investigation of this functions arises from the "connection problem" for a linear ordinary differential equations with two singular points. The theorem giving asymptotics of these functions when $|z| \longrightarrow \infty$ in a certain sector is proved by making use of some lemmas and saddle point method.