П. И. Самовол, М. Аппельбаум, Два подхода в обучении школьников и студентов решению исследовательских задач по математике,
Матем. обр., 2005, выпуск 1, 78–92

Два подхода в обучении школьников и студентов решению исследовательских задач по математике

П. Самовол, М. Аппельбаум

Авторы вводят понятие "школьной исследовательскаой задачи" и анализируют некоторые возможные подходы к решению задач этого типа. В качестве примеров рассматриваются задачи по интересной и мало отраженной в школьных и студенческих курсах теме "функциональные уравнения и неравенства".

Великое научное открытие отличается от серьезной
школьной исследовательской задачи только тем,
что на решение своей задачи ребенок может потратить
от нескольких часов до нескольких дней, а на научное
открытие иногда требуется вся жизнь.
А. Н. Колмогоров

Большинство задач, которые встречаются в школьном учебнике начинаются словами: упростить... , вычислить... , доказать... , найти то-то и то-то... .

Однако, в реальной жизни математик-исследователь чаще всего имеет дело с задачами иного типа. В научной работе в первую очередь требуется не упростить или вычислить что-либо, а выяснить: существует ли вообще объект с данными свойствами? Верно ли в принципе данное утверждение?

Задания такого типа по обыкновению называются исследовательскими.

I. Школьные исследовательские задачи

Под "школьными исследовательскими задачами" мы будем понимать субъективно трудные теоремы или математические факты, доказательство которых или о существовании которых данному школьнику изначально неизвестно.

Это такие задачи, при решении которых ученик сталкивается с необходимостью исследовать новые для себя математические модели, конфигурации, нестандартные связи между ними, свойства фигур, а также отыскивать, устанавливать и анализировать логические схемы рассуждений. Результатом решения школьной исследовательской задачи может считаться установленный и обоснованный учащимся общий алгоритм решения целого класса подобных задач. Или эвристический прием, научная идея, которая после анализа и обобщения может быть рекомендована для использования в решении других нестандартных задач.

II. Педагогическая востребованность исследовательских задач

1. Процесс поиска решения любой исследовательской задачи практически всегда наиболее реалистично воссоздает атмосферу работы ученого вообще и ученого-математика, в частности. Следовательно, уже в школьном возрасте ребенок может получить общие представления о работе исследователя, что, очевидно, весьма существенно с профориентационной точки зрения.

2. Статистические данные свидетельствуют о том, что самые важные открытия ученые-математики совершают в возрасте 22-26 лет. Поэтому обучение ребенка в среднем школьном возрасте методам научного анализа, на наш взгляд, достаточно перспективно.

3. Обучаясь решать исследовательские задачи, школьники, кроме овладения специальными схемами правдоподобных и доказательных рассуждений, дополнительно также приобретают знания высокого уровня, умения и навыки из многих разделов математики, что само по себе очень важно.

4. Процесс поиска решения проблемной задачи чаще всего востребует соответствующее интеллектуальное напряжение школьника. При этом интеллектуальные способности учащегося получают мощный импульс развития.

"Ведь то, что вы вынуждены открыть сами, оставляет в вашем уме тропинку, которой вы сможете всегда воспользоваться, если в этом возникнет необходимость". (Г. Литенберг, "Hphorismen" [Berlin, 1902-1906]).

5.Школьные исследовательские задачи позволяют более эффективно индивидуализировать и интенсифицировать процесс интеллектуального воспитания данного школьника или студента. На материале задач данного типа можно также обучать учащегося навыкам самообразования, научного творчества и элементам работы экспериментатора-исследователя.

6. Решения исследовательских задач открывает перед учащимися значительное число эвристических приемов общего характера, весьма ценных для математического развития личности. Впоследствии эти навыки мыслительной деятельности могут быть легко перенесены на любой математический материал, на любую сферу научных интересов будущего специалиста.

Все вышесказанное указывает на актуальность и практические перспективы исследования заявленной проблемы.

III. Две методики обучения школьников решению исследовательских задач

1. Подход № 1

Педагог формулирует необходимые определения объекта и предлагает школьнику "поиграть" в некоторую интеллектуальную игру: посчитать то-то, проверить то-то, а нет ли какой -то закономерности у того-то и т.д. При этом учитель не сковывает его творческой инициативы, что очень существенно. Но в случае отсутствия таковой, учитель использует свой опыт и предлагает школьнику идеи для исследования. При этом новые задачи возникают как элемент или продукт произвольной интеллектуальной игры.

Понятно, что в данном подходе школьник не связан с необходимостью дать ответ на кем-то заранее поставленный вопрос. В этом плане учитель с учеником "свободные художники": сами определяют зону поисков и удовлетворяются или нет полученными результатами. То есть, дают самооценку проделанной работе. При этом школьник, (а иногда и учитель) не знают конечный результат заранее. Конечный результат исследовательской работы школьника оценивается здесь, прежде всего, с точки зрения его научного любопытства, фантазии, и всего того, что относится к сфере интеллектуального искусства.

2. Подход № 2

Учитель ставит перед школьником конкретную задачу. Например, найти то-то и то-то, построить то-то, выяснить или установить возможность существования того-то и т.д.. Предполагается, что ученик должен провести исследование по существу поставленной проблемы и дать ответ на данный вопрос. Поскольку ребенок может и не суметь выполнить работу исследовательского рода самостоятельно, то педагог, ориентируясь на "зоны ближайшего развития" данного учащегося (Выготский), помогает школьнику. При таком подходе у педагога есть возможность практически любой школьной задаче придать исследовательский вид и характер. Для школьника понятно в этой деятельности почти все: вот есть конкретная задача. Возможно, очень трудная, на несколько логических переходов, возможно, на применение неизвестной ранее школьнику идеи и т.д. Задачу надо решить. Для этого проблема так же, как и впервом случае, разбивается на цепочку вспомогательных задач. Само разбиение носит индивидуальный характер.

При решении задачи у школьника естественным образом появляются промежуточныке результаты, которые тщательно фиксируются. Как правило, в дальнейшем эти результаты могут стать источником научного творчества школьника. Например, новая задача, новый ракурс проблемы, необычное применение известной или неизвестной ранее идеи и т.д. В данном подходе конечный результат исследовательской работы школьника оценивается, прежде всего, по полученному ответу, а так же по установленным обобщениям.

Важно подчеркнуть, что оба подхода не противоречат ни друг другу, ни самому смыслу школьной исследовательской задачи. Более того, они дополняют и обогащают опыт, как школьника, так и педагога. Причем, на разных этапах решения задачи те или иные элементы научного творчеста совпадают в обеих подходах.

К примеру, решенная Архимедом задача, приведшая к открытию выталкивающей силы или открытие Галуа может рассматриваться как классический научный пример второго подхода, "От задачи к решению". А вот эксперименты Эйлера с числами, существенно обагатившие всю математическую науку, исследования в топологии, приведшие к ряду замечательных открытий — примеры другого рода. Список примеров из истории математики, естественно, можно подолжить.

IV. Опыт

Приведем примеры двух задач на материале темы "Функциональные уравнения и неравенства". Выбор данной темы обусловлен следующими соображениями:

- Как известно, общих методов решений для различных функциональных уравнений не существует. Поэтому у педагога и школьника есть множество идей для творчества.

- Для понимания решения базисных задач достаточно владеть только общим понятием функции.

- Уровень сложности заданий легко варьировать в зависимости от возможностей учащихся.

Новые задачи, придуманные школьниками отмечены звездочкой.

V. Заключение

1. Особенности исследовательского метода в преподавании математики

Построение процесса обучения математики наподобие процесса научного исследования. Основные этапы исследовательского процесса осуществляются, разумеется, в упрощенной, доступной учащимся форме: выявление неизвестных (неясных) фактов, подлежащих исследованию (ядро проблемы); уточнение и формулировка проблемы; выдвижение гипотез; составление плана исследования; осуществление исследовательского плана, исследование неизвестных фактов и их связей с другими, проверка выдвинутых гипотез; формулировка результата; оценка значимости полученного нового знания, возможностей его применения.

2. В процессе решения одних проблем постоянно возникают новые.

В этом случае педагогу необходимо вовремя переключить внимание школьника на другие проблемы и задачи.

3. Педагогическое и научное руководство исследовательским процессом со стороны учителя

Д. Пойа различает внутренние и внешние подсказки. Первые таковы, что они как будто извлекают у учащихся их собственные мысли, вторые (более грубые) подсказки оставляют учащимся лишь выполнение технической работы, снимая потребность поиска. Естественно, что руководство поиском учащихся требует хорошей методической подготовки, разработки для каждого планируемого учебного исследования соответствующей системы вопросов и указаний (подсказок), "подталкивающих" учащихся по направлению поиска.

4. Для того чтобы учитель мог организовать процесс обучения школьников, подобно процессу исследования, создавать педагогические ситуации, стимулирующие их открытия, управлять творческим поиском учащихся, он должен иметь некоторый собственный опыт исследовательской работы, хотя бы на уровне учебных исследований, иметь на своем собственном счету немало "открытий" (пусть и маленьких открытий для себя).

5. Выражаясь словами Д. Пойа, учитель должен сам почувствовать "напряженность поиска и радость открытия", чтобы он мог вызвать их у своих учеников.

Нельзя пренебречь в обучении этими эмоциональными факторами. Учащийся, испытавший радость открытия, смело идет на поиск решения новых задач. Он уже знает, что его ожидает, что напряженность поиска сменяется радостью открытия.

Безусловно, не существует универсальных методов обучения. Однако, нетрудно заметить и оценить большое воспитательное и развивающее значение исследовательского метода.

VI. Примеры

Задача № 1 (подход №1).

Функция $f(x)$ определена на отрезке $[0,1]$ так, что выполняется: $f(0)=f(1)=0$, $f\left(\frac{x+y}{2}\right)\leqslant f(x)+f(y)$.

Исследование 1.1

Может ли искомая функция принимать положительные и отрицательные значения?

Исследование:

Если $x=y\in[0,1]$, то сразу получаем: $f\left(\frac{x+y}{2}\right)\leqslant f(x)+f(y)\Rightarrow f\left(\frac{x+x}{2}\right)\leqslant f(x)+f(x)\Leftrightarrow f(x)\leqslant f(x)+f(x)\Leftrightarrow 0\leqslant f(x)$, т.е. функция может принимать только неотрицательные значения.

Исследование 1.2

Исследовать возможное число решений уравнения $f(x)=0$ на отрезке $x\in[0,1]$

Обоснование:

Имеем: $f\left(\frac{x+y}{2}\right)\leqslant f(x)+f(y)$. Известно, что $f(0)=f(1)=0$. Поэтому, $f\left(\frac{0+1}{2}\right)\leqslant f(0)+f(1)\Rightarrow \begin{cases} f\left(\frac{1}{2}\right)\leqslant 0\\ f(x)\geqslant 0\end{cases}\Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)=0$. Докажем, что уравнение $f(x)=0$ имеет бесконечное число решений на отрезке $[0,1]$

Легко проверить, что если x_1 и x_2 — два корня уравнения $f(x)=0$, то $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=0$. В самом деле,

$$\begin{cases} f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant f(x_1)+f(x_2)=0\\ f(x)\geqslant 0\end{cases}\Rightarrow f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=0.$$

Вывод: Полагая $x_1=0=const$ и $x_2\in\left\{1,\frac{1}{2},\dots,\frac{1}{2^k}\right\}$, при $k\to\infty$ получим бесконечное число решений уравнения $f(x)=0$ на отрезке $[0,1]$.

Задача 1.3*

Доказать, что если искомая функция существует, $x_0=x$ — корень уравнения $f(x)=0$, принадлежащий отрезку $[0,1/2]$ и x_n — корни уравнения $f(x)=0$, определяемые по рекуррентной формуле $x_n=(1+x_{n-1})/2$, то при $n\in N$ для членов последовательности x_n выполняются условия:

$$a)1-\frac{1}{2^n}\leqslant x_n\leqslant 1-\frac{1}{2^{n+1}};\qquad b)x_{n+1}>x_n\qquad c)x_n=\frac{(2^n-1)+x}{2^n}$$

Доказательство:

Воспользуемся методом математической индукции: При $n = 1$ получаем:

$$0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}, \Rightarrow 1 - \frac{1}{2} = 0,5 \leqslant \frac{1+x}{2} \leqslant 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow \begin{cases} a) x_1 = \frac{1+x}{2} \in \left[1 - \frac{1}{2^1}, 1 - \frac{1}{2^2}\right] \\ b) x_1 > x_0 \\ c) x_1 = \frac{1+x}{2} = \frac{(2^1-1)+x}{2^1}. \end{cases}$$

Предположим, что для $n = k \in N$ выполняется:

$$a) 1 - \frac{1}{2^k} \leqslant x_k \leqslant 1 - \frac{1}{2^{k+1}}; \qquad b) x_k > x_{k-1}, \qquad c) x_k = \frac{(2^k - 1) + x}{2^k}.$$

Докажем, что для $n = (k+1) \in N$ выполняется:

$$a) 1 - \frac{1}{2^{k+1}} \leqslant x_{k+1} \leqslant 1 - \frac{1}{2^{k+2}}; \qquad b) x_{k+1} > x_k, \qquad c) x_k + 1 = \frac{(2^{k+1} - 1) + x}{2^{k+1}}.$$

Доказательство:

$$\begin{cases} 1 - \frac{1}{2^k} \leqslant x_k \leqslant 1 - \frac{1}{2^{k+1}} \\ x_{k+1} = \frac{1+x_k}{2} \end{cases} \Rightarrow 1 + 1 - \frac{1}{2^k} \leqslant x_k + 1 \leqslant 1 + 1 - \frac{1}{2^{k+1}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2 - \frac{1}{2^k}}{2} \leqslant \frac{x_k + 1}{2} \leqslant \frac{2 - \frac{1}{2^{k+1}}}{2} \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2^{k+1}} \leqslant x_{k+1} \leqslant 1 - \frac{1}{2^{k+2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a) x_{k+1} \in \left[1 - \frac{1}{2^{k+1}}, 1 - \frac{1}{2^{k+2}}\right] \Rightarrow x_k \leqslant 1 \Rightarrow$$

$b)\ x_{k+1} = \dfrac{1+x_k}{2} > x_k \Leftrightarrow x_k < 1$, что верно;

$$c)\ x_k = \frac{(2^k - 1) + x}{2^k} \Rightarrow x_{k+1} = \frac{1 + x_k}{2} = \frac{1 + \frac{(2^k-1)+x}{2^k}}{2} = \frac{(2^{k+1} - 1) + x}{2^{k+1}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_{k+1} = \frac{(2^{k+1} - 1) + x}{2^{k+1}}.$$

Исследование 1.4

Исследовать значения функции на ограниченность.

Доказательство:

Из доказанных утверждений в **1.3** следует, что последовательность

$$x_0 = x, 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}, x_n = \frac{1 + x_{n-1}}{2} = \frac{(2^n - 1) + x}{2^n} = 1 - \frac{1-x}{2^n}$$

возрастает и ограничена сверху числом $b = 1$ и снизу числом $a = 0,5$. Таким образом, при $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$ члены последовательности x_n, $n \in N$, могут принимать каждое значение из отрезка

$$\left[\frac{1}{2}, 1\right) = \left[1 - \frac{1}{2^1}, 1 - \frac{1}{2^2}\right] \cup \left[1 - \frac{1}{2^2}, 1 - \frac{1}{2^3}\right] \cup \left[1 - \frac{1}{2^3}, 1 - \frac{1}{2^4}\right] \cup \ldots$$

$$\cup\left[1-\frac{1}{2^n},1-\frac{1}{2^{n+1}}\right]\cup\ldots$$

Кроме этого, выполняется условие:

$$\begin{cases} \ldots f\left(x_{n+1}\right)=f\left(\dfrac{1+x_n}{2}\right)\leqslant f\left(1\right)+f\left(x_{n-1}\right)=f\left(x_{n-1}\right)=f\left(\dfrac{1+x_{n-2}}{2}\right)\leqslant f\left(x_{n-2}\right)\leqslant\ldots \\ \ldots\leqslant f\left(x_1\right)\leqslant f\left(x\right)\leqslant A \\ a)\frac{1}{2}\leqslant 1-\frac{1}{2^n}\leqslant x_n\leqslant 1-\frac{1}{2^{n+1}};\quad b)x_{n+1}>x_n,\quad c)x_n=1-\frac{1-x}{2^n},0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2} \end{cases}$$

Это значит, что если для некоторого A выполняется неравенство $f(x)\leqslant A$ на отрезке $[0,\frac{1}{2}]$, то $f(x)\leqslant A$ на отрезке [0,1].

Вывод: если искомая функция существует и для определенного значения A, $f(x)\leqslant A$ на отрезке $[0,\frac{1}{2}]$, то $f(x)\leqslant A$ на отрезке $[0,1]$.

Исследование 1.5*

Исследовать значения данной функции при условии, что $f\left(x\right)\leqslant 2005\cdot(1-x)$ на отрезке $[0,1]$.

Доказательство:

Пусть теперь $f\left(x\right)\leqslant 2005\cdot\left(1-x\right)$. Докажем, что $f\left(x\right)$ тождественно равна нулю на отрезке $[0,1]$.

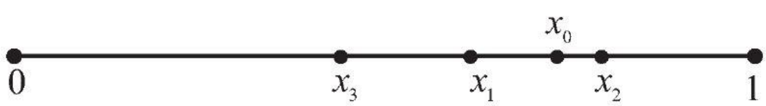
- Понятно, что $L=\lim\limits_{x\to 1}2005\cdot\left(1-x\right)=0$. Это означает, что для всех $0<\varepsilon<<a_0$ можно указать такое $\delta\left(\varepsilon\right)>0$, что для всех $x\in\left(1-\delta,1\right]$ выполняется: $f\left(x\right)\leqslant 2005\cdot\left(1-x\right)<\varepsilon$. То есть, $f\left(x\right)<\varepsilon$ для всех $x\in\left(1-\delta,1\right]$.

- Теперь используем **метод от противного.**

Предположим, что при выполнении условия $f\left(x\right)\leqslant 2005\cdot\left(1-x\right)$ можно указать значение $x_0\in\left(0,1\right)$ такое, что

$$f\left(x_0\right)=a_0>0. \qquad (*)$$

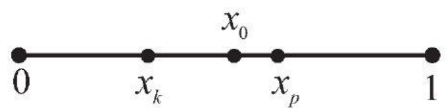
Также предположим, что x_3 and x_2 некоторые два корня уравнения $f\left(x\right)=0$,



для которых $x_0\in\left[x_3,x_2\right]$. Если $\left|x_2-x_3\right|>\delta$ и также $\left|x_2-x_0\right|<\left|x_3-x_0\right|$, то рассмотрим $x_1=\frac{x_2+x_3}{2}$. Из результатов доказанного пункта 2 — получаем:

$$f\left(\frac{x_3+x_2}{2}\right)=f\left(x_1\right)=0$$

Очевидно, $\left|x_1-x_0\right|<\left|x_3-x_0\right|$ и $\left|x_2-x_1\right|<\left|x_2-x_3\right|$. То есть, с помощью конечного числа шагов мы можем указать два числа x_k and x_p таких, что $f\left(x\right)=0$, $x_0\in\left[x_k,x_p\right]$ и $\left|x_k-x_p\right|<\delta$.



Введем обозначения:

$$l_1 = |x_0 - x_k| < \delta, \quad l_2 = |x_p - x_0| < \delta, \quad \text{а} \quad \text{также} \quad \frac{\delta}{2} \leqslant \max[l_1, l_2] = l_0 < \delta.$$

Рассмотрим

$$a_0 = f(x_0) = f\left(\frac{(x_0 - l_0) + (x_0 + l_0)}{2}\right) \leqslant f(x_0 - l_0) + f(x_0 + l_0) =$$

$$f(x_k) + f(x_0 + l_0) = f(x_0 + l_0) = f(x_1). \qquad (**)$$

То есть, если обозначить, $(x_0 + l_0) = x_1$, то из предыдущего выражения $(**)$ получим:

$$f(x_1) > a \quad \text{и} \quad \frac{\delta}{2} \leqslant l_0 = x_1 - x_0 < \delta.$$

Аналогично, через конечное число шагов (на основании аксиомы Архимеда) получаем точку x_S, такую, что

$$\begin{cases} x_S \in (1 - \delta, 1] \\ f(x_S) > a >> \varepsilon \\ f(x) < \varepsilon, \quad x \in (1 - \delta, 1] \end{cases}$$

То есть, как видим, последняя система утверждений противоречива. (Противоречие предполагаемому существованию значения $x_0 \in (0, 1)$ такого, что $f(x_0) = a_0 > 0\,(*)$).

Вывод: при данных условиях эта функция постоянна и $f(x) = 0$.

Задание 1.6

Построить пример данной функции и проверить найденные свойства.

Обоснование:

Пусть

$$\begin{cases} f(x) = 0, \ \text{x} \in \text{Q}, \text{x} \in [0{,}1] \\ f(x) = const = a > 0, \ \text{x} \in \text{I}, \text{x} \in [0{,}1] \end{cases}$$

Обозначим, $r \in Q$ & $i \in I$. В самом деле, наша функция определена на отрезке $[0, 1]$. Также, $f(0) = f(1) = 0$, $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant f(x) + f(y)$. И при этом

1) $f\left(\frac{r_1+r_2}{2}\right) = f(r) = 0 \leqslant 0 = f(r_1) + f(r_2);$

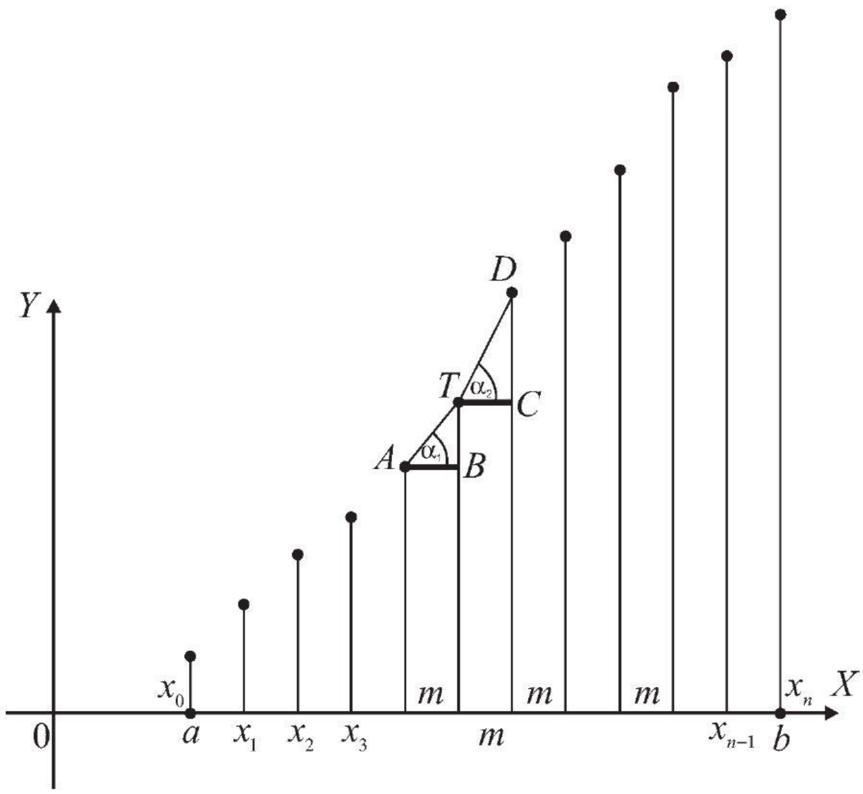
2) $f\left(\frac{i_1+r_2}{2}\right) = f(i) = a \leqslant a + 0 = f(i_1) + f(r_2);$

$3)_1$ $f\left(\frac{i_1+i_2}{2}\right) = f(i) = a \leqslant a + a = f(i_1) + f(i_2);$

$3)_2$ $f\left(\frac{i_1+i_2}{2}\right) = f(r) = 0 \leqslant a + a = f(i_1) + f(i_2);$

Задача решена полностью.

Задача № 2 (Олимпиада им. проф. Гросмана М. Израиль, 2004 год). (Подход № 2).



Существует ли функция f действительного переменного такая, что для любых действительных (x, y) выполняется неравенство

$$\frac{f(x)+f(y)}{2} \geqslant f\left(\frac{x+y}{2}\right)+|x-y|? \qquad (*)$$

Решение.

Задание № 2.1.

Проверить, может ли данная функция быть постоянной.

Обоснование:

Если $f(x) = const = c_0$, то для $(x-y) \neq 0$

$$\frac{c_0+c_0}{2} \geqslant c_0+|x-y| \quad 0 \geqslant |x-y|\,. \text{ Значит,} \quad f(x) \neq const.$$

Задание № 2.2

Рассмотреть произвольный отрезок $[a, b]$, разбить его на n равных частей и проверить данную функцию на возрастание или убывание.

Обоснование:

Рассмотрим $(x, y) \in [a, b]$. Если разделить отрезок $[a, b]$ на n равных частей, то длина каждой части $m = \frac{b-a}{n}$. Тогда, для $1 \leqslant k \leqslant n \quad a = x_0, \;\; x_k = a + k \cdot m$.

Не ограничивая общности, предположим, что $f(x_0) \leqslant f(x_1)$. Докажем, что $f(x_2) > f(x_1)$. В самом деле, если $f(x_2) \leqslant f(x_1)$, то из $(*)$ получим:

$$\frac{f(x_0)+f(x_2)}{2} \geqslant f\left(\frac{x_0+x_2}{2}\right)+2m, \quad \frac{f(x_0)+f(x_2)}{2} \geqslant f(x_1)+2m,$$

$$0 \geqslant \frac{f(x_0)-f(x_1)}{2}+\frac{f(x_2)-f(x_1)}{2} \geqslant 2m > 0. \tag{1}$$

Получили противоречие. Итак, $f(x_2) > f(x_1)$. Аналогично, для значений $\{x_1; x_2; x_3\}$ получим, что если $f(x_2) > f(x_1)$, то из $(*)$ следует: $f(x_3) > f(x_2)$. Продолжая эти рассуждения, получим: $f(x_0) < f(x_1) < f(x_2) < \ldots < f(x_n)$.

Задание № 2.3 .

Используя рис №1, оценить для каждого $1 \leqslant k \leqslant n$ и $\{x_k; x_{k+1}; x_{k+2}\}$ разность приращений функции.

Обоснование:

$$\frac{f(x_{k+1})-f(x_k)}{2}-\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{2} \geqslant 2m, \; k \geqslant 1;$$

$$\frac{f(x_{k+1})-f(x_k)}{m}-\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{m} \geqslant 4 \Leftrightarrow \; tg\,\alpha_k - tg\,\alpha_{k-1} \geqslant 4$$

То есть,

$$+\begin{cases} tg\,\alpha_1 - tg\,\alpha_0 \geqslant 4 \\ tg\,\alpha_2 - tg\,\alpha_1 \geqslant 4 \\ tg\,\alpha_3 - tg\,\alpha_2 \geqslant 4 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ tg\,\alpha_{n-1} - tg\,\alpha_{n-2} \geqslant 4 \end{cases}$$

$$tg\,\alpha_{n-1} - tg\,\alpha_0 \geqslant 4\cdot(n-1) \Rightarrow$$
$$tg\,\alpha_{n-1} \geqslant tg\,\alpha_0 + 4\cdot(n-1) > 4\cdot(n-1).$$

Задание № 2.4.

Используя полученный результат, оценить разность $f(b)-f(a)$.

Обоснование:

Из условия построения значений функции получаем:

$$+\begin{cases} f(x_1) = f(x_0) + m\cdot tg\,\alpha_0 \\ f(x_2) = f(x_1) + m\cdot tg\,\alpha_1 \\ f(x_3) = f(x_2) + m\cdot tg\,\alpha_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f(x_n) = f(x_{n-1}) + m\cdot tg\,\alpha_{n-1} \end{cases}$$

$$f(b) = f(x_n) = f(x_0) + m\cdot(tg\,\alpha_0 + tg\,\alpha_1 + tg\,\alpha_2 + \ldots + tg\,\alpha_{n-1}) \geqslant$$

$$\geqslant f(a) + m\cdot(4 + 4\cdot 2 + 4\cdot 3 + \ldots + 4\cdot(n-1)) \geqslant$$

$$\geqslant f(a) + 4 \cdot \frac{b-a}{n} \cdot \frac{n \cdot (n-1)}{2} = f(a) + 2 \cdot (b-a) \cdot (n-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(b) \geqslant f(a) + 2 \cdot (b-a) \cdot (n-1) \to \infty.$$

Задание № 2.5.

Используя полученное условие $f(b) \geqslant f(a) + 2 \cdot (b-a) \cdot (n-1) \to \infty$, сформулировать ответ.

Ответ: Из $f(b) \geqslant f(a) + 2 \cdot (b-a) \cdot (n-1) \to \infty$ следует, что $f(x_n) = f(b)$ не определено. Что противоречит условию. Значит, искомая функция f не существует.

Замечание.

Если при увеличении числа n мы получим, что $f(x_0) \geqslant f(x_1)$, то для этого случая рассмотрим симметричный отрезок $[2a-b, a]$. Аналогично предыдущему, разделим его на n равных частей и докажем, что при этом $f(t_1) > f(x_0)$:

$$t_k - t_{k-1} = \frac{b-a}{n} = m;$$

$$f(x_0) < f(t_1) < f(t_2) < \ldots < f(t_n);$$

$$0 < 90^\circ - \beta_{n-1} < \varepsilon \to 0.$$

То есть, функция не определена для $f(t_n) = f(2a-b)$. Получили противоречие с условием.

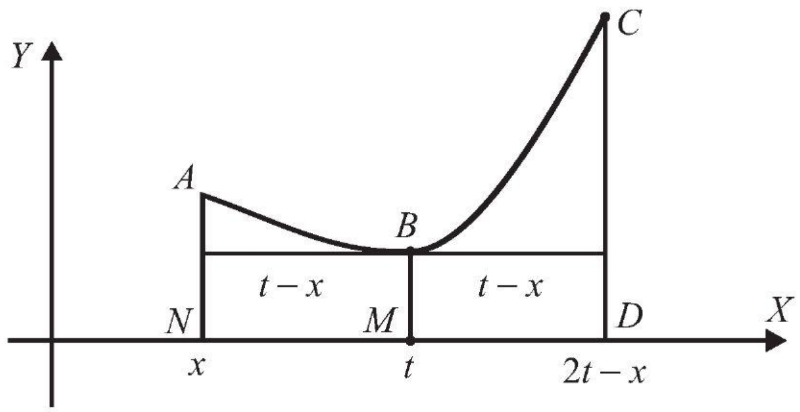
Новая версия условия задачи,

Задача 2.b*.

Существует ли дифференцирируемая функция f действительного переменного, если известно, что функция определена для всех действительных чисел, и для любых двух действительных x, y выполняется неравенство:

$$\frac{f(x) + f(y)}{2} \geqslant f\left(\frac{x+y}{2}\right) + |x-y|? \qquad (1)$$

Решение.



1. Если $f(x) = const = c_0$, то для $(x-y) \neq 0$ получаем $\frac{c_0+c_0}{2} \geqslant c_0 + |x-y|$. То есть, $0 \geqslant |x-y|$. Противоречие для $x \neq y$. Значит, $f(x) \neq const$.

2. Определим $t = \frac{x+y}{2}$, $2t - x = y > x$. Очевидно, для точек $N(x,0)$ и $D(y,0)$ имеем: $MN = \frac{x+y}{2} - x = \frac{y-x}{2} = t - x$, $MD = y - \frac{x+y}{2} = \frac{y-x}{2} = t - x$.

3. Согласно неравенству (1) для $y > x$ получим $\frac{f(x)+f(2t-x)}{2} \geqslant f(t) + 2\cdot(t-x)$. Значит,

$$\frac{f(2t-x) - f(t)}{t-x} - \frac{f(t) - f(x)}{t-x} \geqslant 4. \tag{2}$$

Если устремить теперь $0 < t - x = \Delta x \to 0$, то $2t - x = t + \Delta x$; $x = t - (t-x) = t - \Delta x$, и получим: $L = \frac{f(t+\Delta x) - f(t)}{\Delta x} - \frac{f(t) - f(t-\Delta x)}{\Delta x} \geqslant 4$, или, согласно условию существованию производной, например, в точке t:

$$4 \leqslant \lim_{\Delta x\to 0} L = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(t+\Delta x) - f(t)}{\Delta x} - \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(t) - f(t-\Delta x)}{\Delta x} = f'(t) - f'(t) = 0.$$

Таким образом, получили противоречие. Вывод: данной функции не существует.

Задача № 2.с*

Существует ли функция f действительного переменного такая, что для любых действительных (x, y) выполняется неравенство

$$f(y) \geqslant f\left(\frac{x+y}{2}\right) + |x-y|? \tag{1}$$

Решение.

Рассмотрим $y > 0$, x = 3y. Получим из условия $\forall y > 0$: $f(y) \geqslant f(2y) + 2y$. А тогда, $\forall y > 0$ выполняется:

$$f\left(\frac{y}{2}\right) \geqslant f(y) + y. \tag{2}$$

Из (1) при условии $y > 0, x = 0$ находим:

$$f(y) \geqslant f\left(\frac{y}{2}\right) + y. \tag{3}$$

Сложим (2) и 3 почленно для $y > 0$ и получим: $0 \geqslant 2y$. Пртиворечие, которое доказывает требуемое утверждение.

В заключение приведем пример интересной задачи с решением. Мы надеемся, что педагог сможет сравнить приведенный способ решения со своим и использовать оба решения в работе с учащимися.

Задача № 3 (Олимпиада Гросмана 2002 год).

а) Существуют ли функции $g : \Re \to \Re$ & $f : \Re \to \Re$, такие, что

$$\forall x : \quad \begin{cases} f(g(x)) = x^2; \\ g(f(x)) = x^3? \end{cases}$$

б) Существуют ли функции $g : \Re \to \Re$ & $f : \Re \to \Re$, такие, что

$$\forall x: \quad \begin{cases} f(g(x)) = x^2; \\ g(f(x)) = x^4? \end{cases}$$

Решение.

a) Предположим, что существуют функции $g: \Re \to \Re$ & $f: \Re \to \Re$, такие, что

$$\forall x: \quad \begin{cases} f(g(x)) = x^2; & (1) \\ g(f(x)) = x^3. & (2) \end{cases}$$

Из (1), (2) получаем:

$$g(f(x)) = x^3 \Rightarrow f\left(x^3\right) = f(g(f(x))) \Rightarrow f\left(x^3\right) = [f(x)]^2. \qquad (3)$$

То есть,

$$[f(x)]^2 = f(g(f(x))) = f(x^3) \Rightarrow [f(x)]^2 = f(x^3) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 1)\ \ [f(0)]^2 = f(0) \Rightarrow f(0) \in \{0, 1\}; \\ 2)\ \ [f(1)]^2 = f(1) \Rightarrow f(1) \in \{0, 1\}; \\ 3)\ \ [f(-1)]^2 = f(-1) \Rightarrow f(-1) \in \{0, 1\}. \end{array} \right.$$

Тогда три значения $a_1 = f(0)$; $a_2 = f(-1)$; $a_3 = f(1)$ принадлежат духэлементному множеству $\{0; 1\}$. Поэтому на основании принципа Дирихле, из трёх чисел $\{f(0);\ f(-1);\ f(1)\}$, какие-то два совпадают. С другой стороны, из условия следует, что

$$\left[\begin{array}{l} 4)\ g(f(0)) = 0; \\ 5)\ g(f(-1)) = -1; \\ 6)\ g(f(1)) = 1. \end{array} \right.$$

Это значит, что числа $f(0); f(-1); f(1)$ должны быть все разные. Получили противоречие.

Ответ: Не существуют функции $g: \Re \to \Re$ & $f: \Re \to \Re$, такие, что

$$\forall x: \quad \begin{cases} f(g(x)) = x^2; \\ g(f(x)) = x^3. \end{cases}$$

$$b)\ \text{Пусть} \quad \forall x: \quad \begin{cases} f(g(x)) = x^2; & (7) \\ g(f(x)) = x^4. & (8) \end{cases}$$

Тогда требуемые функции существуют. Например,

$$\begin{cases} g(x) = 0, x = 0; \\ g(x) = e^{\ln^2|x|}, \quad |x| \geqslant 1; \\ g(x) = e^{-\ln^2|x|}, \quad |x| < 1, \& x \neq 0; \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
f(x) = 0, x = 0; \\
f(x) = e^{2\cdot\sqrt{\ln|x|}}, \quad |x| \geqslant 1; \\
f(x) = e^{-2\cdot\sqrt{|\ln|x||}}, \quad |x| < 1, \& x \neq 0.
\end{cases}
$$

Доказательство:

$$
\begin{cases}
f(g(0)) = f(0) = 0^2 = 0; \\
f(g(x)) = e^{2\cdot\sqrt{\ln\left|e^{\ln^2 x}\right|}} = e^{2\cdot\sqrt{\ln e^{\ln^2 x}}} = e^{2\cdot\sqrt{\ln^2|x|}} = e^{2\cdot|\ln|x||} = e^{2\cdot\ln x} = x^2, \quad |x| \geqslant 1: \\
f(g(x)) = e^{-2\cdot\sqrt{\left|\ln\left|e^{\ln^2 x}\right|\right|}} = e^{-2\cdot\sqrt{\left|\ln e^{\ln^2|x|}\right|}} = e^{-2\cdot\sqrt{\ln^2|x|}} = e^{-2\cdot|\ln|x||} = e^{2\cdot\ln|x|} = x^2, \\
\quad |x| < 1, x \neq 0.
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
g(x) = 0, x = 0; \\
g(f(x)) = e^{\ln^2\left|e^{2\cdot\sqrt{\ln x}}\right|} = e^{\ln^2 e^{2\cdot\sqrt{\ln|x|}}} = e^{\left[2\cdot\sqrt{\ln|x|}\right]^2} = e^{4\cdot\ln|x|} = x^4, \quad |x| \geqslant 1; \\
g(f(x)) = e^{-\ln^2\left|e^{-2\cdot\sqrt{|\ln|x||}}\right|} = e^{-\left[-2\cdot\sqrt{|\ln|x||}\right]^2} = e^{-4\cdot|\ln|x||} = e^{4\cdot\ln|x|} = x^4, \quad |x| < 1, x \neq 0.
\end{cases}
$$

Что и требовалось доказать.

Авторы выражают благодарность профессору Г. Белитскому, (Ben-Gurion University of Negev, Beer- Sheva, Israel) за участие в обсуждении примеров данной статьи.

Литература

1. Л. С. Выготский, "Проблема обучения и умственного развития в школьном возрасте", М., издательство АПН РСФСР, 1956 г.

2. Л. С. Выготский, "Избранные психологические исследования", М., Издательство АПН РСФСР, 1956 год.

3. В. П. Эфроимсон, "Божий дар или естественный феномен", издательство "Знание", 1992. Журнал "Народное образование", №№1-2, 1992.

4. В. П. Эфроимсон, "Предпосылки гениальности (биосоциальные факторы повышенной умственной активности)", М., Русский мир, 1998, 542 с.

5. "Функциональные уравнения", журнал "Квант", №7, 1985; №9, 1984; №6, 1977; №1, 1975.

6. Skemp, R., "The Psychology of Learning Mathematics", Hillsdale, New Jersey, Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, (1987).

7. THEODORE EISENBERG "On Building Self-Confidence in Mathematics", "TEACHING MATHEMATICS AND ITS APPLICATIONS", vol. 10, No. 4, 1991, p.154, Ben-Gurion University, Beer Sheva, Israel.

8. Krutetskii, V. A., "The Psychology of the Mathematical Abilities of the School Children", Chicago, University of Chicago Press, (1976).

9. Cholodnja, M. A., "Psychology of intelligence: paradoxes of research", M., 1997 (In Russian).

10. Applebaum, M. V., Samovol, P. I., "Teaching Mathematics Using the Idea of "Research problems", 2^{nd} International Conference on the Teaching Mathematics (at the undergraduate level), University of Crete, Hersonissos, Crete, Greece (2002).

Dr. Peter Samovol,
Ben-Gurion University of Negev,
Beer-Sheva, Israel;
Kaye Academic College of Education,
Beer-Sheva, Israel.

Pet12@012.net.il

Dr. Mark Applebaum
Kaye Academic College of Education,
Beer-Sheva, Israel.

Amark@012.net.il