А. В. Муравлев, Экспериментальное построение функционалов пластичности для траекторий деформаций типа двухзвенных ломаных в опытах на сплошных цилиндрических образцах, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1996, номер 5, 74–80

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильюшин А. А. О связи между напряжениями и малыми деформациями в механике сплошных сред//Прикл. матем. и механ. 1954. **18**, № 6. 641—666.
2. Ильюшин А. А. Пластичность. Основы общей математической теории. М., 1963.
3. Ильюшин А. А. Механика сплошной среды. М., 1990.
4. Ленский В. С. Исследование пластичности металлов при сложном нагружении: Докт. дис. М., 1961.
5. Ленский В. С. Экспериментальная проверка основных постулатов общей теории упругопластической деформации//Вопросы теории пластичности. М., 1961. 58—82.
6. Васин Р. А. Некоторые вопросы связи напряжений и деформаций при сложном нагружении//Упругость и неупругость. М., 1971. 59—126.
7. Васин Р. А. Экспериментально-теоретическое исследование определяющих соотношений в теории упругопластических процессов: Докт. дис. М., 1987.
8. Ohashi Y. Effects of complicated deformation history on inelastic deformation behaviour of metals//Mem. Fac. Eng. Nagoya Univ. 1982. **31.** N 1. 1—76.
9. Поздеев А. А., Трусов П. В., Няшин Ю. И. Большие упругопластические деформации: теория, алгоритмы, приложения. М., 1986.
10. Левитас В. И. Большие упругопластические деформации материалов при высоком давлении. Киев, 1987.
11. Маркин А. А. Вариант определяющих соотношений и постановка граничных задач при конечных упругопластических деформациях: Докт. дис. Тула, 1988.
12. Бровко Г. Л. Понятия образа процесса и пятимерной изотропии свойств материалов при конечных деформациях//Докл. АН СССР. 1989. **308.** 565—570.
13. Бровко Г. Л. Материальные и пространственные представления определяющих соотношений деформируемых сред//Прикл. матем. и механ. 1990. **54**. 814—824.
14. Dienes J. K. On the analysis of rotation and stress rate in deforming bodies// //Acta mech. 1979. **32.** 217—232.
15. Dafalias Y. F. Corotational rates for kinematic hardening at large plastic deformation//J. Appl. Mech. 1983. **50.** 561—565.
16. Dafalias Y. F. The plastic spin//J. Appl. Mech. 1985. **52.** 865—871.
17. Van der Giessen E., Wu P. D., Neale K. W. On the effect of plastic spin on large strain elastic-plastic torsion of solids bars//Int. J. Plast. 1992. **8.** 773—801.
18. Васин Р. А., Ильюшин А. А., Моссаковский П. А. Исследование определяющих соотношений и критериев разрушения на сплошных и толстостенных трубчатых цилиндрических образцах//Изв. РАН. Механ. твердого тела. 1994. № 2. 177—184.

Поступила в редакцию
05.05.96

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1996. № 5

УДК 539.374

А. В. Муравлев

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛОВ ПЛАСТИЧНОСТИ ДЛЯ ТРАЕКТОРИЙ ДЕФОРМАЦИЙ ТИПА ДВУХЗВЕННЫХ ЛОМАНЫХ В ОПЫТАХ НА СПЛОШНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБРАЗЦАХ

Рассматриваются три экспериментальные методики построения функционалов пластичности теории упругопластических процессов для траекторий деформаций типа двухзвенных ломаных в опытах на сплошных цилиндрических образцах кругового сечения, нагружаемых одновременно осевой силой и крутящим моментом по специально выбранным программам.

Для экспериментального построения функционалов пластичности теории упругопластических процессов обычно применяется методика, состоящая в нагружении тонкостенного трубчатого образца одновременно осевой силой, крутящим моментом и внутренним давлением [1]. Поскольку толщина образца по сравнению с его радиусом достаточно мала, неоднородностью распределения напряжений и деформаций по толщине образца пренебрегают, что и делает возможным построение функционалов пластичности по экспериментальным данным. Вследствие того, что образец тонкостенный, происходит преждевременная потеря устойчивости формы образца в эксперименте задолго до достижения предела прочности испытываемого материала.

Используя сплошной цилиндрический образец кругового сечения, который нагружается одновременно осевой силой и крутящим моментом, можно получать в эксперименте, не теряя устойчивости формы образца, значительно более высокий уровень деформаций, чем в эксперименте с тонкостенным трубчатым образцом. Однако при этом неоднородность распределения напряжений и деформаций в поперечном сечении сплошного образца становится настолько сильной, что ею уже невозможно пренебрегать. Учет этой неоднородности составляет основную трудность при построении функционалов пластичности по экспериментальным данным, так как регистрируемые в опыте осевая сила и крутящий момент, являясь интегральными характеристиками напряженного состояния, не позволяют без дополнительных гипотез полностью восстановить распределение напряжений в поперечном сечении образца.

Будем предполагать, что напряженно-деформированное состояние не изменяется вдоль оси кругового цилиндрического образца в пределах его рабочей части. Из этого следует ввиду осевой симметрии, что все компоненты тензоров напряжений и деформаций в цилиндрической системе координат (r, θ, z) (ось Oz совпадает с осью образца) являются функциями только радиуса r.

Нагружение происходит путем одновременного приложения к торцам образца осевой силы $P(\lambda)$ и крутящего момента $M(\lambda)$ (λ — монотонно возрастающий параметр процесса нагружения), при этом боковая цилиндрическая поверхность образца радиуса R свободна от нагрузок:

$$\sigma_{rr}(r)|_{r=R} = \sigma_{r\theta}(r)|_{r=R} = \sigma_{rz}(r)|_{r=R} = 0. \tag{1}$$

Будем предполагать, что при деформировании кругового цилиндрического образца выполняются гипотезы плоских сечений и прямолинейности радиальных волокон, обычно принимаемые в таких случаях. Предполагая дополнительно выполненным условие несжимаемости материала, для компонент тензора малых деформаций имеем следующие выражения:

$$\varepsilon_{zz} = \varepsilon(\lambda), \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{rr} = -\frac{\varepsilon(\lambda)}{2}, \quad \varepsilon_{\theta z} = \frac{\omega(\lambda)}{2} r, \quad \varepsilon_{r\theta} = \varepsilon_{rz} = 0, \tag{2}$$

где $\varepsilon(\lambda)$ — продольная деформация образца, $\omega(\lambda)$ — угол закручивания образца на единицу длины (крутка). Тогда уравнения равновесия с учетом граничных условий (1) приводятся к виду

$$\frac{d\sigma_{rr}(r)}{dr} + \frac{\sigma_{rr}(r) - \sigma_{\theta\theta}(r)}{r} = 0, \quad \sigma_{r\theta} = \sigma_{rz} = 0. \tag{3}$$

Тензорам напряжений и деформаций в точках образца, находящихся на расстоянии r от его оси, соответствуют векторы напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ и деформаций э [1], которые ввиду соотношений (2), (3) имеют вид

$$\sigma = s_i e_i, \quad \text{э} = \text{э}_i e_i \quad (i = 1, \ldots, 5),$$

$$s_1 = \sigma_{zz} - \frac{1}{2}(\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{rr}), \quad s_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}), \quad s_3 = \sqrt{3}\,\sigma_{\theta z}, \tag{4}$$

$$\text{э}_1 = \varepsilon(\lambda), \quad \text{э}_3 = \frac{\omega(\lambda)}{\sqrt{3}} r, \quad \text{э}_2 = \text{э}_4 = \text{э}_5 = 0, \quad s_4 = s_5 = 0,$$

где $\langle \mathbf{e}_i \rangle$ — ортонормированный базис в пространствах напряжений и деформаций. Из соотношений (4) следует, что для всех точек образца траектории деформаций, соответствующие процессу одновременного нагружения этого образца осевой силой $P(\lambda)$ и крутящим моментом $M(\lambda)$, являются двумерными и лежат в плоскости $(э_1, э_3)$. Поэтому вектор напряжений лежит в плоскости (s_1, s_3) и его проекция $s_2=0$ (см. [1]). Отсюда получаем

$$\sigma_{rr}=\sigma_{\theta\theta}=0. \tag{5}$$

Учитывая (4), (5), для осевой силы P и крутящего момента M имеем следующие выражения:

$$\begin{gathered} P=2\pi\int\limits_0^R \sigma_{zz}(r)\,r\,dr=2\pi\int\limits_0^R s_1(r)\,r\,dr,\\ M=2\pi\int\limits_0^R \sigma_{\theta z}r^2dr=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\int\limits_0^R s_3(r)\,r^2dr. \end{gathered} \tag{6}$$

Рассмотрим в плоскости $(э_1, э_3)$ класс траекторий деформаций типа двухзвенных ломаных, на втором звене которых вектор напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ представим в сопровождающем ортонормированном репере Френе $\langle \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle$ (вектор $\mathbf{p}$ направлен вдоль второго звена траектории деформаций) в виде

$$\boldsymbol{\sigma}=U\mathbf{p}+V\mathbf{n}. \tag{7}$$

Из частного постулата изотропии [1] следует, что U, V есть функционалы параметров внутренней геометрии траектории деформаций. Для двухзвенной ломаной такими параметрами являются: длина дуги s_0 первого звена, длина дуги Δs от точки излома до текущей точки на втором звене и угол излома ϑ_0 траектории деформаций. Таким образом, для двухзвенных ломаных функционалы пластичности U, V являются функциями аргументов s_0, ϑ_0, Δs:

$$U=U(s_0,\ \vartheta_0,\ \Delta s),\ V=V(s_0,\ \vartheta_0,\ \Delta s),\ s_0\geqslant 0,\ \Delta s\geqslant 0. \tag{8}$$

Рассмотрим три экспериментальные методики, характеризуемые своими специальными программами нагружения образцов, которые позволяют при соответствующей обработке экспериментальных данных построить функционалы пластичности $U=U(s_0, \vartheta_0, \Delta s)$, $V=V(s_0, \vartheta_0, \Delta s)$ в опытах на сплошных цилиндрических образцах.

1. Воспользуемся экспериментальной методикой, предложенной в работе [2], и рассмотрим программу первого типа нагружения сплошного цилиндрического образца, состоящую из двух этапов: первый этап — одноосное растяжение или сжатие образца до значения продольной деформации $\varepsilon=\varepsilon_0$, одинакового для всех точек образца; второй этап — кручение образца при сохраняющемся постоянном значении продольной деформации образца, равном ε_0. При этом в точках образца, находящихся на расстоянии r от его оси, траектории деформаций будут представлять собой двухзвенные ломаные со следующими параметрами внутренней геометрии:

$$s_0=\varepsilon_0,\ \vartheta_0=\frac{\pi}{2},\ \Delta s=\frac{\omega}{\sqrt{3}}\,r, \tag{9}$$

причем на втором звене этих траекторий деформаций

$$\mathbf{p}=\mathbf{e}_3,\ \mathbf{n}=\mathbf{e}_1. \tag{10}$$

С учетом (4)—(10) осевая сила P и крутящий момент M на втором этапе программы нагружения образца (с параметром нагружения $\lambda=\omega$) выразятся через функционалы пластичности U, V следующим образом:

$$P \equiv P(\varepsilon_0, \omega) = 2\pi \int_0^R V\left(\varepsilon_0, \frac{\pi}{2}, \frac{\omega}{\sqrt{3}} r\right) r dr,$$
$$M \equiv M(\varepsilon_0, \omega) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \int_0^R U\left(\varepsilon_0, \frac{\pi}{2}, \frac{\omega}{\sqrt{3}} r\right) r^2 dr. \tag{11}$$

Интегрируя по частям продифференцированные по ω соотношения (11), получим

$$V\left(\varepsilon_0, \frac{\pi}{2}, \frac{\omega}{\sqrt{3}} R\right) = \frac{1}{2\pi R^2 \omega} \frac{d}{d\omega} [\omega^2 P(\varepsilon_0, \omega)],$$
$$U\left(\varepsilon_0, \frac{\pi}{2}, \frac{\omega}{\sqrt{3}} R\right) = \frac{\sqrt{3}}{2\pi R^3 \omega^2} \frac{d}{d\omega} [\omega^3 M(\varepsilon_0, \omega)]. \tag{12}$$

В соотношениях (12) функционалы пластичности $U=U(s_0, \pi/2, \Delta s)$, $V=V(s_0, \pi/2, \Delta s)$ для траекторий деформаций типа двухзвенных ломаных с углом излома $\pi/2$ выражаются через экспериментальные зависимости $P(\varepsilon_0, \omega)$, $M(\varepsilon_0, \omega)$, которые регистрируются на втором этапе программы нагружения (выбор параметра ε_0 полностью определяет программу нагружения первого типа).

Данная методика является обобщением экспериментальной методики построения диаграммы сдвига в опыте на кручение сплошного цилиндрического образца [3, 4] и позволяет найти функционалы пластичности $U=U(s_0, \pi/2, \Delta s)$, $V=V(s_0, \pi/2, \Delta s)$ при любом конкретном значении параметра s_0 из одного единственного эксперимента.

2. Вместо параметров $s_0, \vartheta_0, \Delta s$ введем однозначно связанные с ними параметры $m, n, \Delta s$, также полностью определяющие внутреннюю геометрию траекторий деформаций типа двухзвенных ломаных:

$$m = s_0 \cos\vartheta_0, \quad n = s_0 \sin\vartheta_0, \quad \Delta s = \Delta s. \tag{13}$$

Тогда функции $U(s_0, \vartheta_0, \Delta s)$, $V(s_0, \vartheta_0, \Delta s)$ можно представить как функции аргументов $m, n, \Delta s$:

$$U(s_0, \vartheta_0, \Delta s) = \widetilde{U}(m, n, \Delta s), \quad V(s_0, \vartheta_0, \Delta s) = \widetilde{V}(m, n, \Delta s). \tag{14}$$

Воспользуемся экспериментальной методикой, предложенной в работе [5], и рассмотрим программу второго типа нагружения сплошного цилиндрического образца, состоящую из двух этапов: первый этап — нагружение образца по закону $\omega=k\cdot\varepsilon$ (k — константа) до значения продольной деформации $\varepsilon=\varepsilon_0$, одинакового для всех точек образца, и значения крутки $\omega=\omega_0=k\cdot\varepsilon_0$, второй этап — одноосное растяжение или сжатие образца (приращение продольной деформации $\Delta\varepsilon$ одинаково для всех точек образца) при сохраняющемся постоянном значении крутки, равном ω_0. При этом в точках образца, находящихся на расстоянии r от его оси, траектории деформаций будут представлять собой двухзвенные ломаные со следующими параметрами внутренней геометрии:

$$m = \varepsilon_0, \quad n = \frac{\omega_0}{\sqrt{3}} r, \quad \Delta s = \Delta\varepsilon, \tag{15}$$

причем на втором звене этих траекторий деформаций

$$\mathbf{p}=\mathbf{e}_1,\ \mathbf{n}=\mathbf{e}_3. \tag{16}$$

С учетом (4)—(8), (13)—(16) осевая сила P и крутящий момент M на втором этапе программы нагружения образца (с параметром нагружения $\lambda=\Delta\varepsilon$) выразятся через функционалы пластичности $\widetilde{U}$, $\widetilde{V}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} P &\equiv P(\varepsilon_0,\ \omega_0,\ \Delta\varepsilon)=2\pi\int\limits_0^R \widetilde{U}\left(\varepsilon_0,\ \frac{\omega_0}{\sqrt{3}}\ r,\ \Delta\varepsilon\right) r dr,\\ M &\equiv M(\varepsilon_0,\ \omega_0,\ \Delta\varepsilon)=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\int\limits_0^R \widetilde{V}\left(\varepsilon_0,\ \frac{\omega_0}{\sqrt{3}}\ r,\ \Delta\varepsilon\right) r^2 dr. \end{aligned} \tag{17}$$

Интегрируя по частям продифференцированные по ω_0 соотношения (17), получим

$$\begin{aligned} \widetilde{U}\left(\varepsilon_0,\ \frac{\omega_0}{\sqrt{3}} R,\ \Delta\varepsilon\right) &= \frac{1}{2\pi R^2\omega_0}\ \frac{d}{d\omega_0}\,[\omega_0^2 P(\varepsilon_0,\ \omega_0,\ \Delta\varepsilon)],\\ \widetilde{V}\left(\varepsilon_0,\ \frac{\omega_0}{\sqrt{3}} R,\ \Delta\varepsilon\right) &= \frac{\sqrt{3}}{2\pi R^3\omega_0^2}\ \frac{d}{d\omega_0}\,[\omega_0^3 M(\varepsilon_0,\ \omega_0,\ \Delta\varepsilon)]. \end{aligned} \tag{18}$$

В соотношениях (18) функционалы пластичности $\widetilde{U}(m,\ n,\ \Delta s)$, $\widetilde{V}(m, n, \Delta s)$ для траекторий деформаций типа двухзвенных ломаных выражаются через экспериментальные зависимости $P(\varepsilon_0,\ \omega_0,\ \Delta\varepsilon)$, $M(\varepsilon_0,\ \omega_0,\ \Delta\varepsilon)$, которые регистрируются на втором этапе программы (выбор параметров ε_0, ω_0 полностью определяет программу нагружения второго типа).

3. Вместо параметров s_0, ϑ_0, Δs введем однозначно связанные с ними параметры s_0, p, q, также полностью определяющие внутреннюю геометрию траекторий деформаций типа двухзвенных ломаных (однозначность нарушается только при $\vartheta_0=\pi/2$, однако в этом случае может быть использована первая из предложенных методик):

$$s_0=s_0,\ \ p=\operatorname{tg}\vartheta_0,\ \ q=\Delta s\cos\vartheta_0. \tag{19}$$

Тогда функции $U(s_0, \vartheta_0, \Delta s)$, $V(s_0, \vartheta_0, \Delta s)$ можно представить как функции аргументов s_0, p, q:

$$U(s_0,\ \vartheta_0,\ \Delta s)=\overline{U}(s_0,\ p,\ q),\ \ V(s_0,\ \vartheta_0,\ \Delta s)=\overline{V}(s_0,\ p,\ q). \tag{20}$$

Рассмотрим программу третьего типа нагружения сплошного цилиндрического образца, состоящую из двух этапов: первый этап — одноосное растяжение или сжатие образца до значения продольной деформации $\varepsilon=\varepsilon_0$, одинакового для всех точек образца; второй этап — нагружение образца по закону $\omega=k\cdot\Delta\varepsilon$ (k — константа, приращение продольной деформации $\Delta\varepsilon$ одинаково для всех точек образца). При этом в точках образца, находящихся на расстоянии r от его оси, траектории деформаций будут представлять собой двухзвенные ломаные со следующими параметрами внутренней геометрии:

$$s_0=\varepsilon_0,\ \ p=\frac{k}{\sqrt{3}}\,r,\ \ q=\Delta\varepsilon, \tag{21}$$

причем на втором звене

$$\mathbf{p}=\cos\vartheta_0\mathbf{e}_1+\sin\vartheta_0\mathbf{e}_3,\ \ \mathbf{n}=-\sin\vartheta_0\mathbf{e}_1+\cos\vartheta_0\mathbf{e}_3. \tag{22}$$

С учетом (4)—(8), (19)—(22) осевая сила P и крутящий момент M на втором этапе программы нагружения образца (с параметром нагружения $\lambda=\Delta\varepsilon$) выразятся через функционалы пластичности $\bar{U}$, $\bar{V}$ следующим образом:

$$P \equiv P(\varepsilon_0, k, \Delta\varepsilon) = 2\pi \int_0^R \bar{U}\left(\varepsilon_0, \frac{k}{\sqrt{3}} r, \Delta\varepsilon\right) \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3+k^2r^2}} r dr - $$
$$- 2\pi \int_0^R \bar{V}\left(\varepsilon_0, \frac{k}{\sqrt{3}} r, \Delta\varepsilon\right) \frac{k}{\sqrt{3+k^2r^2}} r^2 dr,$$
$$M \equiv M(\varepsilon_0, k, \Delta\varepsilon) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \int_0^R \bar{U}\left(\varepsilon_0, \frac{k}{\sqrt{3}} r, \Delta\varepsilon\right) \frac{k}{\sqrt{3+k^2r^2}} r^3 dr + \quad (23)$$
$$+ 2\pi \int_0^R \bar{V}\left(\varepsilon_0, \frac{k}{\sqrt{3}} r, \Delta\varepsilon\right) \frac{1}{\sqrt{3+k^2r^2}} r^2 dr.$$

Интегрируя по частям продифференцированные по k соотношения (23) и проводя преобразования, получим

$$\bar{U}\left(\varepsilon_0, \frac{k}{\sqrt{3}} R, \Delta\varepsilon\right) = \frac{\sqrt{3}}{2\pi R^2 k \sqrt{3+k^2R^2}} \times$$
$$\times \frac{d}{dk}\left[k^2 P(\varepsilon_0, k, \Delta\varepsilon) + k^3 M(\varepsilon_0, k, \Delta\varepsilon)\right],$$
$$\bar{V}\left(\varepsilon_0, \frac{k}{\sqrt{3}} R, \Delta\varepsilon\right) = \frac{\sqrt{3}}{2\pi R^2 k \sqrt{3+k^2R^2}} \times \quad (24)$$
$$\times \left\{\frac{\sqrt{3}}{kR} \frac{d}{dk}\left[k^3 M(\varepsilon_0, k, \Delta\varepsilon)\right] - \frac{kR}{\sqrt{3}} \frac{d}{dk}\left[k^2 P(\varepsilon_0, k, \Delta\varepsilon)\right]\right\}.$$

В соотношениях (24) функционалы пластичности $\bar{U}(s_0, p, q)$, $\bar{V}(s_0, p, q)$ для траекторий деформаций типа двухзвенных ломаных выражаются через экспериментальные зависимости $P(\varepsilon_0, k, \Delta\varepsilon)$, $M(\varepsilon_0, k, \Delta\varepsilon)$, которые регистрируются на втором этапе программы (выбор параметров ε_0, k полностью определяет программу нагружения третьего типа).

Для построения функционалов пластичности $\bar{U}(m, n, \Delta s)$, $\bar{V}(m, n, \Delta s)$ или $\bar{\bar{U}}(s_0, p, q)$, $\bar{V}(s_0, p, q)$ необходимо провести серии экспериментов по программам нагружения соответственно второго или третьего типа с различными значениями параметров ε_0, ω_0 или ε_0, k. Аналогично при экспериментальном построении функционалов пластичности $U(s_0, \vartheta_0, \Delta s)$, $V(s_0, \vartheta_0, \Delta s)$ с использованием тонкостенных трубчатых образцов проводятся серии экспериментов типа «веера» для двухзвенных ломаных с различными значениями угла излома ϑ_0 при выбранном значении параметра s_0 (различном для разных серий) [6].

Таким образом, представленные экспериментальные методики эквивалентны по сложности методике, использующей тонкостенный трубчатый образец, но при этом они позволяют применять в опытах более простые в изготовлении сплошные цилиндрические образцы кругового сечения, а также получать в эксперименте значительно более высокие уровни деформаций без потери устойчивости формы образца.

Автор приносит благодарность А. А. Ильюшину, Р. А. Васину и П. А. Моссаковскому за полезное обсуждение представленных экспериментальных методик.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильюшин А. А. Пластичность. Основы общей математической теории. М., 1963.
2. Муравлев А. В. Построение материальных функций некоторых двухзвенных процессов в экспериментах с толстой трубкой. Деп. в ВИНИТИ 23.01.89, № 540 В-89. М., 1989.
3. Ильюшин А. А. Пластичность. М., 1948.
4. Nadai A. Plasticity. N. Y., 1931.
5. Муравлев А. В. Об определении свойств упругопластических материалов при сложном нагружении из экспериментов на толстостенных трубчатых образцах//Некоторые задачи о поведении вязких и упругопластических конструкций. М., 1989. 67—73.
6. Васин Р. А. Некоторые вопросы связи напряжений и деформаций при сложном нагружении//Упругость и неупругость. Вып. 1. М., 1971. 59—126.

Поступила в редакцию
31.05.95

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1996. № 5

УДК 517.94

Ю. Е. Егоров, А. И. Комеч

ОБ АТТРАКТОРАХ И АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЙ В НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ ЛАМБА

В настоящей работе исследуется асимптотическое поведение решений системы

$$\mu\ddot{u}(x,\ t)=Tu''(x,\ t),\quad x\in R\setminus 0,\ t\in R, \tag{1}$$

$$m\ddot{y}(t)=F(y(t))+T[u'(0+,\ t)-u'(0-,\ t)],$$

$$m\geqslant 0,\ y(t)\equiv u(0\pm,\ t), \tag{2}$$

$\mu, T>0$. Точкой обозначается (обобщенная) производная по t, штрихом — по x. Система (1), (2) описывает взаимодействие одномерного осциллятора массы m и однородной бесконечной струны с натяжением T и постоянной линейной плотностью μ.

Формально систему (1), (2) можно записать в виде нелинейного волнового уравнения

$$(1+m\delta(x))\ddot{u}(x,\ t)=u''(x,\ t)+\delta(x)F(u(x,\ t)).$$

Асимптотическое поведение решений гиперболических уравнений с диссипацией в ограниченной области при $t\to\infty$ достаточно хорошо изучено (см., например, книгу А. В. Бабина, М. И. Вишика [1] и библиографию к ней).

Асимптотика решений нелинейных волновых уравнений во всем пространстве без диссипации исследовалась в [2—7]. В работе Ламба [7] система (1), (2) рассматривалась в линейном случае, когда $F(y)=-ky$. В [2—7] доказывалась локальная сходимость решений к нулевому решению при $t\to\infty$.

В [8—10] изучалась сходимость решений системы типа (1), (2) при $t\to\infty$ к аттрактору, состоящему из стационарных состояний. При этом