ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1993 МАТЕМАТИКА № 12 (379)

УДК 519.854

А.А.КОЛОКОЛОВ

ПРИМЕНЕНИЕ РЕГУЛЯРНЫХ РАЗБИЕНИЙ В ЦЕЛОЧИСЛЕННОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ [1)]

В [6]-[11], [16]-[29], [31], [33], [42] и других работах развивается подход к исследованию задач и методов целочисленного программирования (ЦП), основанный на использовании специальных (регулярных) разбиений релаксационных множеств рассматриваемых задач. Он позволил получить новые теоретические результаты, относящиеся к структуре задач ЦП, методам отсечения, лексикографического перебора, ветвей и границ, предложить ряд алгоритмов решения и анализа задач ЦП, провести экспериментальные исследования.

Данная статья представляет собой обзор результатов в указанном направлении. По сравнению с работой [25] здесь больше внимания уделено частично целочисленным задачам, приведены новые верхние оценки числа итераций для двойственных дробных алгоритмов отсечения в случае булева программирования (БП) и для метода ветвей и границ. Следует также отметить более ранние обзоры [21], [23] и раздел книги [32], посвященные в основном применению L-разбиения.

В п.1 излагаются постановки задач ЦП, дается определение дробного накрытия задачи, играющего существенную роль в дальнейшем изложении. В п.2 изучаются вопросы лексикографической отделимости векторов пространства R^n точками целочисленной решетки, излагается идея подхода, описывается класс применяемых (регулярных) разбиений, приводятся примеры таких разбиений. Пункт 3 посвящен более подробному описанию L-разбиения релаксационных множеств задач целочисленного линейного программирования (ЦЛП). В п.4. строятся верхние оценки мощности L-накрытий задач ЦЛП, служащие для построения оценок числа итераций (отсечений).

В п.5 изучаются регулярные отсечения и системы неравенств, которые по сравнению с правильными отсечениями характеризуются более сильным условием исключения недопустимых точек. В п.6 дается описание класса вполне регулярных отсечений, глубина которых ограничена числом целочисленных переменных задачи. Пункт 7 посвящен методам решения: строятся теоретические оценки числа итераций (отсечений) для двойственных дробных алгоритмов отсечения, рассматриваются алгоритмы перебора L-классов, ветвей и границ (схемы Лэнд и Дойг), приводятся сведения о программном обеспечении и проведенных расчетах на ЭВМ.

1. Постановки задач ЦП

Пусть Z – множество всех целых чисел, $k,n,m\in Z$, причем $1\le k\le n$, $m\ge 1$, $N' = \{1,...,n\}$, $N_k\subseteq N'$, $|N_k|=k$, $x=(x_1,...,x_n)^T$, $x_i\in R$, $f_i(x)$, $i=0,1,...,m$, – вещественно-значные функции, $b_i\in R$, $i=1,...,m$. Рассматривается задача ЦП: найти вектор x, максимизирующий $f_0(x)$, т.е.

$$f_0(x) \to \max, \tag{1.1}$$

[1)] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-012-557).

при условиях

$$f_i(x) \leqslant b_i, \quad i=1,\dots,m, \tag{1.2}$$

$$x_j \in Z, \ j \in N_k. \tag{1.3}$$

Множество, определяемое системой (1.2), называется *релаксационным множеством* задачи. Оно играет важную роль в теоретических исследованиях и методах решения задач ЦП. Значительное внимание мы уделяем изучению задач ЦЛП, у которых все функции f_i линейные:

$$f_0(x) = (c,x) \longrightarrow \max \tag{1.4}$$

при условиях

$$Ax \leqslant b, \quad x \geqslant 0, \tag{1.5}$$

$$x_j \in Z, \quad j \in N_k. \tag{1.6}$$

Здесь A – $(m\times n)$-матрица, c – n-вектор, b – m-вектор, причем в ряде случаев предполагается, что они являются целочисленными.

Лексикографическая задача (ЛЗ), соответствующая (1.1)-(1.3), характеризуется тем, что в ней среди ее решений ищется лексикографически максимальное. Во многих случаях нам будет удобно рассматривать ЛЗ в постановках, в которых целевая функция включается в ограничения задачи.

Пусть Ω – непустое замкнутое множество в пространстве R^n, $n \geqslant 1$, $Z^{n,k}$ – множество всех вещественных n-векторов, у которых первые $k\geqslant 1$ координат являются целыми. Если $k=n$, то $Z^{n,k}$ совпадает с множеством всех целочисленных векторов и обозначается Z^n. Предположим, что Ω имеет лексикографически максимальный элемент x^*. Рассмотрим лексикографическую задачу ЦП следующего вида: найти лексикографически максимальную точку z_* множества $(\Omega\cap Z^{n,k})$, т.е.

$$\text{найти } z_* = \operatorname{lex\,max}(\Omega\cap Z^{n,k}). \tag{1.7}$$

Любой вектор из $(\Omega\cap Z^{n,k})$ называется *допустимым решением*, а z_* – *решением*. Решение задачи (1.7) единственно (если оно существует). По аналогии с обычной постановкой Ω называется *релаксационным множеством* задачи.

Поскольку в данной работе часто рассматриваются и полностью целочисленные задачи, т.е. для $k=n$, то удобно выделить такую формулировку:

$$\text{найти } z_* = \operatorname{lex\,max}(\Omega\cap Z^{n}). \tag{1.8}$$

Поиск решения задачи (1.1)-(1.3) можно свести к решению одной или нескольких задач типа (1.7). Для этого необходимо переупорядочить переменные и подходящим образом включить целевую функцию в ограничения задачи. Например, можно ввести целочисленную переменную x_0 и добавить ограничение $x_0-f_0(x)\leqslant 0$. Однако, следует иметь в виду, что оптимальное решение новой задачи в общем случае может не быть таковым для исходной постановки.

Важнейшую роль в исследовании задачи (1.7) и методов ее решения играет множество

$$\Omega_* = \{x\in\Omega\colon\ x\succ z \text{ для любого } z\in(\Omega\cap Z^{n,k})\}, \tag{1.9}$$

которое называется ее *дробным накрытием*. Здесь и в дальнейшем $\succ$, $\succcurlyeq$ – символы лексикографического сравнения. Если $x^*\in Z^{n,k}$, то $\Omega_*=\varnothing$. В случае $\Omega\cap Z^{n,k}=\varnothing$ непосредственно из (1.9) получаем $\Omega_*=\Omega$. Выделение этой части релаксационного множества задачи связано с тем, что в рассматриваемых нами методах ЦП происходит последовательное исключение точек из Ω_*, т.е. эти методы можно рассматривать как определенные способы "снятия" дробного накрытия. В алгоритмах отсечения это обычно осуществляется с помощью дополнительных линейных ограничений (отсечений).

Для обеспечения существования z_* (при $\Omega \cap Z^{n,k} \neq \varnothing$) будем использовать, в основном, требование ограниченности Ω сверху: найдется $d \in R^n$ такой, что $x \leqslant d$ для всех $x \in \Omega$. Класс замкнутых ограниченных сверху множеств обозначим K^B.

2. Разбиения

В дальнейшем нам потребуются некоторые лексикографические свойства векторов из R^n. Пусть $x, y \in R^n$ и $x \succ y$. Будем говорить, что векторы x и y *отделимы*, если найдется $z \in Z^n$, для которого $x \succ z \succ y$. Точку z назовем *отделяющей*.

Имеется тесная связь между отделимостью и "округлениями" векторов [19], [21], [25]. Пусть $B^n = \{x\colon 0 \leqslant x_i \leqslant 1,\ i=1,\dots,n\}$. Каждой вершине $\delta \in B^n$ поставим в соответствие обозначаемое тем же символом (для простоты) отображение $\delta\colon R^n \to Z^n$, называемое *округлением*, по правилу

$$x \to \delta(x) = (\delta_1(x_1),\dots,\delta_n(x_n))^T,$$

где $\delta_i(x_i) = [x_i]$, если $\delta_i = 0$, и $\delta_i(x_i) =]x_i[$, если $\delta_i = 1$, $i=1,\dots,n$.

Таким образом, существуют 2^n различных округлений. Зафиксируем некоторое округление δ. Множество целочисленных векторов, получающихся с помощью округления δ всех элементов данного множества $X \subseteq R^n$, обозначим через $\delta(X)$. В вопросах отделимости важную роль играют специальные пары округлений. Округления δ и δ^* называются *взаимными*, если для соответствующих им векторов выполняется $\delta + \delta^* = e_n$, где $e_n = (1,\dots,1)^T$. Если x и y отделимы, то одна из отделяющих их точек содержится в множестве $\Delta = \{\delta(x), \delta(y), \delta^*(x), \delta^*(y)\}$. Лексикографическая отделимость тесно связана с разбиениями множеств и регулярными последовательностями, которые рассматриваются ниже.

Идея подхода состоит в следующем. Для анализа задач ЦП и методов их решения вводится разбиение F пространства R^n, которое индуцирует разбиение релаксационного множества Ω и обладает рядом хороших свойств, связанных со спецификой задач ЦП. На данном этапе исследования (в случае $k=n$) мы выделили три таких свойства:

a) каждая точка $z \in Z^n$ образует отдельный класс разбиения, остальные классы состоят только из нецелочисленных точек и называются *дробными*;

b) если X – ограниченное множество, то фактор-множество X/F конечное;

c) для любого $X \subset R^n$ и любого $z \in Z^n$ имеет место $(X+z)/F = (X/F) + z$.

Элементы из X/F называются *F-классами*, а множество Ω_*/F – *F-накрытием* задачи (1.7).

Выделение дробных классов связано с тем, что во многих алгоритмах используются процедуры их исключения, при этом сохраняются допустимые решения задачи ЦП. Условие b) вызвано необходимостью гарантировать конечность алгоритмов для ограниченных множеств, а c) – требованием сохранения структуры разбиения при сдвиге на целочисленный вектор (оно используется при изучении вопросов периодичности дробных накрытий и оптимальных решений [28], [29]).

Следует отметить, что в ряде случаев полезными могут оказаться разбиения, определенные лишь для некоторой части пространства R^n, напр., для релаксационного множества Ω.

Разбиение, удовлетворяющее условиям a)–c), называется *регулярным*. В терминах таких разбиений измеряется "объем" дробного накрытия задачи ЦП, изучается строение релаксационных множеств, описываются классы отсечений, определяется их глубина, разрабатываются и сравниваются алгоритмы, анализируются последовательности приближений, строятся оценки

числа итераций и отсечений, проводятся экспериментальные исследования алгоритмов и тестовых задач.

Аналогичный класс разбиений описан и для частично целочисленной задачи (1.7). В этом случае Z^n надо заменить на $Z^{n,k}$, а вместо условия а) использовать следующие:

а$_1$) $x,y\in Z^{n,k}$ принадлежат одному классу разбиения $\Leftrightarrow$ $x_i=y_i$, $i\in N_k$;

а$_2$) если $x\in Z^{n,k}$ и $y\notin Z^{n,k}$, то они лежат в различных классах разбиения.

Чтобы не усложнять изложение, в этом разделе мы рассматриваем в основном полностью целочисленный случай, т.е. $k=n$.

Далее нам потребуется отношение лексикографического сравнения множеств. Пусть X, Y – некоторые непустые множества из R^n. Будем говорить, что X лексикографически больше Y и писать $X\succ Y$, если $x\succ y$ для любых $x\in X$, $y\in Y$. Запись $X\succcurlyeq Y$ означает, что либо $X\succ Y$, либо $X=Y$.

Особенно важную роль в изучении лексикографических задач и обосновании методов их решения играет свойство *согласованности разбиения с лексикографическим порядком*. Будем считать, что регулярное разбиение F обладает указанным свойством, если введенное выше отношение лексикографического сравнения множеств является линейным порядком в R^n/F. Подробнее мы остановимся на данном вопросе после рассмотрения примеров разбиений.

К настоящему времени наиболее изученным является *L-разбиение*, которое можно определить следующим образом. Точки $x,y\in R^n$ $(x\neq y)$ называются *L-эквивалентными*, если не существует отделяющей их точки $z\in Z^n$. Легко проверяется, что данное отношение эквивалентности порождает разбиение пространства R^n. Отметим ряд важных свойств L-разбиения.

1) L-разбиение является регулярным разбиением.

2) L-разбиение согласовано с лексикографическим порядком.

Отсюда следует, что для ограниченного множества X имеет место

$$X/L = \{V_1,\dots,V_p\},\quad V_i\succ V_{i+1},\quad i=1,\dots,p-1.$$

Если взять по одному представителю из каждого $V\in X/L$, то получим дискретное множество, любые два элемента которого отделимы. С помощью таких множеств впервые были построены верхние оценки числа отсечений для первого алгоритма Гомори [13]–[15]. Следует отметить, что в дальнейшем такого типа оценки были получены в работе [43].

3) Любой дробный класс $V\in R^n/L$ можно представить в виде

$$V = \{x:\ x_1=a_1,\dots,x_{r-1}=a_{r-1},\ a_r<x_r<a_r+1\},$$

где a_i, $i=1,\dots,r$, – некоторые целые числа, $1\leqslant r\leqslant n$. Число

$$\operatorname{rank} V' = \begin{cases} r, & \text{если } V' \text{ – дробный } L\text{-класс;}\\ n+1 & \text{в противном случае,}\end{cases}$$

называется *рангом* класса V'.

Подчеркнем также, что разбиение множества на L-классы существенно зависит от упорядочения координат в R^n.

Рассмотрим примеры других регулярных разбиений, которые оказываются полезными для ЦП. Класс *кубических разбиений* тесно связан с округлениями нецелочисленных точек (см. п.1). Кубическое разбиение, отвечающее округлению δ, определяется условиями: каждая точка $z\in Z^n$ образует отдельный класс разбиения, а нецелочисленные точки x и y *δ-эквивалентны*, если $\delta(x)=\delta(y)$.

С помощью взаимных округлений удобно ввести более мелкое *каноническое* разбиение K, которое оказывается полезным при исследовании алгоритмов отсечения, ветвей и границ и

других. Пусть δ и δ^* – взаимные округления. Точки x и y являются *K-эквивалентными*, если одновременно выполняются соотношения: $\delta(x)=\delta(y)$, $\delta^*(x)=\delta^*(y)$. Нами рассматривались и некоторые другие разбиения [21].

Остановимся на вопросе согласованности разбиений с лексикографическим порядком. Сначала заметим, что кубические и каноническое разбиения в общем случае не согласованы с лексикографическим порядком. Если исключить требование лексикографической сравнимости дробных классов разбиения, то приходим к следующему определению. Будем говорить, что *разбиение F частично согласовано с лексикографическим порядком*, если для любого дробного класса $V\in R^n/F$ и любого $z\in Z^n$ имеет место либо $V\succ z$, либо $z\succ V$. Нетрудно проверить, что разбиение K обладает этим свойством, а любое кубическое – нет.

ТЕОРЕМА 2.1 ([25]). *Пусть F – разбиение пространства R^n, удовлетворяющее условию* а) *в определении регулярного разбиения, и оно частично согласовано с лексикографическим порядком. Тогда F либо совпадает с L-разбиением, либо является его измельчением.*

Из этой теоремы следует аналогичный результат для регулярного разбиения, согласованного с лексикографическим порядком [25]. Его доказательство совпадает с приведенным в [25].

При построении оценок числа итераций может потребоваться сравнение мощностей X/F_1 и X/F_2 для различных разбиений F_1 и F_2. Ясно, что дробный L-класс может содержать бесконечное число элементов разбиений δ и K. Имеет место

ТЕОРЕМА 2.2. *Пусть $X\subseteq R^n$ и δ – некоторое кубическое разбиение. Любой дробный класс множества X/δ состоит из не более чем n L-классов.*

Данная оценка является точной [19]. Из нее вытекает, что $|X/L|\leq n|X/\delta|$.

Важное место в исследовании алгоритмов занимает анализ порождаемых ими последовательностей приближений на основе лексикографии и разбиений пространства. Пусть F – регулярное разбиение, $S=\{x^{(t)}\}$, $t\in T$, – некоторая последовательность приближений и $q(S,W)$ – количество членов S, попадающих в класс $W\in R^n/F$. Если $q(S,W)<+\infty$ для любого такого класса, то последовательность S называется *слабо регулярной относительно F* (или *слабо F-регулярной*). Величину

$$\zeta^F(S) = \max\{q(S,W):\ W\in R^n/F\}$$

назовем *степенью нерегулярности S относительно F*. В случае $\zeta^F(S)=1$ последовательность S называется *F-регулярной*. Пусть X – ограниченное множество и все члены S содержатся в X, тогда:

1) если S слабо F-регулярна, то она конечная; отсюда вытекает, что такая последовательность дискретна;

2) $|S|\leq\zeta^F(S)|X/F|$.

Для L-разбиения справедлива

ТЕОРЕМА 2.3. *Пусть δ и δ^* – взаимные округления и $X\subseteq R^n$. Последовательность нецелочисленных точек S, все члены которой содержатся в X, является L-регулярной тогда и только тогда, когда любые два ее члена отделяются некоторой точкой из $\delta(X)\cup\delta^*(X)$.*

С помощью округлений получены верхние оценки числа элементов L-регулярной последовательности, которые были использованы при выводе верхних оценок числа отсечений для первого алгоритма Гомори [13]–[15].

3. L-структура задач ЦП

Изучение структуры разбиений множеств (в частности, релаксационных многогранников задач ЦЛП) на L-классы, т.е. их *L-структуры*, нам необходимо в связи с тем, что эта структура используется при построении и анализе алгоритмов. Кроме того, эти вопросы имеют и самостоятельный интерес. Они рассматривались в [8], [9], [16], [19], [22], [25] [29] и других работах.

Пусть $X \subseteq R^n$ и $X_0 = X \cap Z^n$. Подмножество Q дробных классов из X/L называется *комплексом*, если для любых $V, V' \in Q$ $(V \succ V')$ не найдется точки $z \in X_0$ такой, что $V \succ z \succ V'$. Комплекс, который не является собственным подмножеством некоторого другого комплекса, называется *полным*. Через $C(X)$ обозначим совокупность всех комплексов, порождаемых X. Для описания степени "дробности" множеств введем функцию

$$\Psi(X) = \max\{|Q|: Q \in C(X)\}.$$

Отметим некоторые ее свойства.

1) Если X ограничено, то $\Psi(X) < +\infty$.

2) Для ряда классов выпуклых множеств значения $\Psi(X)$ ограничены сверху константой или некоторой функцией от n. Так, если X содержится в параллелепипеде $P = \{x: a_j \leq x_j \leq a'_j, j=1,\dots,n\}$, причем все $a_j, a'_j \in Z$, то $\Psi(X) \leq |P_0| - 1$.

3) При переупорядочении координат значения $\Psi(X)$ могут изменяться, причем существенно. Вообще, следует отметить, что L-структура множеств зависит от унимодулярных преобразований пространства.

После рассмотрения алгоритмов в п.7 станет ясно, что для множеств с малыми значениями функции $\Psi(X)$ достаточно легко решается ЛЗ (1.8). Имеются классы выпуклых множеств у которых значения $\Psi(X)$ ограничены сверху размерностью пространства R^n. Положим

$$M(A,b) = \{x: Ax \leq b,\ x \geq 0\},$$

где A – $(m \times n)$-матрица, b – m-вектор.

ТЕОРЕМА 3.1. *Если $A \geq 0$ и $b \geq 0$, то имеет место оценка*

$$\Psi(M(A,b)) \leq n. \tag{3.1}$$

Данная оценка достигается, напр., на симплексе, определенном неравенствами $2(e_n, x) \leq 1$, $x \geq 0$. Аналогичный результат справедлив и для системы $Ax \geq b$, $x \geq 0$ с неотрицательными исходными данными. Условие неотрицательности коэффициентов матрицы A можно несколько ослабить [12]. В [9] показано, что похожей L-структурой обладает релаксационное множество задачи размещения объектов на линии.

Приведем пример многогранника, имеющего "мощные" комплексы дробных L-классов [19]. Такие многогранники единственным образом возникают в несобственных задачах ЦП [5]. Пусть $n \geq 2$, q нечетное, причем $1 \leq q < 2n$,

$$M = \{x: x \in B^n,\ 2\sum_{i=1}^{n} x_i = q\}.$$

Так как q нечетное, то $M_0 = \varnothing$. Этот многогранник был использован Джерослоу для построения контрпримера к методу ветвей и границ. Нами показано, что

$$|M/L| \geq 2C_{n-1}^{[q/2]}. \tag{3.2}$$

Для некоторых классов множеств имеет место чередование целочисленных точек и дробных L-классов (в отношении лексикографического порядка). Их изучение приводит к следую-

щему определению. Будем говорить, что множество X имеет *альтернирующую L-структуру*, если выполняются условия:

1) $\Psi(X) \leq 1$;

2) лексикографически максимальный и минимальный элементы множества X/L являются целочисленными (если они существуют);

3) для любых $z, z' \in X_0$ $(z \succ z')$ найдется $V \in X/L$ такой, что $z \succ V \succ z'$.

Ясно, что для выпуклых множеств условие 3) всегда выполняется. Нетрудно установить, что альтернирующей L-структурой обладают параллелепипед P, симплекс S и слой C:

$$S = \{x\colon \sum_{i=1}^{n} x_i \leq \beta,\ x_i \geq d_i,\ i=1,\dots,n\}, \qquad C = \{x\colon \alpha \leq \sum_{i=1}^{n} x_i \leq \beta\},$$

если α, β и все d_i принадлежат Z, а также пересечение слоя и параллелепипеда. В общем случае при пересечении множеств свойство альтернируемости не сохраняется.

Альтернирующая L-структура используется для построения оценок мощности L-накрытий и числа итераций алгоритмов отсечения и при разработке алгоритмов. Оказалось, что альтернирующую L-структуру имеют релаксационные множества задач об упаковке и покрытии множеств, задачи стандартизации и другие [19], [21], [22], [23], [25]. В [22] предложен критерий альтернируемости L-структуры для выпуклых множеств. На его основе исследована L-структура множества, задаваемого системой

$$A^1x^1 + A^2x^2 \leq b, \tag{3.3}$$

$$x^1 \geq 0, \quad x^2 \geq 0, \tag{3.4}$$

где A^1 – $(m \times n_1)$-матрица, A^2 – $(m \times n_2)$-матрица, x^1 – n_1-вектор, x^2 – n_2-вектор, b – m-вектор, причем $n_1 + n_2 \geq 1$ и допускается $n_1 \times n_2 = 0$.

ТЕОРЕМА 3.2. *Если матрица A^1 абсолютно унимодулярна, A^2 булева, а вектор b целочисленный, то выпуклое многогранное множество, определяемое системой* (3.3)–(3.4), *имеет альтернирующую L-структуру.*

Из теоремы вытекает, что альтернирующую L-структуру имеет многогранник задачи об упаковке множеств, у которой A булева, а $b = e_m$. Подобным свойством обладает и многогранник, определяемый системой $Ax \geq b$, $0 \leq x \leq e_n$ для булевой матрицы A. Если матрица A^1 булева, а A^2 абсолютно унимодулярна, то свойство альтернируемости может нарушиться.

Рассмотрим выпуклое многогранное множество $M(A,b)$ для случая, когда A абсолютно унимодулярна и $b \in Z^m$. Хорошо известно, что при этих условиях оно является *целочисленным*, т.е. все его вершины имеют лишь целочисленные координаты. Поэтому достаточно естественно возникает вопрос, как связана целочисленность выпуклых многогранных множеств и альтернируемость L-структуры. В общем случае легко строятся примеры целочисленных многогранных множеств, которые не обладают такой структурой. Однако для задач БП оказалась справедливой

ТЕОРЕМА 3.4. *Любое целочисленное многогранное множество, лежащее в B^n, имеет альтернирующую L-структуру.*

Эта теорема является следствием более общего результата, приводимого в п.4., который связан с распределением нецелочисленных вершин многогранников задач БП по дробным L-классам [42]. В частности, она может быть использована при изучении вопроса о целочисленности $M(A,b)$. Если в $M(A,b)/L$ найден комплекс дробных L-классов мощности $p \geq 2$, то $M(A,b)$ имеет нецелочисленные вершины.

4. Верхние оценки мощности L-накрытий

Общим методом построения верхних оценок для Ω_*/L через исходные параметры задач является погружение Ω_* в различные множества с последующей оценкой числа целочисленных точек в них. Предположим, что дробное накрытие задачи (1.8) содержится в ограниченном множестве X. Тогда, исходя непосредственно из определений, нетрудно проверить, что:

1) $|\Omega_*/L| \leq \Psi(X)(|X_0|+1)$;

2) если X имеет альтернирующую L-структуру и $X_0 \neq \varnothing$, то $|\Omega_*/L| \leq |X_0|-1$;

3) если $A \geq 0$, $b \geq 0$ и $X=M(A,b)$, то $|\Omega_*/L| \leq n|X_0|$.

Мы применяли погружения дробных накрытий задач ЦП в выпуклые многогранники (параллелепипеды, симплексы, слои и другие), для которых относительно легко строятся оценки числа целочисленных точек [8], [17], [19], [21], [25], [28]. Например, в случае $X=P$ получаем

$$|\Omega_*/L| \leq -1+\prod_{j=1}^{n}(a'_j-a_j+1).$$

Следовательно, для Ω_* из куба B^n выполняется $|\Omega_*/L| \leq 2^n-1$. Нетрудно построить примеры множеств X и Ω, для которых указанные оценки достигаются.

Многогранник задачи Джерослоу не содержит целочисленных точек и поэтому совпадает с дробным накрытием. Отсюда вытекает, что в этом примере для L-накрытия имеет место нижняя оценка (3.2).

Перейдем к построению верхних оценок мощности L-накрытия задачи ЦЛП (1.4)-(1.6) для полностью целочисленного случая, т.е. когда $k=n$. Предположим, что все исходные данные в ней целочисленные. Через z'' обозначим лексикографически максимальное оптимальное решение этой задачи (если оно существует). Пусть M - множество, определяемое системой (1.5), $x'=(x_0,x_1,\dots,x_n)^T$ и

$$M' = \{x' \in R^{n+1}:\ x_0-(c,x)=0,\ x \in M\}.$$

Тогда соответствующая ей задача (1.8) имеет вид

$$\text{найти } z_* = \operatorname{lex\,max}(M' \cap Z^{n+1}). \tag{4.1}$$

Введем множество

$$M'' = \begin{cases} M, & \text{если } M_0=\varnothing; \\ \{x \in M:\ (c,x) \geq (c,z'');\ \text{если } (c,x)=(c,z''),\ \text{то } x \succ z''\}, & \text{если } M_0 \neq \varnothing. \end{cases} \tag{4.2}$$

Напомним, что $M_0=M \cap Z^n$. Между точками множества M'' и дробного накрытия естественным образом устанавливается взаимно-однозначное соответствие

$$x = (x_1,\dots,x_n)^T \in M'' \iff x' = (x_0,x_1,\dots,x_n)^T \in M'_*,$$

где $x_0=(c,x)$. Предположим, что M'' ограничено и найдем

$$\nu = \inf\{(c,x):\ x \in M''\} \quad \text{и} \quad \mu = \sup\{(c,x):\ x \in M''\}. \tag{4.3}$$

Отсюда вытекает, что любая точка x' из дробного накрытия M'_* удовлетворяет условиям

$$\nu \leq x_0 \leq \mu, \quad (x_1,\dots,x_n)^T \in M''.$$

Нетрудно установить связь между мощностями M'_*/L и M''/L

$$|M'_*/L| \leq 1+([\mu]-]\nu[+1)(|M''/L|+1). \tag{4.4}$$

Для построения верхних оценок мощности L-накрытий задач ЦЛП через исходные параметры задачи применим погружение M'' в многогранники. Сначала рассмотрим случай погружения в параллелепипед.

ТЕОРЕМА 4.1. *Предположим, что в полностью целочисленной задаче ЦЛП* (1.4)–(1.6) *все исходные данные целочисленные и соответствующее ей множество M'' лежит в параллелепипеде P. Тогда*

$$|M''_*/L| \leq 1+([\mu]-]\nu[+1)\prod_{j=1}^{n}(a'_j-a_j+1). \tag{4.5}$$

Оценки (4.4)–(4.5) показывают, что мощность L-накрытия растет с увеличением разрыва двойственности и "объема" множества M''. Если задача ЦЛП имеет оптимальное решение, то оценку (4.5) можно уменьшить на 1. Существуют задачи БП, у которых эта мощность больше 2^n [19].

Отметим, что величина $[\mu]-]\nu[$ легко оценивается сверху с помощью коэффициентов c_j, a_j, a'_j, $j=1,\dots,n$. В частности, если $0\leq c_j\leq c'$, $j=1,\dots,n$, $c'\geq 1$, то она не превышает $nc'\max\{a'_j-a_j\colon j=1,\dots,n\}$. При необходимости можно указать и более точные оценки (особенно для специальных классов задач).

Приведем пример погружения в симплекс для многомерной задачи о рюкзаке (задачи (1.4)–(1.6) с неотрицательными целочисленными исходными данными при $k=n$) [25]. Предполагается также, что все столбцы матрицы A и вектор b ненулевые. Релаксационный многогранник этой задачи, а следовательно, и множество M'' содержатся в симплексе

$$S'=\left\{x\colon \sum_{j=1}^{n}x_j\leq b',\ x_j\geq 0,\ j=1,\dots,n\right\},\quad b'=\sum_{i=1}^{m}b_i.$$

Так как S' имеет альтернирующую L-структуру, то $|M''/L|\leq|S'_0|-1$. Нетрудно проверить, что $|S'_0|\leq(1+n)^{b'}$, откуда вытекает

ТЕОРЕМА 4.2. *Для L-накрытия многомерной задачи о рюкзаке (с целочисленными исходными данными) справедлива оценка*

$$|M'_*/L| \leq ([\mu]-\nu+1)(1+n)^{b'}. \tag{4.6}$$

Для одномерной задачи о рюкзаке со специальным порядком переменных получена верхняя оценка, которая не зависит от правой части [28]. Ее вывод основывается на свойстве периодичности дробных накрытий и оптимальных решений. В [27] изучалась указанная периодичность для задачи ЦП на конусе.

Рассмотрим задачу об упаковке множества, которая является частным случаем задачи о рюкзаке. Предположим, что $c=e_n$. Для этой задачи $b'=m$ и $[\mu]-\nu+1\leq m-1$, поэтому из (4.6) вытекает

$$|M'_*/L| \leq (m-1)(1+n)^m.$$

Представляет значительный интерес вопрос о связи множества дробных вершин релаксационного многогранника задачи ЦЛП с комплексами дробных L-классов. Для общей задачи ЦЛП порождение мощных комплексов не обязательно связано с наличием большого числа дробных вершин этого многогранника. Однако в случае БП ситуация оказалось иной [42].

Пусть M – выпуклый многогранник, содержащийся в B^n. Рассматривается лексикографическая задача БП:

$$\text{найти } z_* = \operatorname{lex}\max(M\cap Z^n). \tag{4.7}$$

L-класс из M/L называется *вершинным*, если он содержит хотя бы одну вершину многогранника M.

ТЕОРЕМА 4.3. *В любом полном комплексе мощности p из $C(M)$ содержится не менее $[p/2]$ вершинных L-классов.*

Нетрудно построить примеры задач, у которых полные комплексы состоят только из вершинных L-классов. Обозначим через $v(M_*)$ число вершинных классов в M_*/L.

ТЕОРЕМА 4.4. *Для мощности L-накрытия задачи* (4.7) *имеет место оценка*

$$|M_*/L| \leq 2\upsilon(M_*).$$

Таким образом, мощные L-накрытия могут возникать лишь при большом числе нецелочисленных вершин многогранника M. Нами построены примеры задач в R^n, для которых полученные оценки достигаются и мощность L-накрытия растет экспоненциально с увеличением n.

5. Регулярные отсечения и системы неравенств

Теоретической основой многих алгоритмов ЦП является возможность построения линейного неравенства (правильного отсечения), строго отделяющего данную нецелочисленную точку от выпуклой оболочки допустимых решений задачи ЦП. В "классической" схеме отсечения используется следующее определение. Рассмотрим задачу (1.1)-(1.3). Пусть x^* - оптимальное решение задачи (1.1)-(1.2), причем найдется $j \in N_k$, для которого $x_j^* \notin Z$. Линейное неравенство

$$(\gamma, x) \leq \gamma_0 \tag{5.1}$$

называется *правильным отсечением*, если:

а) $(\gamma, x^*) > \gamma_0$;

б) $(\gamma, z) \leq \gamma_0$ для всех допустимых решений z задачи ЦП.

Для лексикографической задачи (1.7) определение правильного отсечения отличается лишь тем, что в нем вместо оптимального решения задачи (1.1)-(1.2) используется $x^* = \operatorname{lex\,max} \Omega$. Предложено значительное число способов построения таких отсечений [3], [7], [19], [21], [24], [25], [30], [32]-[37], [40], [41]. Широко известны отсечения Данцига и Гомори [19], [29], [34], [40].

Кроме того, в алгоритмах отсечения (напр., в полностью целочисленных алгоритмах) применяются неравенства, которые обладают лишь свойством б). Они называются *правильными неравенствами*. Хорошо известно, что процесс решения задачи, основанный на правильных отсечениях, может оказаться бесконечным (напр., алгоритм Данцига [30]). Это связано с тем, что среди правильных отсечений могут встретиться весьма "слабые", исключающие лишь малую часть дробного накрытия. Наш подход состоит в выделении отсечений, которые гарантируют исключение x^* вместе с содержащим его элементом регулярного разбиения. Для L_k-разбиения и класса K^B это всегда можно сделать (см. ниже теорему 5.1) [19], [21], [25].

Применение таких отсечений открывает хорошие перспективы в исследовании вопросов конечности алгоритмов и построении оценок числа итераций. Если L_k-накрытие задачи состоит из конечного числа элементов и в алгоритме периодически используются L_k-регулярные отсечения, то таким путем за конечное число шагов нам удастся снять все накрытие задачи, а при некоторых предположениях и построить верхние оценки числа итераций. Что касается произвольного регулярного разбиения, то здесь одного отсечения для исключения F-класса может оказаться недостаточно и мы вынуждены перейти к рассмотрению систем линейных неравенств.

Рассматривается задача (1.7) и регулярное разбиение F. Пусть $x^* \notin Z^{n,k}$ и $V^F_{x^*}(\Omega_*)$ - элемент из Ω_*/F, содержащий x^*. Линейное неравенство (5.1) называетя *регулярным отсечением для F (или F-регулярным)*, если:

а) $(\gamma, x) > \gamma_0$ для всех $x \in V^F_{x^*}(\Omega_*)$;

б) $(\gamma, z) \leq \gamma_0$ для всех $z \in \Omega \cap Z^{n,k}$.

Таким образом, F-регулярное отсечение отличается от правильного более сильным условием а): здесь требуется исключить из Ω_* по крайней мере весь класс разбиения, содержащий x^*.

Для любого $x \notin Z^n$ определим $\Phi(x)=\min\{i\colon x_i \neq [x_i],\ i=1,\dots,n\}$.

ТЕОРЕМА 5.1. *Предположим, что для задачи* (1.7) *выполнены условия:* $x^* \notin Z^{n,k}$ *и найдется* $d \in Z^{n,k}$ *такой, что* $x \leq d$ *для всех* $x \in \Omega$. *Тогда для любого* $\alpha \geq 1+\max\{(d_i - x_i^*)\colon i=1,\dots,k\}$ *линейное неравенство*

$$\sum_{i=1}^{\Phi(x^*)-1} \alpha^{\Phi(x^*)-i}(x_i - x_i^*) + x_{\Phi(x^*)} \leq [x^*_{\Phi(x^*)}] \tag{5.2}$$

является L_k*-регулярным отсечением.*

Для ограниченного множества аналогичные отсечения можно получить, используя его диаметр [19], [21]. Доказательство теоремы 5.1 в основных чертах совпадает с изложенным в [19].

Нами установлено, что свойство L-регулярности имеется у ряда отсечений, предложенных Гомори и другими авторами [7], [19], [30], [32], [34]-[37]. При этом важную роль играют правила выбора производящей строки и формулы построения отсечений. В случае задач БП (когда $\Omega \subset B^n$) L_k-регулярным является, напр., отсечение

$$\sum_{j \in J_+(x^*)} x_j + x_{\Phi(x^*)} \leq |J_+(x^*)|, \tag{5.3}$$

где

$$J_+(x^*) = \{j\colon x_j^* = 1,\ j=1,\dots,\Phi(x^*)-1\}.$$

Отметим, что оно представляет собой определенное "усиление" отсечения B-алгоритма [30].

В первом алгоритме Гомори регулярным (для L-разбиения) является хорошо известное отсечение

$$\sum_{j=1}^{n} \{a_{pj}\} y_j \geq \{a_{p0}\}. \tag{5.4}$$

Оно строится по производящей строке p, выбираемой по правилу

$$p = \min\{i\colon a_{i0} \neq [a_{i0}],\ i=0,1,\dots,n+m\}.$$

Здесь a_{pj}, $j=0,1,\dots,n$, – коэффициенты строки лексикографически оптимальной симплексной таблицы, y_j, $j=1,\dots,n$, – небазисные переменные этой таблицы. Отсечение Данцига в общем случае не является L-регулярным, что отрицательно сказывается на сходимости алгоритмов. На основе теоремы 5.1 нетрудно показать, что имеет место

ТЕОРЕМА 5.2. *Предположим, что для задачи* (1.7) *выполнены условия теоремы* 5.1. *Тогда существует система из* $s \leq k$ *правильных линейных неравенств типа* (5.2), *исключающая дробное накрытие этой задачи.*

Для систем неравенств используются аналогичные определения. Пусть G – $(p \times n)$-матрица, g – m-вектор. Система

$$Gx \leq g \tag{5.5}$$

называется *правильно отсекающей*, если x^* ей не удовлетворяет и $Gz \leq g$ для всех $z \in \Omega_0$. Будем говорить, что правильно отсекающая система является *F-регулярной*, если ей не удовлетворяет ни одна точка из $V^F_{x^*}(\Omega_*)$. Вызывает интерес вопрос о минимальной мощности F-регулярной системы для заданного класса множеств и разбиения F. Из сказанного выше сле-

дует, что для класса K^B и любого регулярного разбиения она не превышает величины k, а в случае L_k-разбиений и канонического разбиения равна 1. Для кубических разбиений она может быть больше 1 [27], [31].

В исследованиях по методу отсечения значительное внимание уделяется вопросам эффективности отсечений и их сравнению [6], [7], [20], [21], [25], [30], [32], [34]-[37]. "Объем" отрезаемой части дробного накрытия мы тоже будем измерять с помощью разбиений. Пусть F - некоторое регулярное разбиение. *Глубиной* системы правильных линейных неравенств (5.5) относительно разбиения F назовем число полностью исключаемых ею элементов из Ω_*/F. Очевидно, что глубина F-регулярной системы не меньше 1.

Более детально эти вопросы изучались для L-разбиения. Глубина многих известных отсечений (в том числе, предложенных Гомори) может колебаться на различных задачах от 0 до $+\infty$. Систематическое применение отсечений глубины 0, как правило, дает плохую сходимость [10]. Нами выделены и изучены классы P-отсечений и вполне регулярных отсечений, глубина которых ограничена сверху величиной k, т.е. количеством целочисленных переменных задачи (1.7) [7], [8], [18], [19], [21], [24], [25], [33]. Оказалось, что вполне регулярными являются отсечения (5.2) и (5.3), а также отсечения из [36].

Получены интересные экспериментальные данные о глубине отсечений для L-разбиения [10]. Установлено, что при решении известных тестовых задач глубина отсечений обычно не превышает нескольких единиц, а во многих примерах близка к 1. Это означает, что процесс снятия L-накрытия может происходить постепенно, по одному L-классу на каждой итерации.

Сравнение отсечений можно производить на основе дробного накрытия задачи (1.7). Будем говорить, что правильное отсечение $(\gamma',x)\leq\gamma'_0$ *не сильнее* $(\gamma,x)\leq\gamma_0$, если из $(\gamma,x'')\leq\gamma_0$ следует $(\gamma',x'')\leq\gamma'_0$ для любого $x''\in\Omega_*$. Аналогичное определение используется для сравнения систем неравенств.

F-регулярное отсечение не обязано быть сильнее правильного, не обладающего свойством регулярности. Это означает, что в алгоритмах может оказаться полезным использование правильных отсечений, имеющих "большую" глубину. Таковыми могут быть неравенства, порождающие грани максимальной размерности (фасеты) выпуклой оболочки допустимых решений задачи ЦП [4], [41].

При анализе классов отсечений естественно возникает вопрос о существовании и возможности построения "самой сильной" системы неравенств. В классе F-регулярных отсечений таким свойством обладает система из теоремы 5.2, однако для ее построения нужна информация, получение которой не проще, чем решение задачи ЦП. В следующем разделе для вполне регулярных отсечений указан простой способ получения системы неравенств, которая не слабее, чем любая другая из рассматриваемых там систем [7], [33].

6. Вполне регулярные отсечения

Как уже отмечалось выше, нами выделены классы отсечений, глубина которых ограничена количеством целочисленных переменных задачи. Рассматривается задача (1.7). Пусть

$$P' = \{x\colon a_j\leq x_j\leq a'_j,\ j=1,\dots,n\},$$

где $a'_j\in Z$, $a_j\in Z\cup\{-\infty\}$, $j=1,\dots,n$. Предполагается, что $\Omega\subset P'$. Линейное неравенство (5.1) называется *P-отсечением*, если:

а) $(\gamma,x)>\gamma_0$ для всех $x\in V_{x^*}(\Omega_*)$;

б*) $(\gamma,z)\leq\gamma_0$ для всех $z\in P'\cap Z^{n,k}$, $z\prec x^*$.

По сравнению с определением L_k-регулярного отсечения здесь усилено условие сохранения допустимых частично целочисленных точек.

ТЕОРЕМА 6.1. *Глубина любого P-отсечения для задачи* (1.7) *не превышает числа целочисленных переменных этой задачи.*

Вполне регулярным отсечением называется линейное неравенство (5.1), удовлетворяющее условию б*) из определения P-отсечения и требованию

а*) $(\gamma,x)>\gamma_0$ для всех $x\in V_{x^*}(P')$,

где $V_{x^*}(P')$ – элемент из P'/L_k, содержащий x^*. Таким образом, любое вполне регулярное отсечение является P-отсечением и, следовательно, его глубина не превышает величины k. По сравнению с P-отсечениями класс вполне регулярных отсечений более удобен для исследования, т.к. в его определении фактически не участвует множество Ω. Это позволило дать полное описание класса вполне регулярных отсечений для задач БП [7], а затем и для целочисленной решетки [33]. Достоинством таких отсечений является их применимость в случаях, когда Ω не является выпуклым. Кроме того, весьма полезной оказывается простота способов их построения. Вычислительный эксперимент показал, что в ряде случаев по глубине они близки к регулярным отсечениям первого алгоритма Гомори [10].

По аналогии с п.5 можно перейти к рассмотрению систем неравенств. Глубина такой системы также не превышает величины k.

Пусть далее в этом разделе $P'=B^n$. Совокупность всех вполне регулярных отсечений, построенных по точке x^*, обозначим через $T(x^*)$. Введем обозначения

$$J_0(x^*) = \{j\colon x^*_j=0,\ j<\Phi(x^*)\},\quad J^s_+(x^*) = \{j\colon j\in J_+(x^*),\ j<s\},\ s=1,\dots,k.$$

ТЕОРЕМА 6.2. *Класс отсечений $T(x^*)$ совпадает с множеством всех неотрицательных линейных комбинаций следующих неравенств:*

$$\begin{gathered} x_j\le 1,\quad j\in J_+(x^*),\\ -x_j\le 0,\quad j\in J_0(x^*),\\ \sum_{s\in J^j_+(x^*)} x_s+x_j \le |J^j_+(x^*)|,\quad j\in J_0(x^*),\\ \sum_{s\in J_+(x^*)} x_s+x_{\Phi(x')} \le |J_+(x^*)|, \end{gathered} \tag{6.1}$$

причем последнее из них входит в эти комбинации с положительным коэффициентом.

Другой вариант описания класса $T(x^*)$ получен в виде условий для коэффициентов отсечения [7].

Рассмотрим вопрос о существовании в $T(x^*)$ "самой сильной" системы неравенств. Введем класс $T^*(x^*)$, который получается из $T(x^*)$ путем допущения, что коэффициент при неравенстве (6.1) может быть равен 0. Через $G(x^*)$ обозначим систему линейных неравенств из условия теоремы 6.2.

ТЕОРЕМА 6.3. *Любое линейное неравенство из $T^*(x^*)$ не сильнее системы порождающих линейных неравенств $G(x^*)$.*

В классе вполне регулярных отсечений можно выделить отсечения глубины 1. Кроме теоретического интереса, они представляются также полезными для измерения мощности L-накрытий задач ЦП. Действительно, если на каждой итерации дробного алгоритма будет использоваться такое отсечение, то общее число итераций (отсечений) окажется равным мощности L-накрытия. Укажем также отсечения для задач БП.

Пусть $\alpha \geq 1$ – параметр. Рассмотрим семейство неравенств

$$\alpha \sum_{j \in J_+(x^*)} x_j + x_{\Phi(x^*)} \leq \alpha |J_+(x^*)|.$$

Нетрудно показать, что с увеличением α данное вполне регулярное отсечение "ослабевает" и при достижении им определенного значения (зависящего от Ω) приобретает глубину 1. При наличии определенной информации об Ω можно получать оценки для α через исходные данные задачи [24].

7. Алгоритмы и их исследование

Анализ алгоритмов начнем с двойственного дробного процесса отсечения для решения задачи (1.7), представляющего собой обобщение известных алгоритмов Гомори и других. Полученные для него результаты естественным образом переносятся на эти алгоритмы. Опишем этот процесс.

Процесс D.

Шаг 0. Полагаем $\Omega^{(1)}=\Omega$, $t=1$.

t-я итерация ($t \geq 1$).

Шаг 1. Находим $x^{(t)} = \operatorname{lex\,max} \Omega^{(t)}$. Если $x^{(t)} \in Z^{n,k}$ или $\Omega^{(t)} = \varnothing$, то процесс завершается. В первом случае получено оптимальное решение задачи (1.7), во втором – решения нет.

Шаг 2. Заменяем $\Omega^{(t)}$ на множество $\Omega'^{(t)}$ путем исключения из текущей системы ограничений некоторых ранее добавленных неравенств (отсечений). При этом должно выполняться условие

$$x^{(t)} = \operatorname{lex\,max} \Omega'^{(t)}. \tag{7.1}$$

Шаг 3. Строим правильно отсекающую систему неравенств

$$G^{(t)} x \leq g^{(t)},$$

где $G^{(t)}$ – $(m_t \times n)$-матрица, $g^{(t)}$ – m_t-вектор. Присоединяем ее к ограничениям текущей задачи ЦП и полагаем

$$\Omega^{(t+1)} = \Omega'^{(t)} \cap \{x\colon G^{(t)} x \leq g^{(t)}\}.$$

Переходим к следующей итерации на шаг 1, увеличив t на 1.

Отметим, что последняя итерация процесса завершается на шаге 1. Все остальные итерации включают шаги 1–3 и в дальнейшем называются *полными*. Будем говорить, что процесс D *решает задачу* (1.7), если он за конечное число итераций либо находит z_*, либо устанавливает отсутствие допустимых решений.

Из правильности используемых систем неравенств следует, что $\Omega_0 \subseteq \Omega^{(t)}$ для всех t. Исключение точки $x^{(t)}$ дополнительными ограничениями и условие (7.1) гарантируют, что $x^{(t)} \succ x^{(t+1)}$, $t=1,2,\ldots$

Конечность процесса D обеспечивается F-регулярными системами, которые отрезают от Ω_* некоторую "существенную" часть. Процесс D, в котором используются только F-регулярные системы неравенств, называется *F-регулярным*. Если же это свойство гарантируется через конечное число итераций, то называется *слабо F-регулярным*.

ТЕОРЕМА 7.1. *Процесс* D *решает задачу* (1.7) *с конечным L_k-накрытием тогда и только тогда, когда он является слабо L_k-регулярным.*

В случае произвольного разбиения слабо F-регулярный процесс D может оказаться бесконечным (для конечного F-накрытия). Это связано с тем, что в алгоритмах отсечения надо

весьма осторожно исключать дополнительные ограничения (либо сохранять все). Например, аналогичная теорема имеет место для любого регулярного разбиения и процесса D′, который отличается от D тем, что в нем сохраняются все порождаемые ограничения.

Перейдем к построению оценок числа итераций. Пусть $J_D(\Omega)$ – число полных итераций процесса D, выполняемых при решении задачи (1.7), $H_D(\Omega,F)$ – верхняя оценка глубины используемых в нем систем дополнительных неравенств, измеренных с помощью F-разбиения.

ТЕОРЕМА 7.2. *Для задачи* (1.7) *и* L_k*-регулярного процесса* D *справедливо неравенство*

$$L_D(\Omega) \leq |\Omega_*/L_K|. \tag{7.2}$$

Доказательства теорем 7.1 и 7.2 совпадают с приведенными в [17], [19] для L-разбиения.

В случае произвольного разбиения такая оценка имеет место для процесса D′. При построении нижних оценок числа итераций вопрос о сохранении дополнительных ограничений и F-регулярность становятся несущественными.

ТЕОРЕМА 7.3. *Для любого регулярного разбиения* F *и задачи* (1.7) *выполняется*

$$J_D(\Omega) \geq (1/H_D(\Omega,F))|\Omega_*/F|. \tag{7.3}$$

Объединение оценок (7.2) и (7.3) для L_k-регулярного процесса приводит к важному соотношению

$$(1/H_D(\Omega,L_k))|\Omega_*/L_k| \leq J_D(\Omega) \leq |\Omega_*/L_k|. \tag{7.4}$$

Для процесса D с P-отсечениями надо положить $H_D(\Omega,L_k)=k$. Это означает, что мощность $|\Omega_*/L_k|$ существенно определяет сложность решения задачи (1.7). Если, напр., $|\Omega_*/L_k|=+\infty$, то алгоритм в принципе не может решить задачу (1.7). Если же $|\Omega_*/L_k|$ экспоненциально растет вместе с n, то и число итераций будет иметь аналогичную зависимость от n. Соотношение (7.4) показывает также, что усиление отсечений в указанном классе не может привести к существенному ускорению процесса. В случае отсечений единичной глубины получаем $J_D(\Omega)=|\Omega_*/L_k|$, т.е. D измеряет мощность L_k-накрытия.

Приведенные оценки числа итераций имеют общий структурный характер. Чтобы построить другие, более детальные оценки, надо использовать соответствующие результаты, полученные для L-накрытий (см. п.4). Например, из теорем 4.2 и 7.2 вытекает, что для решения многомерной задачи о рюкзаке первым алгоритмом Гомори (с L-регулярными отсечениями) потребуется не более

$$([\mu]-\nu+1)(1+n)^{b'}$$

отсечений. Из теорем 4.4 и 7.3 следует, что для задачи БП (4.7) и алгоритмов с вполне регулярными отсечениями имеют место соотношения

$$(1/n)v(M_*) \leq J_D(M) \leq 2v(M_*).$$

Это означает, что значительное количество отсечений может потребоваться лишь при наличии большого числа вершин множества M_*, принадлежащих различным L-классам.

Из других теоретических результатов по методу отсечения отметим следующие. В [6], [20] для дробных алгоритмов с вполне регулярными отсечениями выделены наискорейшие по числу итераций алгоритмы. В [21] предложен прямо-двойственный алгоритм отсечения, основанный на сохранении альтернируемости L-структуры. Анализ контрпримеров для прямых алгоритмов отсечения [19] показал, что при их решении возникают как угодно длинные последовательности отсечений, не обладающих свойством L-регулярности.

Изложим некоторые результаты для метода ветвей и границ (схемы Лэнд и Дойг) [25], [26]. Рассмотрим полностью целочисленную задачу (1.4)-(1.6) и алгоритм W из указанного класса. Пусть F - регулярное разбиение, и S_W - последовательность приближений, порождаемая алгоритмом W при решении этой задачи. Оказалось, что S_W обладает следующими свойствами:

- в общем случае не является регулярной относительно L-разбиения и любого кубического разбиения,
- регулярна относительно канонического разбиения K,
- для произвольного кубического разбиения δ любой дробный класс из M/δ содержит не более n ее членов.

На основе этих утверждений нами построен ряд верхних оценок числа итераций, в частности, $|S_W| \leq |M/K|$. Для задач БП тоже получены результаты в терминах вершин многогранника M [26]. Дробный класс $Y \in M/K$ называется *существенным*, если он содержит вершину v многогранника M такую, что $f_0(v) \geq f_0(x)$ для всех x из Y. Показано, что длина S_W не превышает числа существенных элементов в M/K.

Дробный процесс отсечения можно рассматривать как определенный метод перебора элементов L-накрытия задачи ЦП. Это наводит на мысль о разработке других алгоритмов, для которых идея перебора классов разбиения была бы исходной. В этой связи следует отметить работу [39], в которой предложен алгоритм решения нелинейной задачи ЦП на кубе, основанный на использовании специальных разбиений.

С другой стороны, с учетом приведенных выше оценок числа итераций возникает потребность в разработке алгоритмов для измерения мощности L-накрытий задач ЦП. В данном направлении нами предложены два основных подхода:

- замедление процесса отсечения путем применения отсечений единичной глубины,
- специальный метод перебора L-классов.

Первый из них опробован для задач БП. В случае целочисленной решетки его возможности ограничены из-за быстрого роста коэффициентов отсечений при увеличении числа переменных. Второй подход применим для достаточно общих задач и реализован для задач ЦЛП. Основным шагом метода является переход от одного элемента L-накрытия к следующему за ним в порядке лексикографического убывания. Он порождает последовательность $S=\{x^{(t)}\}$, $t \in T$, точек из Ω_*, обладающую свойствами:

а) $x^{(t)} \succ x^{(t+1)}$, $t=1,2,\ldots$;

б) все $x^{(t)}$ принадлежат различным L-классам;

в) $|S| = |\Omega_*/L|$.

В случае ЦЛП анализ L-накрытия этим методом сводится к решению последовательности задач ЛП разной размерности. Процесс завершается за конечное число итераций, если $|\Omega_*/L| < +\infty$. Описание одного из алгоритмов и результаты эксперимента приведены в [10].

К сожалению, таким алгоритмам присущ общий недостаток двойственных методов: оптимальное решение находится лишь в конце процесса, других допустимых решений не строится. В связи с этим нами предложены другие алгоритмы перебора L-классов, которые (как и методы ветвей и границ) позволяют получить последовательности допустимых решений задачи [11], [25]. Их можно строить на основе указанного выше алгоритма, рассматривая вместо (1.8) некоторое подходящее семейство задач. Например, для задачи ЦЛП оно имеет вид

$$\text{найти } z(\alpha) = \operatorname{lex\,max}\{x\colon (c,x) \geq \alpha,\ x \in M_0\}. \tag{7.5}$$

Способы выбора последовательности значений параметра α существенно влияют на эффективность алгоритмов. Просмотр L-накрытия очередной задачи типа (7.5) начинается с элемента, который лексикографически меньше всех рассмотренных ранее L-классов.

На базе такого подхода нами разработаны гибридные варианты алгоритмов, в которых при решении задач (7.5) перебор L-классов комбинируется с регулярными отсечениями Гомори, а также приближенные алгоритмы с априорной оценкой точности получаемых решений. Следует также отметить, что рассматриваемые алгоритмы удобны для использования в декомпозиционных методах решения частично целочисленных задач, напр., для производственно-транспортных задач [1] и задач стандартизации [2].

Остановимся кратко на результатах экспериментальных исследований. В разработанном нами комплексе программ реализовано несколько двойственных дробных и полностью целочисленных алгоритмов отсечения, алгоритмов перебора L-классов и гибридных алгоритмов. Программы написаны на языке Фортран и Паскаль. Расчеты проводились в основном на ЭВМ ЕС-1033 и ПК IBM PC/AT-286.

В экспериментальных исследованиях были использованы известные серии A, B и D тестовых задач Хальди [45], задачи Петерсена [44], Кивистика [12], задачи со случайными данными, специально построенные нами примеры и прикладные задачи. Эти расчеты отражены в работах [10], [11].

Вычислительный эксперимент проводился с целью получения сведений об L-накрытиях задач, изучения известных алгоритмов ЦЛП на основе развиваемого подхода и апробации новых алгоритмов. Для сравнения использовался известный пакет MILP88.

Расчеты показали, что гибридные алгоритмы перебора L-классов достаточно перспективны. У них оказались неплохие показатели как по времени счета, так и по надежности получения результата. Весьма устойчиво, хотя в ряде случаев и заметно медленнее работал указанный выше пакет. На сериях A, B, D и некоторых других хорошо проявлял себя один из вариантов первого алгоритма Гомори с L-регулярными отсечениями.

Использование L-регулярных отсечений в алгоритмах перебора L-классов во многих случаях приводило к существенному ускорению процесса решения, причем их число было относительно небольшим (обычно оно не превышало 10). Дальнейшее увеличение числа отсечений не давало заметного положительного эффекта.

Для двойственных дробных алгоритмов отсечения важную роль в повышении надежности процесса решения играли L-регулярные отсечения. Алгоритмы с нерегулярными отсечениями вели себя существенно более непредсказуемо. При их использовании наряду с отдельными успехами возникало огромное число итераций даже для задач небольшой размерности. Регулярные отсечения Гомори в целом оказались "сильнее", чем вполне регулярные отсечения.

Во многих случаях значительного уменьшения мощности L-накрытий, числа отсечений и времени счета удавалось достичь путем подходящего упорядочения переменных задачи.

Задачи с мощными L-накрытиями (несколько сотен и более элементов) среди рассматриваемых тестовых задач встречались не часто, хотя при необходимости такие задачи нетрудно построить. Была заметна общая тенденция роста мощности L-накрытий с увеличением разрыва двойственности и числа переменных.

В эксперименте наблюдалась достаточно тесная связь мощности L-накрытий задач с эффективностью их решения алгоритмами отсечения и перебора L-классов. Глубина отсечений обычно не превышала нескольких единиц. Поэтому представляется полезным при разработке и анализе тестовых задач ЦП (см., напр., [38]) использовать информацию об их L-накрытиях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бахтин А.Е., Колоколов А.А., Коробкова З.В. *Дискретные задачи производственно-транспортного типа.* – Новосибирск, 1978. – 167 с.

2. Береснев В.Л., Гимади Э.Х., Дементьев В.Т. *Экстремальные задачи стандартизации.* – Новосибирск, 1978. – 335 с.

3. Булатов В.П. *Методы погружения в задачах оптимизации.* – Новосибирск, 1977. – 161 с.

4. Емеличев В.А., Ковалев М.М., Кравцов М.К. *Многогранники, графы, оптимизация.* – М.: Наука, 1981. – 344 с.

5. Еремин И.И., Мазуров В.Д., Астафьев Н.Н. *Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования.* – М.: Наука, 1983. – 336 с.

6. Заблоцкая О.А. *О сравнении вполне регулярных алгоритмов отсечения //* Управляемые системы. – Новосибирск, 1984. – Вып.25. – С.68–74.

7. Заблоцкая О.А., Колоколов А.А. *Вполне регулярные отсечения в булевом программировании //* Управляемые системы. – Новосибирск, 1983. – Вып.23. – С.55–63.

8. Заблоцкая О.А., Колоколов А.А. *Об одном классе двойственных процессов отсечения булевого программирования //* Принятие оптимальных решений в экономических системах. – Горький, 1986. – С.34–41.

9. Забудский Г.Г. *О целочисленной постановке одной задачи резмещения объектов на линии //* Управляемые системы. – Новосибирск, 1990. – Вып.30. – С.35–45.

10. Заикина Г.М., Колоколов А.А. *Экспериментальные исследования в целочисленном программировании с применением L-разбиения //* Дискретная оптимиз. и анализ сложных систем. – Новосибирск, 1989. – С.26–56.

11. Заикина Г.М., Колоколов А.А., Леванова Т.В. *Экспериментальное сравнение некоторых методов целочисленного программирования //* Методы решения и анализа задач дискретной оптимизации. – Омск, 1992. – С.25–41.

12. Кивистик Л. *Об ускорении полностью целочисленного алгоритма Гомори //* Изв. АН ЭстССР. – 1985. – Т.34. – №1. – С.11–19.

13. Колоколов А.А. *Верхняя оценка числа отсечений для первого алгоритма Гомори //* Тез. докл. III Всесоюз. конф. по проблемам теоретической кибернетики. – Новосибирск, 1974. – С.87–88.

14. Колоколов А.А. *О числе отсекающих плоскостей в первом алгоритме Гомори //* Проблемы дискретной информации. – Новосибирск, 1975. – С.84–96.

15. Колоколов А.А. *Верхние оценки числа отсекающих плоскостей для циклического алгоритма Гомори //* Методы моделирования и обработки информации. – Новосибирск, 1976. – С.106–116.

16. Колоколов А.А. *О лексикографической структуре некоторых выпуклых многогранных множеств //* Тез. докл. V Всесоюз. конф. по проблемам теоретической кибернетики. – Новосибирск, 1980. – С.77–79.

17. Колоколов А.А. *Регулярные отсечения при решении задач целочисленной оптимизации //* Управляемые системы. – Новосибирск, 1981. – Вып.21. – С.18–25.

18. Колоколов А.А. *Нижняя оценка числа итераций для одного класса алгоритмов отсечения //* Управляемые системы. – Новосибирск, 1983. – Вып. 23. – С.64–69.

19. Колоколов А.А. *Методы дискретной оптимизации.* Учебное пособие. – Омск, 1984. – 75 с.

20. Колоколов А.А. *О наискорейшем алгоритме в одном классе регулярных процессоз отсечения. Методы и программы решения оптимизационных задач на графах и сетях.* Ч.2. // Тез. докл. III Всесоюз. совещ., Ташкент. - Новосибирск, 1984. - 70 с.

21. Колоколов А.А. *Алгоритмы отсечения и некоторые разбиения множеств* // Дискретная оптимизация и численные методы решения прикладных задач. - Новосибирск, 1986. - С.50-67.

22. Колоколов А.А. *Выпуклые множества с альтернирующим L-разбиением* // Моделирование и оптимизация систем сложной структуры. - Омск, 1987. - С.144-150.

23. Колоколов А.А. *Исследование задач и методов целочисленного программирования на основе L-разбиения* // Wiss. Koll. - Ilmenau: TH, 1988. - S.53-55.

24. Колоколов А.А. *Об одном применении вполне регулярных отсечений в булевом программировании* // Комбинаторно-алгебраические методы в дискретной оптимизации. - Нижний Новгород, 1991. - С.36-45.

25. Колоколов А.А. *Регулярные разбиения в целочисленном программировании* // Методы решения и анализа задач дискретной оптимизации. - Омск, 1992. - С.67-93.

26. Колоколов А.А. *Регулярные разбиения и метод ветвей и границ* // Информ. бюллетень АМП, №4, Тез. докл. конф. "Математическое программирование и приложения". - Екатеринбург, 1993. - 61 с.

27. Колоколов А.А., Сайко Л.А. *О некоторых оценочных разбиениях в целочисленном программировании* // Тез. докл. десятого Всесоюз. симп. "Системы програм. обесп. решения задач оптимального планирования". - М., 1988. - 134 с.

28. Колоколов А.А. Цепкова Е.В. *Верхняя оценка числа регулярных отсечений для одного семейства задач на конусе* // Управляемые системы. - Новосибирск, 1984. - Вып. 25. - С.75-79.

29. Колоколов А.А., Цепкова Е.В. *Исследование задачи о рюкзаке на основе L-разбиения* // Кибернетика. - 1991. - №2. - С.38-43.

30. Корбут А.А., Финкельштейн Ю.Ю. *Дискретное программирование.* - М.: Наука, 1969. - 368 с.

31. Сайко Л.А. *Исследование одного класса разбиений в целочисленном программировании* // Управляемые системы. - Новосибирск. - 1989. - Вып.29. - С.72-82.

32. Сергиенко И.В. *Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации.* - Киев, 1988. - 471 с.

33. Симанчев Р.Ю. *О вполне регулярных отсечениях для задач целочисленной оптимизации* // Управляемые системы. - Новосибирск, 1990. - Вып.30. - С.61-71.

34. Схрейвер А. *Теория линейного и целочисленного программирования*: Т.2. - М.: Мир, 1991. - 342 с.

35. Ху Т. *Целочисленное программирование и потоки в сетях.* - М.: Мир, 1974. - 520 с.

36. Червак Ю.Ю. *Поиск лексикографически максимальной дискретно определенной точки выпуклого множества* // Математические методы решения экономических задач. - М.: Наука, 1979. - С.68-75.

37. Шевченко В.Н. *Выпуклые многогранные конусы, системы сравнений и правильные отсечения в целочисленном программировании* // Комбинаторные алгебраические методы в прикладной математике. - Горький, 1979. - С.109-119.

38. Chang M.G., Shepardson F. *An integer programming test problem generater* // Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, 1982. - P.146-160.

39. Galperin E.A. *The integer cubic algorithm* // Computer Math. Applic. - 1991. - Vol.21. - № 6, 7. - P.215-224.

40. Gomory R.E. *Outline of an algorithm for integer solution to linear programs* // Bull. Amer. Math. Soc. - 1958. - V.64. - №5. - P.275-278.

41. Grotschel M., Lovasz L., Schrijver A. *Geometric algorithms and combinatorial optimization* – Berlin a.o.: Springer, 1988. – XII. – 362 p.

42. Kolokolov A.A. *Upper bound of L-covering power in the Boolean programming problems* // III international seminar on global optimization. – Irkutsk, 1992. – 108 p.

43. Nourie F.J., Venta E.R. *An upper bound on the number of cuts needed in Gomory's method of integer forms* // Operation Research Letters. – 1981. – V.2. – P.129–133.

44. Petersen C.C. *Computational experience with variants of the Balas algorithm applied to the selection of* R&D *projects* // Manag. Sci. – 1967. – V. 13. – № 9. – P.736–750.

45. Trauth C.A., Woolsey R.E.D. *Integer programming: a study in computational efficiency* // Manag. Sci. – 1969. – V. 15. – P.481–493.

г. Омск

Поступила
05.07.1993